

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

---

**Blatt 5****Abgabe: Donnerstag 17.6.2010**

- (1) Finden Sie zum AWP  $y' = ay$ ,  $y(0) = 1$  für  $a > 0$  die Lösung mit Hilfe des Eulerschen Polygonzugverfahrens.
- (2) In der Newtonschen Mechanik bewegt sich ein Massepunkt der Masse  $m$  mit Koordinaten  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$  in einem Kraftfeld, das durch ein zweimal stetig differenzierbares Potential  $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist, gemäß der DGL

$$my'' = -\nabla V(y).$$

- a.) Transformieren Sie dieses System in ein System erster Ordnung und zeigen Sie, dass dieses einer lokalen Lipschitzbedingung genügt.
- b.) Sei  $y : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Lösung. Zeigen Sie, dass die Energie

$$H(t) = \frac{m}{2}|y'(t)|^2 + V(y(t))$$

konstant bleibt.

- (3) a.) Zeigen Sie, dass zur DGL aus Aufgabe 2 jedes AWP auf ganz  $\mathbb{R}$  lösbar ist, wenn ein  $C \in \mathbb{R}$  existiert mit  $V(x) \geq C$  für jedes  $x \in \mathbb{R}^3$ .
- b.) Zeigen Sie, dass die Lösung und deren Ableitung beschränkt bleiben, wenn gilt  $V(x) \rightarrow \infty$ , wenn  $|x| \rightarrow \infty$ .
- (4) Zum AWP aus Aufgabe 2 sei das Potential  $V(x) = |x|^4$  betrachtet, mit  $y(0) = (1, 0, 0)$  und  $y'(0) = (0, 0, 0)$ . Zeigen Sie, dass die Zeit bis der Massepunkt den Koordinatenursprung erreicht kleiner ist, als im Falle des Potentials  $V(x) = |x|^2$  und gleichen Anfangswerten.

### Zusatzaufgaben:

1. Geben Sie zum AWP  $y' = y^2$ ,  $y(0) = 1$  explizit eine Formel für den  $n$ -ten Schritt des Eulerschen Polygonzugverfahrens an.
2. a.) Formulieren Sie die Newtonschen Bewegungsgleichungen für einen vom Baum herunterfallenden Apfel, dessen (durch einen Windstoss verursachte) Anfangsgeschwindigkeitsvektor in horizontale Richtung weist.  
b.) Geben Sie eine Formel für die Energie des Apfels an und zeigen Sie, dass diese konstant ist.
3. Benutzen Sie Ihr Wissen über die Eigenschaften der maximalen Lösung eines AWP, um zu beweisen, dass der Apfel schliesslich auf die Erde fällt.
4. Geben Sie eine Formel für die Falldauer des Apfels an.