Höhere Analysis II

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Montag 10.05. 2010**

(1) Seien positive kompakte Operatoren S und T und $1 < q \leq 2 \leq p < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gegeben, so dass S^p und T^q Spurklasse-Operatoren sind. Zeigen Sie:

(a) $\langle S^2 e, e\rangle^{\frac{p}{2}} \leq \langle S^p e, e\rangle$, wobei $e \in \mathcal{H}$ mit $\|e\| = 1$. Hinweis: Stellen Sie S als Diagonaloperator dar und nutzen Sie, dass die Funktion $t \mapsto t^{\frac{p}{2}}$ konvex ist.

(b) Sei (e_n) eine ONB in $\mathcal{H}$ und $Tx = \sum_n \lambda_n \langle e_n, x\rangle e_n$, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\langle |ST| e_n, e_n\rangle \leq \langle |ST|^2 e_n, e_n\rangle^{\frac{1}{2}} \leq \lambda_n \langle S^p e_n, e_n\rangle^{\frac{1}{p}}.$$

Hinweis: Nutzen Sie (a) und die Cauchy-Schwarz Ungleichung.

(c) Es gilt $ST \in \mathcal{C}_1$ und

$$\operatorname{tr}(|ST|) \leq (\operatorname{tr}(S^p))^{\frac{1}{p}} (\operatorname{tr}(T^q))^{\frac{1}{q}}.$$

Hinweis: Nutzen Sie (b) und die Hölder-Ungleichung für Folgenräume.

(2) Sei $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass für $S \in \mathcal{C}_p$ und $T \in \mathcal{C}_q$ die Hölder-von Neumann Ungleichung

$$|\operatorname{tr}(ST)| \leq \|S\|_p \|T\|_q$$

gilt.

(3) Sei $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass durch $\phi_T := \operatorname{tr}(ST)$ für $T \in \mathcal{C}_p$ alle stetigen Linearformen auf $\mathcal{C}_q$ gegeben sind.
Hinweis: Nutzen Sie für die Surjektivität, dass für $\phi \in (\mathcal{C}_q)'$ die Einschränkung von ϕ auf $\mathcal{C}_2$ ebenfalls stetig ist und nutzen Sie als Testfunktionen $T = |S|^{p-1} Q U^*$, wobei $S = U|S|$ und Q eine beliebige endlichdimensionale Projektion ist, die mit $|S|$ kommutiert.

(4) Sei T ein kompakter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Die n-te Approximationszahl ist definiert durch

$$a_n(T) := \inf \|T - F\|$$

wobei das Infimum über alle F mit $\dim \mathrm{Bild}(F) < n$ gebildet wird. Zeigen Sie, dass

$$s_n(T) = a_n(T)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a_n(RTS) \leq \|R\| a_n(T) \|S\|$ für beschränkte Operatoren R, S. Ausgehend von der kanonischen Darstellung $Tx = \sum_n s_n \langle e_n, x \rangle f_n$ definiere man die Operatoren $U : \mathcal{H} \to \ell^2$, $x \mapsto (\langle e_n, x \rangle)_n$, $V : \mathcal{H} \to \ell^2$, $x \mapsto (\langle f_n, x \rangle)_n$ und $D : \ell^2 \to \ell^2$, $(\xi_n) \mapsto (s_n \xi_n)$. Dann gilt

$$a_n(T) \leq a_n(D) \leq s_n(T) \leq a_n(T).$$