Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe 2.12.2010**

(1) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Zahlenfolge. Man zeige:

(a) Wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.

(b) Wenn $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(x_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, dann konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(2) Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und x eine reelle Zahl. Weiterhin seien folgende Aussagen gegeben:

(i)	$\forall k \in \mathbb{N}$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < \frac{1}{k}$,
(ii)	$\forall q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < q^2$,
(iii)	$\forall \varepsilon > 0$	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert \leq \varepsilon$,
(iv)	$\exists n_0 \in \mathbb{N}$	$\forall \varepsilon > 0$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon$,
(v)	$\forall n_0 \in \mathbb{N}$	$\exists\, \varepsilon > 0$	$\forall n \geq n_0$	$\lvert x_n - x\rvert < \varepsilon$.

(a) Schreiben Sie die Aussagen (i)-(v) als vollständige Sätze ohne Verwendung von Quantoren.

(b) Untersuchen Sie, ob die Aussagen (i)-(v) jeweils dazu äquivalent sind, dass die Folge (x_n) gegen die reelle Zahl x konvergiert.

(3) Man beweise mit Hilfe der Grenzwertdefinition folgende Aussagen:

(a) $\frac{(n+1)^2-n^2}{n} \to 2$,

(b) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \to 0$,

(c) $\frac{n}{2^n} \to 0$

(d) $\frac{1+2^3+\ldots+n^3}{n^4} \to \frac{1}{4}$.

Hinweis: Beginnen Sie Ihre Beweise mit "Sei $\varepsilon > 0$. ". In (d) zeige man zunächst, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

b.w.

(4) Untersuchen Sie mit Hilfe der Rechenregeln für konvergente Folgen die angegebenen Folgen reeller Zahlen auf Konvergenz bzw. Divergenz:

$$(a) \quad \frac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}, \qquad (b) \quad \frac{(-1)^n n^2}{2n^2+5}, \qquad (c) \quad \frac{3n^2+n}{n^3+n-1}.$$

Zusatzaufgabe: Finden Sie eine Folge (q_n) in $\mathbb{R}$, die jede rationale Zahl als Häufungspunkt hat. Können Sie die Folge (q_n) so wählen, daß $\sqrt{2}$ kein Häufungspunkt ist?