

---

## Analysis II für Physiker

Sommersemester 2009

Prof. Dr. D. Lenz

---

Blatt 7

Abgabe Mittwoch 10.06.2009

- (1) Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades um  $(x_o, y_o) = (0, 0)$  von

$$h(x, y) = e^x \sqrt{1 - y^2}, \quad x \in \mathbb{R}, y \in [0, 1].$$

Vergleichen Sie das Resultat mit dem Produkt der eindimensionalen Entwicklungen:

$$(1 + x + \frac{1}{2}x^2)(1 - \frac{1}{2}y^2).$$

- (2) Bestimmen Sie die Extrema der Funktion  $w : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$w(x, y) = xy \cos x \cdot \cos y.$$

Geben Sie ihre Stelle an und um welchen Typ (z.B. Minimum) es sich handelt.

- (3) Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  heißt konvex, wenn für alle  $x, y \in \mathbb{R}^m$  und  $\alpha \in [0, 1]$  gilt  $f(x + \alpha(y - x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x))$ .

- a. Ist  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  konvex, so ist die Menge  $A := \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \leq 0\}$  konvex (d.h. mit zwei Punkten liegt auch deren Verbindungsstrecke in  $A$ ).
- b. Ist  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  zweimal stetig differenzierbar und ist die Matrix  $(D_i D_j f(x))$  positiv definit für alle  $x \in \mathbb{R}^m$ , so ist  $f$  konvex.

- (4) Sei  $a, b, c > 0$  und  $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1$ .

Sei nun  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  eine Lösung der Gleichung  $g(p) = 0$ . Kann man die Lösungsmenge lokal als Graph einer Funktion ausdrücken, d.h. kann man eine Funktion  $Z : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , finden, so dass in einer geeigneten Umgebung von  $p = (x, y, z)$  gilt

$$g(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow z = Z(x, y)$$

für die Fälle

$$1.) p = (0, b, 0), \quad 2.) p = \frac{1}{\sqrt{2}}(a, b, 0), \quad 3.) p = \frac{1}{\sqrt{3}}(a, b, c).$$

```

ParametricPlot3D[
  {3 Cos[t] Sin[s], Sin[t] Sin[s], Cos[s]},
  {t, 0, 2 Pi}, {s, 0, Pi}]

```

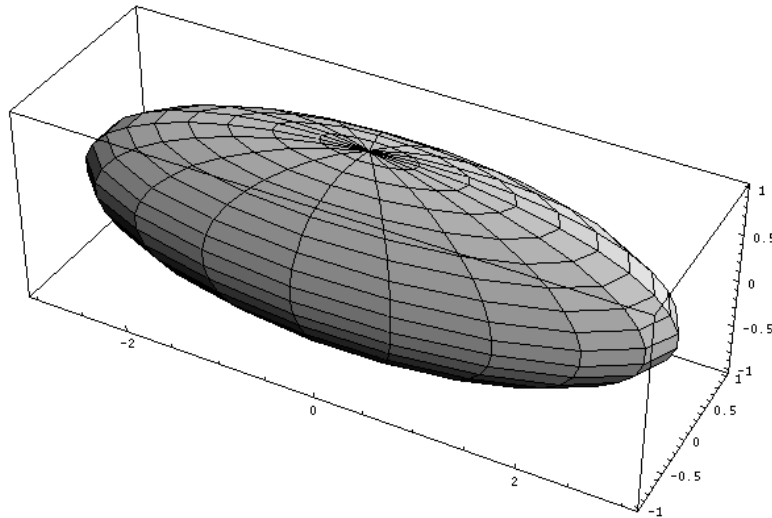


Abbildung 1: (Aufgabe 4) Ein Ellipsoid, dargestellt mit Hilfe einer bekannten Mathematik-Software.

### Zusatzaufgaben

- (1) Man berechne näherungsweise die Zahl  $(0.98)^{1.04}$  mit Hilfe des Satzes von Taylor für Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$ . Vergleichen Sie das Resultat mit der Näherung, die sich aus der Taylorformel für Funktionen auf  $\mathbb{R}$  ergibt (aus der Funktion  $x \mapsto (1 - x)^{1+2x}$ ).
- (2) Ein Bauer bewirtschaftet ein Feld  $[0, 1]^2$  mit Sonnenblumen. Auf diesem Feld wuchert (zusätzlich) Unkraut. Die Höhe der Sonnenblume zum Zeitpunkt am Ort  $(x, y)$  sei durch die Funktion  $S(x, y)$  wiedergegeben und die Höhe des Unkrauts durch  $U(x, y)$ . Diese Funktionen seien - wegen der lokal unterschiedlichen Sonneneinstrahlung - gegeben durch

$$S(x, y) = \exp(x \cdot y) + y - 1, \quad U(x, y) = x^2 + x$$

Der Bauer fährt seinen Traktor mit Einheitsgeschwindigkeit so über das Feld, dass an der Stelle des Traktors die Höhe von Sonnenblumen und Unkraut gleich einem Hundertstel der zurückgelegten Strecke ist. Sein Startpunkt ist  $(0,0)$ . Ist die Traktortrajektorie daraus eindeutig bestimmt?

- (3) Beantworten Sie die Frage aus Aufgabe (4) für den Punkt  $p = (0, 0, c)$ .