Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Dienstag 21.12.2011**

(1) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto e^{-|x|}$.

(a) Untersuchen Sie, ob f in $\mathcal{S}$ enthalten ist.

(b) Berechnen Sie $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x) dx$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Untersuchen Sie ob $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(k) dk$ gilt.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$, wobei $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ für $x \neq 0$ und 0 falls $x = 0$.

(a) Berechnen Sie $g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixk} f(x) dx$, $k \in \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie ob $f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(k) dk$ gilt.

(3) Der Schwartzraum $\mathcal{S}$ ist mit der Faltung $*$ als Multiplikation eine Algebra. Zeigen Sie, dass kein Einselement in $\mathcal{S}$ existiert.

(4) (a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $(r, \phi) \mapsto g(r \cos \phi, r \sin \phi)$. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta g)(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r, \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r}(r, \phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}(r, \phi)$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie zu $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|}\right), \text{für } x \neq 0 \\ 0, \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die Funktion Δh auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung aus Teil (a). Untersuchen Sie, ob die Funktion h in 0 zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls Δh an der Stelle 0.

Zusatzaufgaben

Gegeben ist ein leckerer Donut mit der Parametrisierung

$$\Phi : [0, r_0] \times D \to \mathbb{R}^3,\ (r, \phi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} (R + r\cos\phi)\cos\theta \\ (R + r\cos\phi)\sin\theta \\ r\sin\phi \end{pmatrix},$$

wobei $0 < r_0 < R$ fest gewählt und D ein frei wählbarer achsenparalleler Würfel im $\mathbb{R}^2$ mit Seitenlänge 2π ist, der $(0, 0)$ enthält. Teilen Sie den Donut in zwei Teile, indem Sie D auswählen und den Parameterbereich $[0, r_0] \times D$ achsenparallel halbieren.

(a) Welche Teilungsstrategie erhält den Weihnachtsfrieden, d.h. führt auf Anteile gleichen Volumens?

(b) Welches ist die 'unfairste' Teilungsstrategie?