Analysis II Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 3

Abgabe am 26.04.2017

Aufgabe 1. Berechnen Sie die Riemannintegrale als Grenzwerte geeigneter Zwischensummen.

(a) $\int\limits_0^1 x^2 dx$ (b) $\int\limits_0^1 e^x dx$.

Hinweise: Vorschlag für Zerlegung: $x_k = k/n$. Begründen Sie die Konvergenz.

Aufgabe 2. Benutzen Sie

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \; = \; A_n b_n - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_{k+1} - b_k)$$

mit $A_m = \sum_{k=1}^m a_k$, um den Wert des Integrals

$$\int\limits_0^1 x e^x dx$$

als Limes einer Obersumme (oder Untersumme) zu bestimmen.

Aufgabe 3. Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 1 - x & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f Riemann-integrierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und von einheitlichem Vorzeichen. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\, dx = f(\xi) \int\limits_a^b g(x)\, dx.$$

Zusatz: Untersuchen Sie, ob sich auch ein $\xi \in (a,b)$ finden lässt, welches die obige Gleichheit erfüllt.