Hausaufgabenblatt 5

Abgabe am 21.11.2017

Aufgabe 1. Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $\mathbb{R}$ und die Abbildung $\rho : \mathcal{R} \to [0,\infty)$ sei definiert durch

$$\rho(A) := \begin{cases} 1, & \text{es existiert ein } \varepsilon > 0 \text{ mit } (0,\varepsilon) \subseteq A, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \qquad A \in \mathcal{R}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Für paarweise disjunkte Mengen $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ gilt die Gleichheit

$$\rho\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \rho(A_j).$$

b) Die Abbildung ρ ist nicht σ-additiv.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die im folgenden gegebenen Funktionen f Lebesgue-integrierbar auf der jeweiligen Menge S sind und $\int_S f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x) = 0$.

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x^2, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3. Es sei eine stetige und Lebesgue-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass im allgemeinen die Aussage $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ <u>nicht</u> gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass $C_c(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und } \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ liegt, dass also für jedes $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ und jedes $\varepsilon > 0$ ein $g \in C_c(\mathbb{R})$ existiert, mit

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x < \varepsilon.$$

<u>Erinnerung:</u> Man sagt eine stetige Funktion f hat kompakten Träger, falls die Menge

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}$$

kompakt ist.
<u>Hinweis:</u> Überlegen Sie sich, warum es ausreicht die Aussage für Indikatorfunktionen von abgeschlossenen Intervallen zu beweisen.

Zusatzaufgabe 5. Die Cantormenge C entsteht aus dem Intervall $[0,1]$, indem zunächst das offene mittlere Drittel herausgenommen wird, aus den zwei verbleibenden Intervallen wieder jeweils das offene Drittel herausgenommen wird, usw., also

$$C := [0,1] \setminus \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right) \cup \dots\right)$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Die Menge C ist eine Lebesgue Nullmenge.

b) Die Menge C besteht genau aus den Punkten $a \in \mathbb{R}$ mit $a = \sum_{j=1}^{\infty} a_j 3^{-j}$ mit $a_j \in \{0,2\}$.

c) Die Menge C ist überabzählbar.