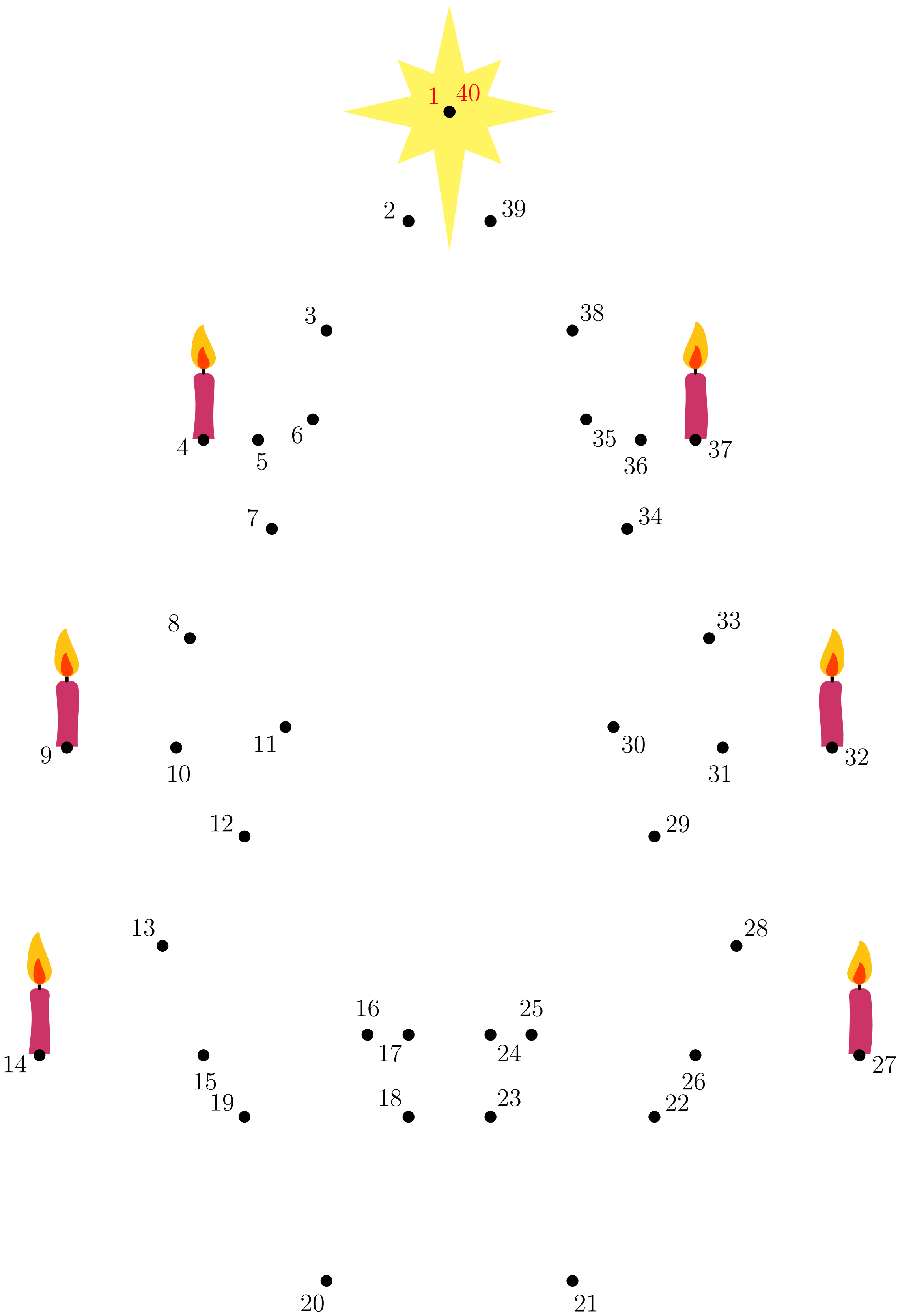
Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 10 – Weihnachtszettel

Abgabe am 09.01.2017



Aufgabe 1. Verbinden Sie auf dem Titelblatt die Punkte 1 bis 40 in aufsteigender Reihenfolge mit einem grünen Stift.

Aufgabe 2. Sei $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig und die Kugelloxodrome $\gamma : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{\cosh(k\phi)} \begin{pmatrix} \cos\phi \\ \sin\phi \\ \sinh(k\phi) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeichnen Sie γ und ihre Projektion in die x-y-Ebene.

(b) Zeigen Sie, dass γ eine beliebig oft differenzierbare Kurve ist, deren Bild in der Einheitssphäre des $\mathbb{R}^3$ liegt.

(c) Berechnen Sie die Länge von γ.

Aufgabe 3. Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x + yz \\ y + xz \\ z + xy \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \mathrm{d}\gamma$, wenn

(a) γ die Strecke von $(0,0,0)$ nach $(1,1,1)$ ist,

(b) γ die Kurve mit der Parametrisierung $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, ist

(c) γ die drei Strecken von $(0,0,0)$ nach $(1,0,0)$, dann von $(1,0,0)$ nach $(1,1,0)$ und abschließend von $(1,1,0)$ nach $(1,1,1)$ durchläuft.

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $n > 0$ die Funktion $f : (0,n) \times (0,\infty)$, $f(x,y) = \mathrm{e}^{-xy} \sin x$, integrierbar ist. Folgern Sie aus dem Satz von Fubini, dass

$$\int_{(0,n)} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\lambda(x) = \int_{(0,\infty)} \left(\int_{(0,n)} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}\lambda(y). \tag{1}$$

Hinweis: $\int_{(0,\infty)} \mathrm{e}^{-tx} \mathrm{d}\lambda(t) = 1/x$.

(b) Verwenden Sie das Ergebnis aus (a) und den Satz von Lebesgue, und zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(0,n)} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Integral bezüglich x in (1) mittels partieller Integration.

Aufgabe 5. Sei $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ definiert durch

$$\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \cos v \\ \sin v \end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass Φ eine reguläre Parameterdarstellung ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Bild von Φ eine Untermannigfaltigkeit ist.

(c) Finden Sie eine Funktion $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, so dass das Bild von Φ als Nullstellenmenge von h beschrieben wird.

Aufgabe 6. Sei $h > 0$ und

$$\phi : U := (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, h\theta).$$

Zeigen Sie, dass die Wendelfläche $\phi(U)$ eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass zu jedem $p \in \phi(U)$ eine offene Umgebung W von p existiert, so dass $\phi(U) \cap W$ das Bild einer regulären Parameterdarstellung ist.

Aufgabe 7. Seien $a, b > 0$ und $M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2/a^2 - y^2/b^2\}$.

(a) Zeichnen Sie M.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialebene in einem Punkt $p \in M$.

Aufgabe 8. Berechnen Sie das Oberflächenintegral der Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } (x,y,z) = 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{sonst.} \end{cases}$$

über die Kegelmantelfläche, die durch die Parametrisierung

$$\Phi : (0,1) \times (0,2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r,\phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi, r)$$

gegeben ist.

Zusatzaufgabe 9. Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(n+1) > f(f(n))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $f(n) = n$ gilt. Hinweis: Es gilt $f(k) > n$ für $n, k \in \mathbb{N}$ mit $k > n$.