Analysis II

Sommersemester 2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Donnerstag 05.06.2011**

(1) Sei (X, d) ein metrischer Raum. Sei $e : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}, e(x,y) = d(x,y)/(1 + d(x,y))$. Zeigen Sie:

(a) Es ist e eine Metrik.

(b) Zu beliebigen $r > 0$ existieren ρ, $\sigma > 0$ mit

$$U_\rho^e(x) \subset U_r^d(x), \qquad U_\sigma^d(x) \subset U_r^e(x)$$

für alle $x \in X$.

(c) Eine Folge ist eine Cauchy Folge bzgl. e genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge bzgl. d ist.

(2) Betrachten Sie den metrischen Raum $(\mathbb{R}^N, d_D)$ mit der diskreten Metrik

$$d_D : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \{0,1\},\ d_D(x,y) := \begin{cases} 0, \text{ falls } x = y \\ 1, \text{ falls } x \neq y. \end{cases}$$

(a) Charakterisieren Sie alle bezüglich d_D konvergenten Folgen.

(b) Sei $N = 2$. Zeichnen Sie die offene und abgeschlossene Kugel um 0 jeweils mit Radius $1/2$ und Radius 1.

(3) Sei M eine endliche Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. Zeigen Sie, dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Cd_1(x,y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

(4) Sei $\mathcal{L}$ der Vektorraum aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$ und $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass durch

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_* : \|x\|_* \leq 1\}$$

eine Norm auf $\mathcal{L}$ definiert wird und

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$$

für alle $A, B \in \mathcal{L}$ gilt.

Zusatzaufgaben

(1) Zeigen Sie, dass der in der Vorlesung besprochene normierte Raum $\ell^2(\mathbb{N})$ vollständig ist.

Anleitung: Sei $(u_n) \in \ell^2(\mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge. Zeigen Sie der Reihe nach:

- u_n konvergiert punktweise gegen eine Folge u, d.h. für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt $u_n(m) \to u(m)$.
- Es existiert $c > 0$, so dass für alle $N \in \mathbb{N}$

$$\|(u)_N\|_2 \leq c,$$

  wobei $(u)_N = (u(1), u(2), \ldots, u(N), 0, \ldots)$ für $u = (u(1), u(2), \ldots)$ definiert ist.
- $u \in \ell^2(\mathbb{N})$.
- $\|(u - u_n)_N\| \to 0$ gleichmäßig in N.

Viel Erfolg!