Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Freitag 06.07.2012**

(1) Auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum X seien zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ erklärt, bezüglich denen X vollständig ist. Existiert ein $C > 0$, sodass für alle $x \in X$

$$\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$$

gilt, so sind beide Normen äquivalent.

(2) Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller Polynome über $\mathbb{R}$ versehen mit der Norm

$$\left\|\sum a_i x^i\right\| = \sum |a_i|.$$

Zeigen Sie, dass der Operator $T : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$,

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \mapsto \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i} x^i + a_0$$

stetig und bijektiv, seine Inverse aber unstetig ist. Widerspricht dies dem Satz von der stetigen Inversen?

(3) Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein separabler, unendlichdimensionaler Banachraum und sei $\{e_i : i \in I\}$ eine (algebraische) Basis von X, mit $\|e_i\| = 1$ für alle i. Für $x = \sum x_i e_i$ definieren wir mittels

$$\|x\|_1 = \sum |x_i|$$

eine weitere Norm auf X. Zeigen Sie, dass der Graph der Inklusion $\iota : (X, \|\cdot\|) \to (X, \|\cdot\|_1)$, $x \mapsto x$ abgeschlossen, aber ι nicht stetig ist. Widerspricht dies dem Satz vom abgeschlossenen Graphen?

Hinweis: (1) Untersuchen Sie zunächst ι^{-1}. (2) Nach Blatt 4, Aufgabe 3 wissen Sie, dass $\{e_i : i \in I\}$ überabzählbar ist. Deshalb kann $(X, \|\cdot\|_1)$ nicht separabel sein (Warum?).

(4) Seien X, Y Banachräume und $(T_n) \subseteq L(X, Y)$ eine Folge von Operatoren, sodass für alle $x \in X$

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$$

existiert. Dann gilt $T \in L(X, Y)$.

Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus.

Zusatzaufgabe.

- Sei $x \in [-\pi, \pi]$ beliebig. Zeigen Sie, dass es Funktionen aus $C([-\pi, \pi])$ gibt, deren Fourierreihe in x nicht konvergiert.

  Hinweis: Es gilt

  $$T_n f = \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_n(t) dt,$$

  wobei

  $$D_n(t) = \begin{cases} 2n+1, \text{falls } t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\sin[(2n+1)t/2]}{\sin(t/2)}, \text{sonst.} \end{cases}$$

  Betrachten Sie T_n als lineares Funktional auf $(C([-\pi, \pi]), \|\cdot\|_\infty)$ und verwenden Sie Aufgabe 4.