Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 7 **Abgabe: Im Sekretariat, EA-Pl. 2, 5. Stock, Zi. 3505**

(1) Betrachten Sie die lineare, inhomogene DGL erster Ordnung mit variablen Koeffizienten

$$y' \quad + \quad a\,y \quad = \quad b.$$

mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Verifizieren Sie zu $y(x_0) = y_0$ die Lösungsformel des AWP, die mit $F(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)ds$ durch

$$y(x) \quad = \quad e^{-F(x)}y_0 \quad + \quad e^{-F(x)} \int_{x_0}^{x} e^{F(s)}b(s)ds \tag{1}$$

gegeben ist.

(2) Zeigen Sie für $n \times n$-Matrizen A, B, dass die Relation $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$ nicht allgemein gilt. Was ist eine hinreichende Bedingung für ihre Gültigkeit? (Bitte begründen Sie Ihre Antwort.)

(3) Beweisen Sie mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass für eine komplexe $n \times n$-Matrix A die Lösung $Y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{n \times n}$ des AWP

$$Y' \quad = \quad -A\,Y, \qquad\qquad Y(0) = \mathbb{I}$$

gegeben ist durch $Y(t) = e^{-tA}Y_0$.

(4) Betrachten Sie nun die matrixwertige lineare DGL 1. Ordnung mit variablen Koeffizienten: Zu $A : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^{m \times m}$ stetig $Y' = -AY$. Zeigen Sie (zum Beispiel anhand eines Gegenbeispiels), dass zu $G(x) := \int_{0}^{x} A(s)ds$ im allgemeinen

$$(d/dx)\exp(-G(x)) \neq A(x)\exp(-G(x)).$$

Folgern Sie daraus, dass das matrixwertige Analogon zu (1) im allgemeinen nicht gilt.