

Hausaufgabenblatt 2Abgabe am 01.11.2017

Aufgabe 1. Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix}.$$

- (a) Skizzieren Sie das Vektorfeld F .
- (b) Zeigen Sie $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$.
- (c) Ist F ein Gradientenfeld? (Tipp: Berechnen Sie $\int_\gamma F d\gamma$ für $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (\sin t, \cos t)$.)

Aufgabe 2. Sei $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto h(|x|)$

- (a) Berechnen Sie $\nabla\varphi$.
- (b) Ist $G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto x/|x|^3$ ein Gradientenfeld? Finden Sie gegebenenfalls ein Potenzial, d.h. eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $G = \nabla\varphi$.

Aufgabe 3.

- (a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(x, y) := (y, y - x)$ kein Potential besitzt.
- (b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, H(x, y) := (y, x - y)$ ein Potential besitzt und geben Sie ein solches Potential an.

Aufgabe 4. Berechnen Sie das Kurvenintegral des Feldes $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, G(x, y) = (x^2, xy)$ längs der Kurve γ in den folgenden Fällen:

- (a) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t, t)$.
- (b) $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \begin{cases} (t, 0), & t \leq 1, \\ (1, t - 1), & t > 1. \end{cases}$

Handelt es sich um ein Gradientenfeld?