Gewoehnliche Differentialgleichungen - Notizen[1]

Jena - Sommersemester 2012

Daniel Lenz

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Einfuehrung

In diesem Kapitel diskutieren wir einige Situationen, in denen gewoehnliche Differentialgleichungen auftreten.

Klassische Mechanik

Typische Frage. Wie bewegt sich die Erde um die Sonne?

Allgemeiner ist die Bewegung eines oder mehrere Massepunkte ein zentrales Thema der klassischen Mechanik. Fuer einen solchen Punkt mit von der Zeit t abhaengiger Ortkoordinate x lautet die Newtonsche Gleichung

$$(N) \quad x^{''} = F(x),$$

wobei F das Kraftfeld beschreibt. Das ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung (da die zweite Ableitung die hoechste auftretende Ableitung ist). Der Zustand des Systems kann beschrieben werden durch den Vektor $(x,p) = (x(t), p(t))$ mit dem Impuls $p = mx^{'}$. Die Newtonsche Gleichung und der Anfangszustand $(x(t_0), p(t_0))$ legen dann die gesamte Bewegung des Systems fest: Tatsaechlich ist naemlich die Newtonsche Gleichung (N) aequivalent zur Differentialgleichung erster Ordnung

$$(x,p)^{'} = (\frac{p}{m}, F(x)) =: V(x,p)$$

und solche Gleichungen sind (unter geeigeneten Voraussetzungen an V) eindeutig loesbar. Allgemein heisst in einer Gleichung der Form

$$y^{'} = V(y)$$

die Funktion V das Vektorfeld. Ein Wert y_G mit $V(y_G) = 0$ heisst Gleichgewicht. Fuer einen solchen Punkt ist (offenbar) $y \equiv y_G$ eine Loesung.

Populationsentwicklung

Typische Frage: Wie entwickelt sich eine Population bzw. mehrere interagierende Populationen?

Beispiel - Normale Vermehrung. $p^{'} = ap =: V(p)$ mit $a > 0$ bzw. $a < 0$.

Beispiel - Vermehrung unter (interner) Konkurenz. $p^{'} = a(1 - \frac{p}{p_0})p$.

Raeuber-Beute Modell. Es sind zwei Populationen p, q gegeben, wobei p sich von q ernaehrt (und sonst ausstirbt) und q sich (ohne den Einfluss von p) normal vermehren wuerde:

$$q^{'} = kq - aqp = aq\left(\frac{k}{a} - p\right), \quad p^{'} = -lp + bqp = bp\left(-\frac{l}{b} + q\right)$$

mit $k, a, l, b > 0$, d.h.

$$(q,p)' = V(q,p)$$

mit

$$V(q,p) = (aq(a/k - p), bp(-l/b + q)).$$

Offenbar ist

$$(q_G, p_G) = (\frac{l}{b}, \frac{k}{a})$$

ein Gleichgewichtspunkt.

Variationsrechnung.

Typische Fragen.

- Kuerzeste Verbindung zwischen zwei Punkten in der Ebene, auf der Kugel,...
- 'Schnellste Rutschbahn' zwischen zwei Punkten.

Allgemeiner geht es um die Extrema einer Funktion, die auf einer Menge von Kurven definiert ist. Die notwendige Bedingung fuer ein solches Extremum ist das Verschwinden der Variationsableitung und das fuehrt auf die Euler - Lagrangeschen Differentialgleichungen.

Ziele und Themen

Aus der bisherigen Diskussion ergeben sich die Ziele und Themen der Vorlesung wie folgt.

Klassische Theorie.

- Elementare Beispiele und Phaenomene.
- Existenz von Loesungen.
- Eindeutigkeit von Loesungen.
- Stetige Abhaengigkeit von den gegebenen Groessen.

Qualitative Theorie.

- Eigenschaften von Loesungen.

Ein wichtiges Hilfsmittel dazu ist die Theorie der Fluesse / dynamischen Systeme.

KAPITEL 1

Grundlegendes ueber gewoehnliche Differentialgleichungen

Eine gewoehnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung ist eine Gleichung der Form

$$F(x, y, y^{'}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

mit $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ mit

$$\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m = R^{1+m(n+1)}$$

(wobei F tatsaechlich von $y^{(n)}$ abhaengen soll). Hier eine Erklaerung zu den einzelnen Begriffen:

- Es handelt sich um eine Gleichung fuer die $\mathbb{R}^m$-wertige Funktion $y = y(x)$
- *Gewoehnlich*: Freie Variable x laeuft in $\mathbb{R}$; es kommen keine partiellen Ableitungen von y vor.
- *n-ter Ordnung*: Die hoechste auftretende Ableitung von y ist die n-te.

Kann man die Gleichung in der Form

$$y^{(n)} = f(x, y, y^{'}, \cdots, y^{(n-1)})$$

schreiben mit $f : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und $\Omega^* \subset \mathbb{R}^{1+mn}$, so spricht man von einer *expliziten Differentialgleichung* und andernfalls von einer *impliziten Differentialgleichung*. Es heisst dann f die *rechte Seite* der Differentialgleichung. Wir werden es meist mit expliziten Differentialgleichungen zu tun haben, da man im allgemeinen implizite Differentialgleichungen nicht loesen kann (e.g. $F(x, y, y^{'}) = x^2 + |y^{'}|^2 + 1 ...$)

Ein *Anfangswertproblem* (AWP) besteht aus einer Differentialgleichung

$$0 = F(x, y^{'}, \ldots, y^{(n)})$$

zusammen mit einer *Anfangsbedingung*

$$y(x_0) = y_0, y^{'}(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)} = y_{n-1}.$$

Wir kommen nun zum entscheidenden Begriff.

Definition. *(Loesung) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m(n+1)}$ und $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ gegeben.*
(a) Ein Paar (I, φ) bestehend aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ (mit nichtleerem Inneren) und einer Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ heisst Loesung der Differentialgleichung

$$0 = F(x, y, y^{'} ....),$$

wenn gilt

- *φ ist n-mal stetig differenzierbar.*

- $(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$ *fuer alle* $x \in I$.
- $F(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{(n)}) = 0$ *fuer alle* $x \in I$.

(Hier dienen die ersten beiden Punkte dazu, dass die Aussage im dritten Punkt formuliert werden kann.)

(b) Sei nun zusaetzlich $(x_0, y_0, \ldots, y_{n-1})$ *gegeben. Dann ist eine Loesung des (AWP)*

$$0 = F(x, y, y', \ldots),$$

$$(y(x_0), y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}),$$

gegeben durch eine Loesung (I, φ) *der Differentialgleichung mit*

$$(\varphi(x_0), \varphi'(x_0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0)) = (y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}).$$

(c) Die Gesamtheit aller Loesungen bezeichnen wir als Loesungsschar.

Bemerkung.

- Fuer $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert man

  $$\varphi'(x) := \lim_{z \to x, z \neq x, z \in I} \frac{1}{z - x}(\varphi(z) - \varphi(x))$$

  (falls der Grenzwert existiert). Dieser Grenwert existiert genau dann, wenn jede Komponente von φ in t differenzierbar ist (Uebung).
- Oft werden Loesungen auch mit $x(t)$ oder $y(x)$ bezeichnet!

Notation. Im folgenden schreiben wir manchmal auch $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ oder nur φ statt (φ, I).

Ende der Vorlesung

Fuer die Entwicklung der Theorie grundlegend ist die Erkenntnis, dass es aus abstrakter Sicht genuegt, gewoehnlische Differentialgleichungen erster Ordnung zu betrachten. Das werden wir als naechstes diskutieren:

Zur Behandlung von

$$0 = F(x, y, \ldots, y^{(n)})$$

- fuehren wir zunaechst neue Variablen ein

  $$(y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = (\eta_0, \ldots, \eta_{(n-1)}) =: \widetilde{y}$$

- schreiben dann das System in diesen neuen Variablen als $0 = \widetilde{F}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')$ mit geeignet modifizierter Funktion $\widetilde{F}$
- und Ergaenzen das Ursprungssystem um Gleichungen fuer die neuen Variablen gemaess

  $$\eta_0' = \eta_1, \eta_1' = \eta_2, \ldots, \eta_{n-2}' = \eta_{n-1}.$$

Bei diesem Verfahren wird die Ordnung der Differentialgleichung verringert und gleichzeitig wird dafuer die Dimension des Zielraumes der Loesung y erhoeht. (Vgl. Bemerkungen zur klassischen Mechanik und dem Impuls $p = mx'$ in der Einfuehrung.) Hier sind die Details.

THEOREM. *(Reduktion auf Systeme erster Ordnung) Jede gewoehnliche Differentialgleichung ist aequivalent zu einer gewoehnlichen Differentialgleichung erster Ordnung im Sinne, dass folgendes gilt:*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{1+m(n+1)}$ und $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ gegeben. Sei dann
$\widetilde{\Omega} := \{(x, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{1+nm+nm} : (x, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}, \xi_n) \in \Omega\}$
und

$$\widetilde{F} : \widetilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^{(n-1)m+p}$$

$\widetilde{F}(x, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}, \xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1 - \eta_1, \xi_2 - \eta_2, \ldots, \xi_{n-1} - \eta_{n-1}, F(x, \eta_0, \ldots, \eta_{n-1}, \xi_n).$
(a) Ist (I, φ) eine Loesung von $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, so ist $(I, (\varphi, \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)})$ eine Loesung von $\widetilde{F}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') = 0$.
(b) Ist (I, ψ) mit $\psi = (\psi_0, \ldots, \psi_{n-1})$ eine Loesung von $\widetilde{F}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') = 0$, so ist (I, ψ_0) eine Loesung von $0 = F(x, y, \ldots, y^{(n)})$.
Entsprechendes gilt fuer Anfangswertprobleme.

Beweis. Das folgt direkt durch Einsetzen:
(a) Mit

$$\widetilde{y} = (\varphi, \ldots, \varphi^{(n-1)})(= (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}))$$

und

$$\widetilde{y}' = (\varphi', \ldots, \varphi^{(n)})(= (\xi_1, \ldots, \xi_n))$$

gilt nach Einsetzen in $\widetilde{F}$ in der Tat

$$\widetilde{F}(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}') = (\varphi' - \varphi', \ldots, \varphi^{(n-1)} - \varphi^{(n-1)}, F(x, \varphi, \ldots, \varphi^{(n-1)}, \varphi^{(n)}) = 0,$$

wobei zum Ausrechnen der letzten Komponente von F genutzt wird, dass φ die Differentialgleichung erfuellt.

(b) Mit

$$\widetilde{y} = (\psi_0, \ldots, \psi_{n-1})(= (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1}))$$

und

$$\widetilde{y}' = (\psi_0', \ldots, \psi_{n-1}')(= (\xi_1, \ldots, \xi_n))$$

gilt nach Einsetzen in $0 = \widetilde{F}$ in der Tat

$$0 = \widetilde{F}(x, \psi, \psi') = (\psi_0' - \psi_1, \ldots, \psi_{(n-2)}' - \psi_{n-1}, F(x, \psi_0, \ldots, \psi_{n-1}, \psi_{n-1}').$$

Damit folgt aus Betrachtung der ersten Komponenten (durch Induktion)

$$\psi_1 = \psi_0', \psi_2 = \psi_1' = \psi_0'', \ldots, \psi_{n-1}' = \psi_0^{(n-1)}.$$

Einsetzen in die letzte Komponenten liefert dann

$$0 = F(x, \psi_0, \psi_0', \ldots, \psi_0^{(n)}).$$

Das zeigt, dass ψ_0 die Differentialgleichung erfuellt.

Die Aussage fuer die Anfangswerte folgt entsprechend. □

FOLGERUNG. *Die explizite gewoehnliche Differentialgleichung*

$$y^{(n)} = f(x, y, \ldots, y^{(n-1)})$$

ist aequivalent zur gewoehnlichen Differentialgleichung

$$Y' = (Y_1, \ldots, Y_{n-1}, f(x, Y)$$

mit $Y = (Y_0, \ldots, Y_{n-1})$. Entsprechendes gilt fuer Anfangswertprobleme.

Gute Uebung. Direkter Beweis der Folgerung.

Im folgenden werden wir (meist) Differentialgleichungen der Form

$$y' = f(x,y)$$

untersuchen. Dazu lernen wir jetzt noch einige Begriffe kennen.

DEFINITION. *(Richtungsfeld) Sei eine gewoehnliche Differentialgleichung der Form*

$$y' = f(x,y)$$

mit

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

gegeben. Dann heisst die Funktion

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m, \ \ (x,y) \mapsto (1, f(x,y)),$$

das Richtungsfeld der Differentialgleichung. Zeichnung.

Bemerkung.

- Diese Terminologie ist nicht komplett standardisiert. Auf jeden Fall wird sie fuer $\Omega \subset \mathbb{R}$ oft angewendet.
- Wenn es darum geht, das Richtungsfeld zu zeichnen, wird meist eine normierte Version gezeichnet d.h. die Vektoren $(1, f(x,y))$ werden alle auf die gleiche Laenge skaliert.

DEFINITION. *(Autonome Differentialgleichungen und Vektorfeld) Haengt bei der gewoehnlichen Differentialgleichung der Form $y' = f(x,y)$ mit*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

die Funktion f nicht von x ab, d.h. gilt $f(x,y) = g(y)$ mit

$$g : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

und

$$\Omega = \mathbb{R} \times \Sigma,$$

so spricht man von einer autonomen Differentialgleichung und schreibt

$$y' = g(y).$$

In diesem Fall bezeichnet man g als das Vektorfeld der Differentialgleichung. Zeichnung.

Bemerkung. Autonome Differentialgleichungen spielen eine grosse Rolle als Naturgesetze (zeitunabhaengig!).

PROPOSITION. *Ist $y' = g(y)$ eine autonome Differentialgleichung, so ist mit jeder Loesung (I, φ) auch $(a + I, \varphi_a)$ mit $\varphi_a(x) = \varphi(x-a)$ eine Loesung der Differentialgleichung*

Beweis. Einsetzen liefert

$$\varphi_a'(x) = \varphi'(x-a) = f(\varphi(x-a)) = f(\varphi_a(x)).$$

$\square$

Bemerkungen.

- Bei einer nichtautonomen Differentialgleichung liefert die entsprechende Rechnung $\varphi_a'(x) = f(x - a, \varphi_a(x))$.
- Es ist ein allgemeines Phaenomen, dass Symmetrien der Differentialgleichung (hier Invarianz unter Verschiebungen in der x-Koordinate) zu Symmetrien der Loesungen fuehren.

KAPITEL 2

Beispiele und einfache Phaenomene

In diesem Kapitel behandeln wir einige Klassen von Beispielen und lernen grundlegende Phaenomene kennen. Dazu betrachten wir die zu

$$f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

gehoerende Differentialgleichung

$$y^{'} = f(x, y)$$

bzw. ein entsprechendes Anfangswertproblem. Gesucht ist jeweils eine Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi^{'}(x) = f(x, \varphi(x))$ auf I. Wir werden verschiedene Einschraenkungen an f machen.

1. Ein einfaches Beispiel und die Stetigkeit der rechten Seite

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Fall, dass f nur von x abhaengt und nicht von y.

Einfachstes Beispiel. Sei $y^{(')} = f(x)$. Ist f stetig, so laesst sich dies durch einfaches Integrieren loesen.

Bemerkung. Entsprechend lassen sich natuerlich auch Diffrentialgleichungen hoeherer Ordnung behandeln. So führt etwa $x^{''} = (0, 0, g)$ auf $x = x_0 + tv + \frac{1}{2}t^2(0, 0, g)$ mit geeigneten x_0, v.

Ist f nicht stetig, so laesst sich die Gleichung im Allgemeinen nicht loesen. Das werden wir nun an zwei Beispielen diskutieren:

Beispiel. $y^{'} = 1_{\{0\}}(x)$. Sei φ eine Loesung auf einem Intervall um 0. Dann ist nach dem Mittelwertsatz φ konstant fuer $x < 0$ und fuer $x > 0$. Wegen der Stetigkeit von φ (tatsaechlich ist ja φ sogar differenzierbar) ist dann φ konstant und damit erfuellt es nicht mehr die Differentialgleichung in $x = 0$.

Beispiel. $y^{'} = 1_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$. Es gibt keine Loesung. (Bew. 'Mittelwertsatz' fuer Ableitungen... oder einfach direkt mit ueblichem Mittelwertsatz schliessen, dass jede Loesung lokal entweder konstant ist oder Steigung eins hat....)

Um diese Probleme zu vermeiden, werden wir immer die Stetigkeit der rechten Seite voraussetzen.

2. Autonome Differentialgleichungen auf der reellen Achse

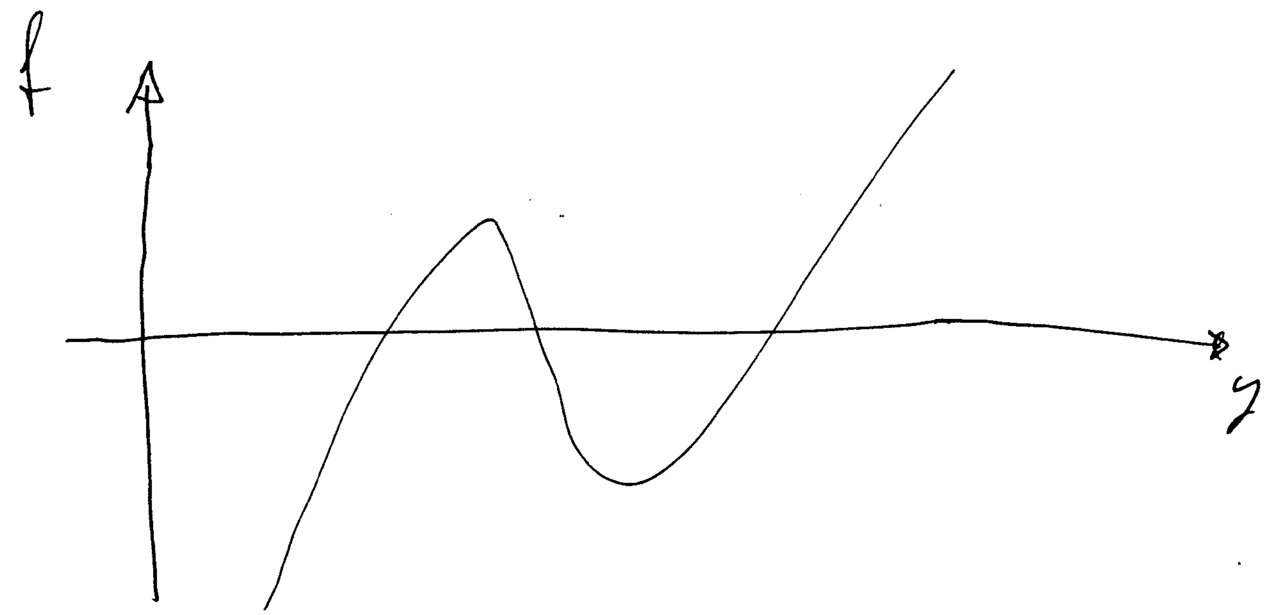
In diesem Abschnitt betrachten wir den Fall, dass f nur von y abhaengt. Es geht also um folgende Situation: Sei $J := \Omega \subset \mathbb{R}$ offen und $f : \Omega \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$y^{'} = f(y)$$

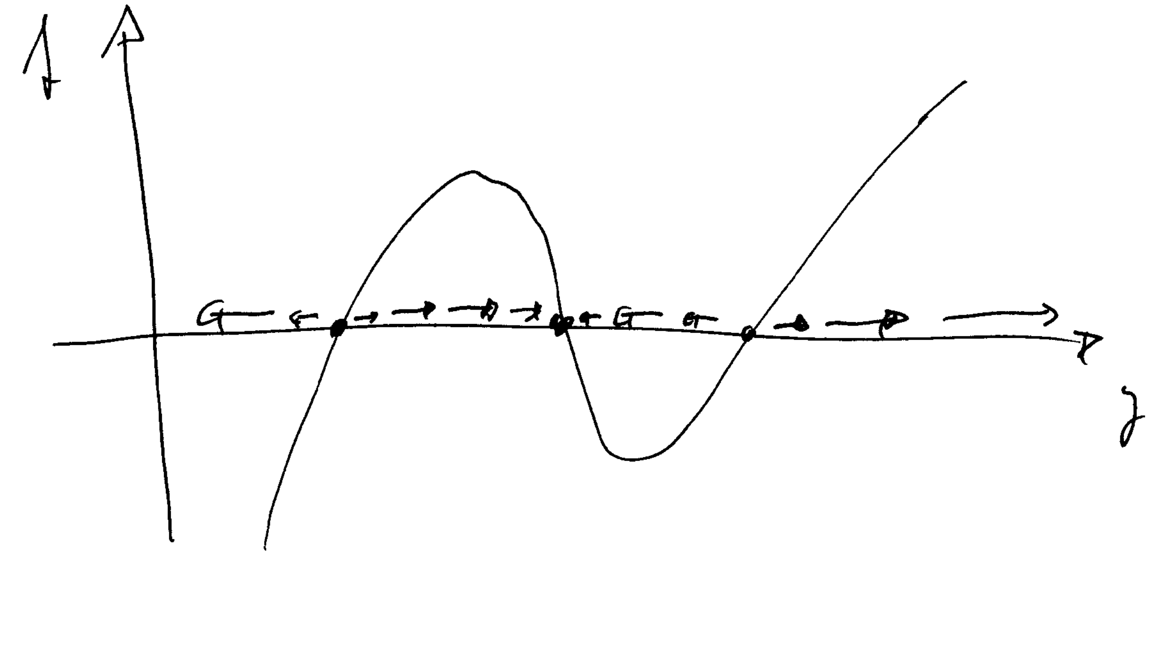
und geben gegebenenfalls noch einen Anfangswert $y(x_0) = y_0$ vor.

Zeichnung.

Funktion



Vektorfeld (u. Funktion)



Die Zeichnung suggeriert, dass eine Loesung existiert, eindeutig ist und bis zum Gleichgewichtspunkt wandert.

Formal (d.h. unter Annahme der Existenz einer Loesung sowie gewisser weiterer Eigenschaften) laesst sich das auf folgende Art loesen: Sei (φ, I) eine Loesung mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $f(y_0) \neq 0$. Dann gilt fuer x nahe x_0 also

$$f(\varphi(x)) \neq 0$$

und damit nach der Differentialgleichung

$$\frac{\varphi'(x)}{f(\varphi(x))} = 1,$$

also

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(t)}{f(\varphi(t)} dt = \int_{x_0}^{x} 1 dt$$

also

$$F(\varphi(x)) - F(\varphi(x_0)) = x - x_0$$

mit einer Stammfunktion F von $\frac{1}{f}$. Aufloesen nach φ (falls moeglich) liefert dann

$$\varphi(x) = F^{-1}(x - x_0 + F(\varphi(x_0)).$$

Bei diesen Betrachtungen haben wir vorausgesetzt, dass eine Loesung existiert und Aufloesen moeglich ist. Wenn man so vorgeht muss man also auf jeden Fall die Probe machen. Tatsaechlich ist unser Vorgehen gerechtfertigt, wie folgender Satz zeigt.

Ende der Vorlesung

Wir beginnen mit einer Vorueberlegung, die nichts mit Differentialgleichungen zu tun hat, sondern nur mit monotonen Funktionen.

Lemma. *Sei $J \subset \mathbb{R}$ offen und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $y_0 \in J$ mit $f(y_0) \neq 0$ gegeben. Sei (y_-, y_+) das groesste Teilinterval von J um y_0, auf dem f nicht verschwindet. Sei*

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow \mathbb{R}, \;\; F(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)} ds.$$

Dann ist F streng monoton, es existieren

$$x_+ := \lim_{y \to y_+} F(y), \;\; x_- := \lim_{y \to y_-} F(y),$$

(wobei die Werte $\pm\infty$ möglich sind), und

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow (x_-, x_+)$$

ist bijektiv und stetig differenzierbar (mit Ableitung $1/f$) und seine Inverse ist ebenfalls stetig differenzierbar.

Bemerkung. Ist J ein offenes Interval in $\mathbb{R}$ und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(y_0) = 0$, so ist das groesste Teilinterval um y_0, auf dem f nicht verschwindet, notwenigerweise offen.

Notation. In obigem Lemma (und im weiteren Text) schreiben wir (a, b) fuer das offene Intervall der Punkte in $\mathbb{R}$, die zwischen a und b liegen. Es gilt also $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ falls $a < b$ und $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : b < x < a\}$ falls $b < a$.

Beweis. Auf (y_-, y_+) verschwindet f nirgends. Daher aendert es sein Vorzeichen dort nicht. Daher ist F streng monoton. Damit existieren die Grenzwerte x_- und x_+ und

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow (x_-, x_+)$$

ist bijektiv, stetig differenzierbar mit Ableitung

$$F^{'} = \frac{1}{f}.$$

Damit folgt die Aussage. □

Theorem. *(Autonome Differentialgleichungen in einer Dimension) Sei $J \subset \mathbb{R}$ offen und $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $y_0 \in J$ mit $f(y_0) \neq 0$ gegeben. Sei (y_-, y_+) das groeßte Teilintervall von J um y_0, auf dem f nicht verschwindet (das ist notwendig offen!). Sei*

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow (x_-, x_+), \;\; F(y) := \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)} ds$$

die im vorigen Lemma studierte bijektive, streng monotone stetig differenzierbare Funktion mit Ableitung $1/f$. Dann ist

$$\varphi : (x_0 + x_-, x_0 + x_+) \longrightarrow (y_-, y_+), \;\; \varphi(x) := F^{-1}(x - x_0)$$

eine Loesung des Anfangswertproblems

$$y^{'} = f(y), y(x_0) = y_0,$$

und es gilt

$$\lim_{x \to x_0 + x_+} \varphi(x) = y_+, \;\; \lim_{x \to x_0 + x_-} \varphi(x) = y_-.$$

Ist (I, ψ) eine weitere Loesung des Anfangswertproblems, so stimmt sie auf $I \cap (x_0 + x_-, x_0 + x_+)$ mit φ ueberein. Statt mit F kann man auch mit einer beliebigen Stammfunktion $\widetilde{F}$ von $1/f$ rechnen und dann $\varphi(x) = \widetilde{F}^{-1}(x - x_0 + \widetilde{F}(y_0))$ betrachten.

Bemerkung. Der Satz liefert eine rigorose Bestaetigung, dafuer dass die Loesung existiert und (soweit es welche gibt) zu den Gleichgewichtspunkten 'fliesst'. Der Satz klaert nicht, ob die Loesung solche Gleichgewichtspunkte in endlicher Zeit erreicht.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei $x_0 = 0$ (autonomes System). Damit ist dann

$$\varphi := F^{-1} : (x_-, x_+) \longrightarrow (y_-, y_+)$$

eine streng monotone stetig differenzierbare Funktion mit

$$\varphi^{'}(x) = \frac{1}{F^{'}(\varphi(x))} = f(\varphi(x)) \;\text{ und }\; \varphi(0) = F^{-1}(0) = y_0 \;\text{ (da } F(y_0) = 0).$$

Es loest also φ das AWP. Weiterhin gelten aufgrund der Monotonie von F noch die Aussagen ueber die Grenzwerte von φ bei y_- und y_+.

Ist $\widetilde{F}$ eine weitere Stammfunktion von $1/f$, so gilt $F = \widetilde{F} - \widetilde{F}(y_0)$. Damit folgen die Aussagen ueber $\widetilde{F}$ leicht. (Denn es fuehrt

$$x - x_0 = F(\varphi(x)) = \widetilde{F}(\varphi(x)) - \widetilde{F}(y_0),$$

direkt auf

$$\widetilde{F}(\varphi(x)) = x - x_0 + \widetilde{F}(y_0)$$

und damit ergibt sich

$$\varphi(x) = \widetilde{F}^{-1}(x - x_0 + \widetilde{F}(y_0)).$$

Es bleibt die Aussage ueber die Eindeutigkeit zu zeigen. Dies ergibt sich im wesentlichen als Konsequenz der oben durchgefuehrten formalen Rechnung: Sei (I, ψ) eine weitere Loesung des AWP. Dann gilt (fuer x nahe x_0) also (vgl. Formale Loesung)

$$\frac{\psi'(x)}{f(\psi(x)} = 1.$$

Das liefert nach Integration

$$F(\psi(x)) - F(y_0) = x - x_0.$$

Da F invertierbar ist folgt (mit $F(y_0) = 0$ und $x_0 = 0$)

$$\psi = F^{-1}(x - x_0 + F(y_0)) = \varphi.$$

Die Loesung eines AWP ist also lokal eindeutig. Damit ist sie aber auch global eindeutig nach einem ganz allgemeinen Schluss: Sei ohne Einschraenkung I das maximale Interval auf dem beiden Loesungen existieren. Sei U das maximale Intervall auf dem die Loesungen uebereinstimmen. Angenommen: $U \neq I$. Dann ist (ohne Einschraenkung) der rechte Randpunkt d von U kleiner als der rechte Randpunkt von I. (Zeichnung) Aufgrund der Stetigkeit stimmen die Loesungen noch in d ueberein. Aufgrund der lokalen Eindeutigkeit (angewendet mit dem Startpunkt d) stimmen die Loesungen dann noch etwas rechts von d ueberein. Das ist ein Widerspruch zur Maximalitaet von U. □

Aus dem Satz ergeben sich leicht zwei Varianten, wie man konkret Loesungen von $y' = f(y)$ finden kann.

Variante 1. Der Satz besagt, dass das folgende oft praktizierten Verfahren immer lokal, d.h. in einer Umgebung von x_0 gerechtfertigt ist (und tatsaechlich korrekt ist, solange man sich auf Bereiche von Loesungen y mit nichtverschwindendem f beschraenkt):

- Aufstellen der Gleichung gemaess
$$\frac{dy}{dx} = f(y) \Longrightarrow dx = \frac{dy}{f(y)} \Longrightarrow x = F(y) + C$$
mit Stammfunktion F von $1/f$ und C geeignet. (Das ist gerade die im Satz genannte Wahl einer Stammfunktion)
- Bestimmen von C aus dem Anfangswert gemaess $x_0 = F(y_0) + C$. (Das ist gerade das im Satz genannte 'Verschieben' um $\widetilde{F}(y_0)$).
- Aufloesen nach y (Das ist gerade das im Satz genannte Umkehren von F.)

Variante 2. Die maximale vom Satz gegebenen Loesung einschliesslich des korrekten Anfangswertes und eine spezielle Stammfunktion F mit $F(y_0) = 0$ findet man man mit folgendem Algorithmus, bei dem automatisch die richtigen Anfangsbedingungen erfuellt sind:

- Bestimmen des maximalen Intervalles (y_-, y_+) um y_0, auf dem f nicht verschwindet und Berechnen von $F(y) = \int_{y_0}^{y} 1/f(s)ds$.
- Bestimmen von (x_-, x_+) als Grenzwert. (Das liefert das Intervall auf dem die Loesung definiert ist.)
- Aufloesen von $(x - x_0) = F(y) - F(y_0)$ nach y.

Wir wenden uns nun noch kurz der Frage zu, ob die Gleichgewichtspunkte fuer endliche x erreicht werden, d.h. ob x_+, x_- endlich sind (falls $f(y_{pm}) = 0$ gilt).

FOLGERUNG. *(Erreichen des Gleichgewichts in endlicher Zeit) Sei die Situation wie im Satz und $f(y_+) = 0$ bzw. $f(y_-) = 0$. Dann gilt*

$$x_+ \in \mathbb{R} \textit{ bzw. } x_- \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow \frac{1}{f} \textit{ ist bei } y_+ \textit{ bzw. } y_- \textit{ uneigentlich Riemann intbar.}$$

Beweis. Es gilt nach dem Satz

$$x_\pm = \lim_{y \to y_\pm} F(y) = \lim_{y \to y_\pm} \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)} ds.$$

Das liefert sofort die Aussage. □

FOLGERUNG. *Situation wie in der Folgerung. Dann kann ein Gleichgewichtspunkt y_G mit $|f(y) - f(y_G)| \leq C|y - y_G|$ fuer y nahe y_G nicht in endlicher Zeit erreicht werden. Insbesondere koennen Gleichtgewichtspunkte, in denen f stetig differenzierbar ist nicht in endlicher Zeit erreicht werden.*

Beweis. Ohne Einschraenkung $y_G = 0$ und $y_0 < 0$ und $f > 0$ zwischen y_0 und y_G. Wegen $f(y_G) = 0$ gilt

$$\int_{y_0}^{y_G} \frac{1}{f(s)} ds \geq \int_{y_0}^{y_G} \frac{1}{C|s|} ds = \infty.$$

□

Bemerkung. Das Erreichen des Gleichgewicht in endlicher Zeit haengt auch mit der Eindeutigkeit der Gleichung zusammen: Nach dem Satz sind die Anfangswertproblem eindeutig loesbar, wenn das Gleichgewicht nicht in endlicher Zeit erreicht wird. Wird umgekehrt das Gleichgewicht in endlicher Zeit erreicht, so sind nicht alle Anfangswertproblem eindeutig loesbar (Skizze). Das bedeutet auch, dass die Bedingung

$$|f(y) - f(y_G)| \leq C|y - y_G|$$

die Eindeutigkeit der Loesung garantiert!

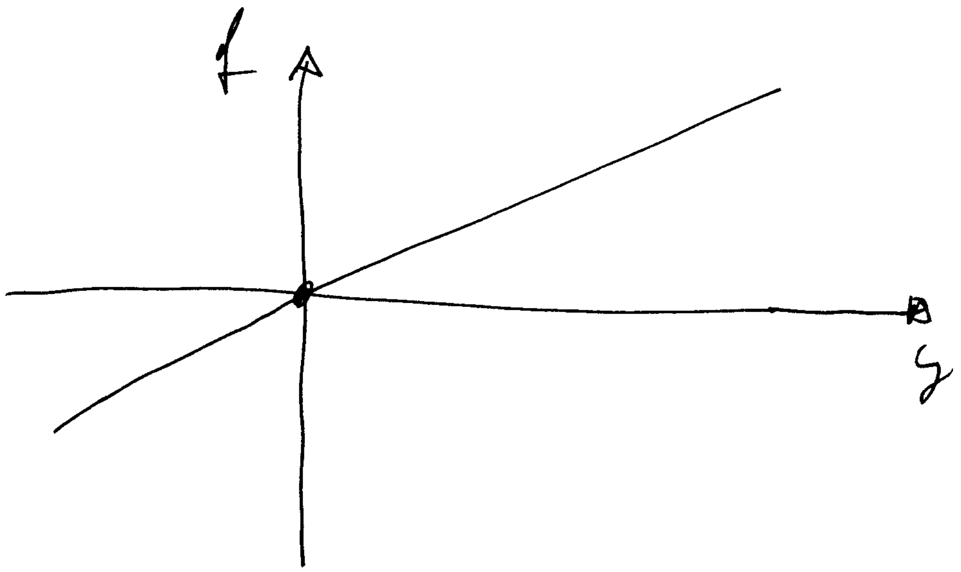
Ende der Vorlesung.

Damit koennen wir nun einige Beispiele diskutieren (die wir zum Teil schon kennen).

Normale Vermehrung. $y' = ay = f(y)$, $y(x_0) = y_0$ mit $a \neq 0$.

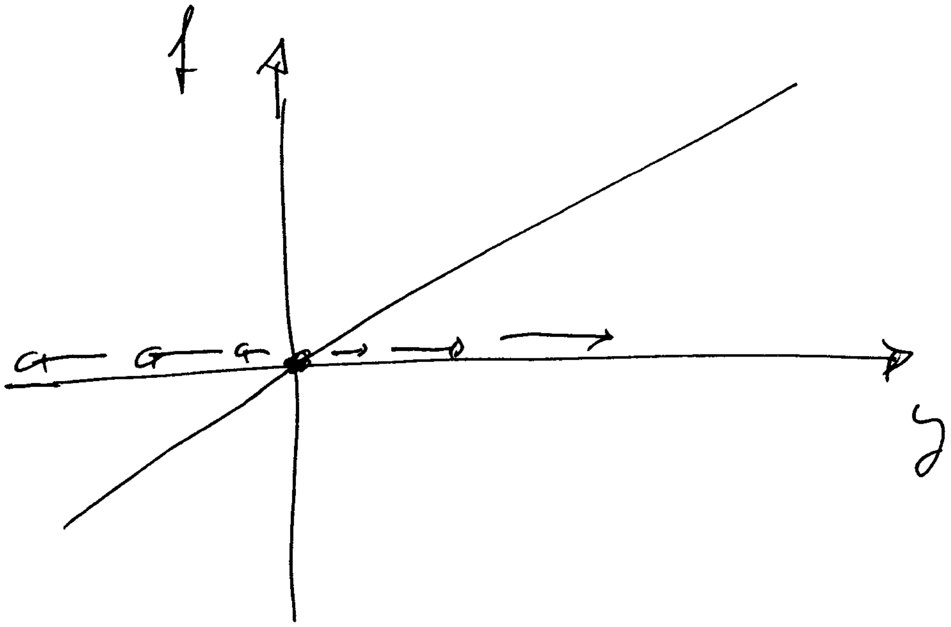
Funktion

$f(y) = a y$



$a > 0$

Vektorfeld (und Funktion)



Wir unterscheiden drei Faelle:
Es gilt $y_0 > 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (0, \infty)$$
$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)} ds = \frac{1}{a} \ln(\frac{y}{y_0}),$$

$(x_-, x_+) = (-\infty, +\infty)$ d.h. Loesung existiert und ist eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$. Aufloesen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{y_0}$$

liefert

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Es gilt $y_0 < 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (-\infty, 0)$$
$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(s)} ds = \frac{1}{a} \ln(\frac{y}{y_0}),$$

$(x_-, x_+) = (-\infty, +\infty)$ d.h. Loesung existiert und ist eindeutig auf ganz $\mathbb{R}$. Aufloesen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{y_0}$$

liefert

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

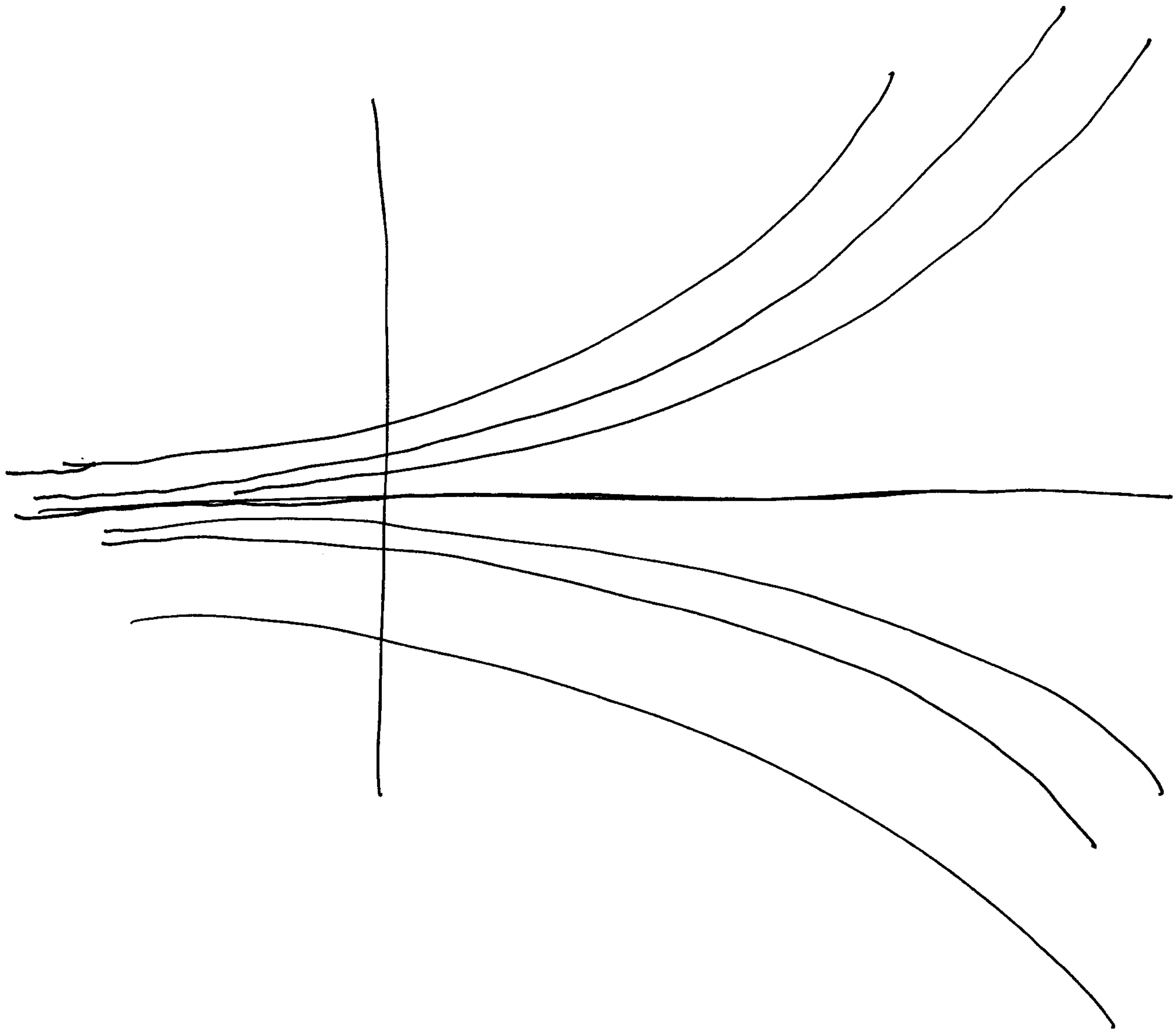
Es gilt $y_0 = 0$. Dann ist $y \equiv 0 = y_0 e^{a(x-x_0)}$ eine Loesung. Nach dem bisher betrachteten ist es sogar die einzige Loesung (da die anderen Loesungen nicht in Null 'einmuenden').

Zusammenfassung: Das Anfangswertproblem $y' = ay, y(x_0) = y_0$ hat die eindeutige auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Loesung

$$y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}.$$

Insbesondere wird der Gleichgewichtspunkt nicht in endlicher Zeit erreicht und die Loesung explodiert nicht in endlicher Zeit.

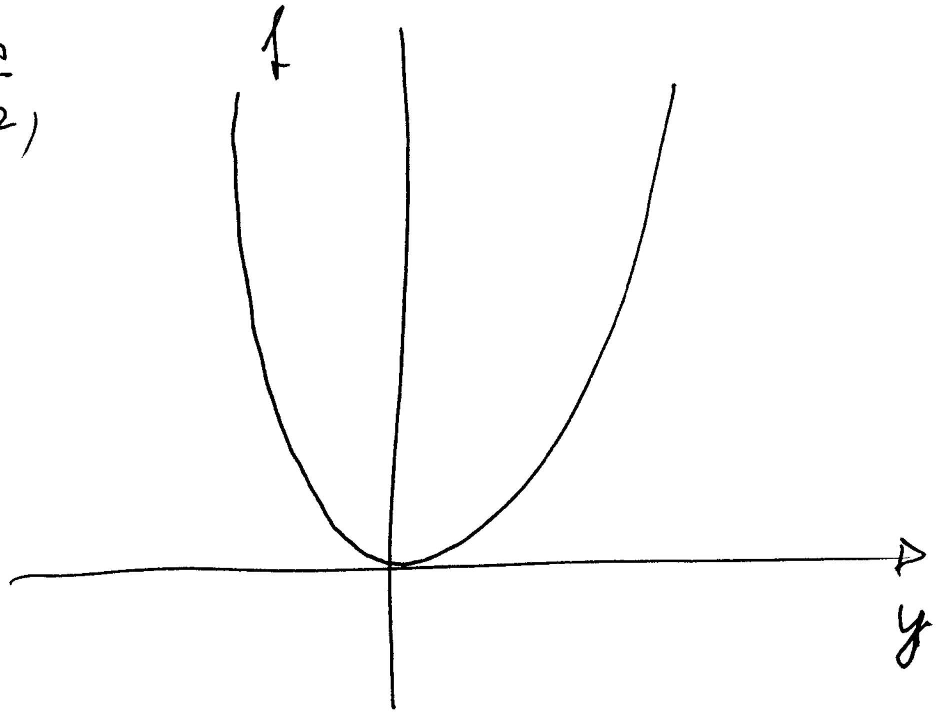
Lösungsschar ($y' = ay$)



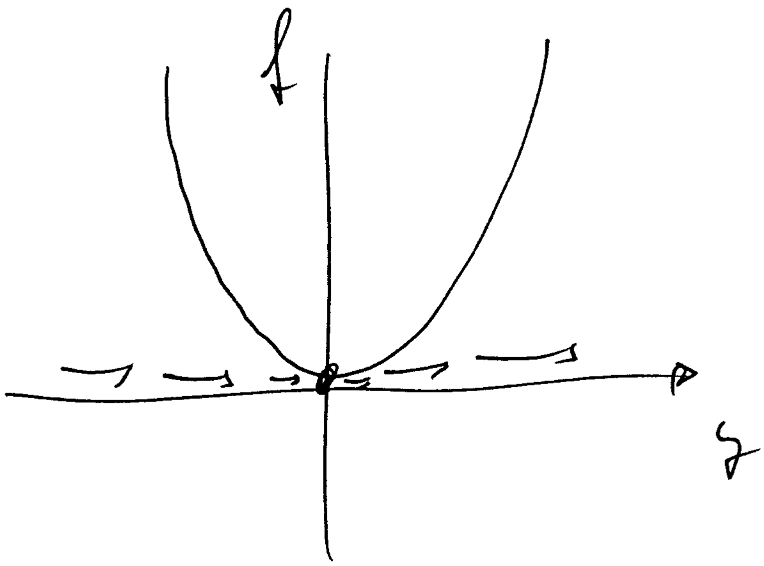
'Starke Vermehrung. $y^{'} = ay^2 = f(y), \;\; y(x_0) = y_0.$

Funktion

($f(y) = ay^2$)



Vektorfeld (und Funktion)



Ohne Einschraenkung $a > 0$. (Anderer Fall analog, Zeitumkehr)
Wir unterscheiden drei Faelle:
Es gilt $y_0 > 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (0, \infty)$$
$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{as^2} ds = \frac{1}{a}(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}),$$
$$(x_-, x_+) = (-\infty, \frac{1}{ay_0}).$$

Aufloesen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a}(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0})$$

liefert

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - a(x - x_0)}.$$

Zeichnung (positive Funktion, explosion am rechten Rand, konvergiert gegen 0 am linken Rand). Wieder ist die Loesung eindeutig (klar...).
Es gilt $y_0 < 0$. Dann ist

$$(y_-, y_+) = (-\infty, 0)$$
$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{as^2} ds = \frac{1}{a}(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0}),$$
$$(x_-, x_+) = (\frac{1}{ay_0}, +\infty).$$

Aufloesen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a}(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0})$$

liefert

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - a(x - x_0)}.$$

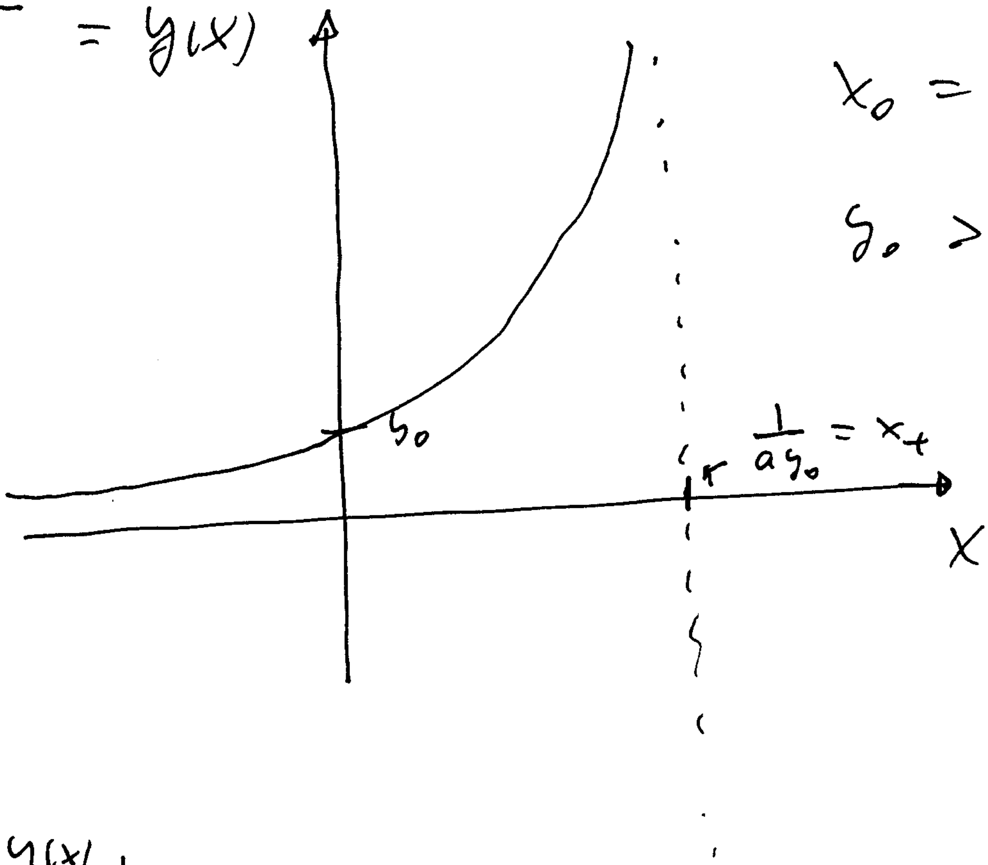
Zeichnung. (Negative Funktion, Explosion am linken Rand, konvergiert gegen 0 am rechten Rand) Wieder ist die Loesung eindeutig.
Es gilt $y_0 = 0$. Dann ist $y \equiv 0$ eine Loesung. Nach dem bisher betrachteten ist es sogar die einzige Loesung (da die anderen Loesungen nicht in Null 'einmuenden').

Lösungen ($y' = ay^2$)

$$\frac{1}{\frac{1}{y_0} - ax} = y(x)$$

$x_0 = 0$

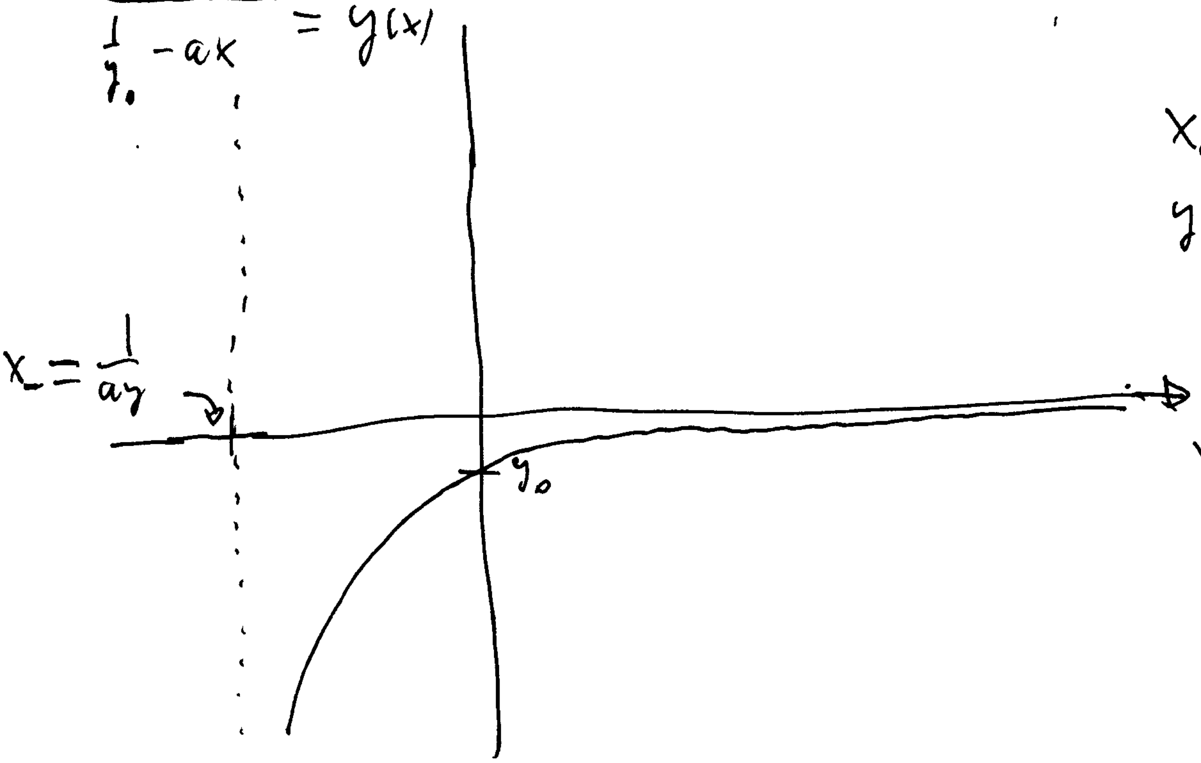
$y_0 > 0$



$$\frac{1}{\frac{1}{y_0} - ax} = y(x)$$

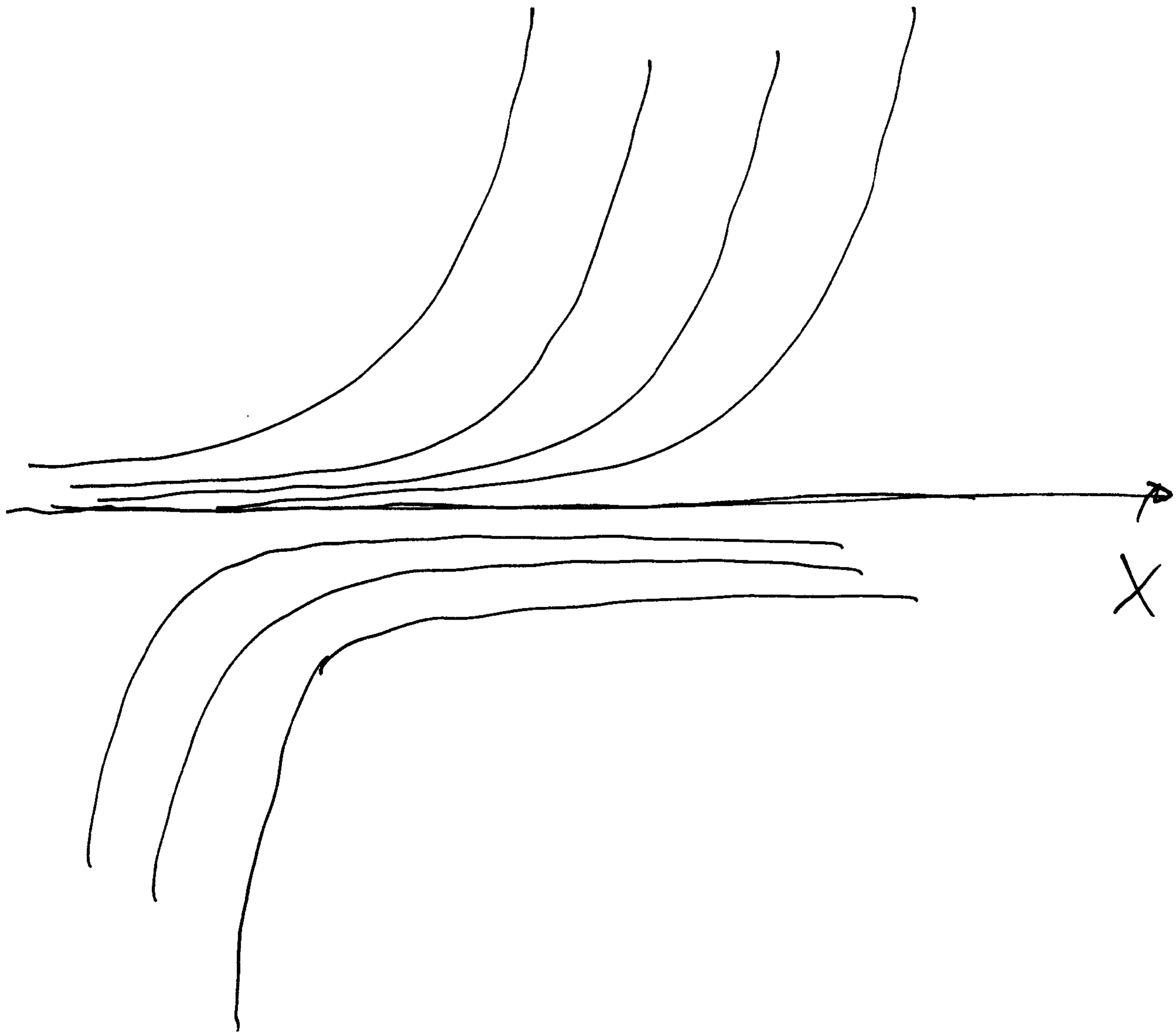
$x_0 = 0$

$y_0 < 0$



Zusammenfassung: Auch in diesem Fall ist die Loesung eindeutig, erreicht den Gleichgewichtspunkt nicht in endlicher Zeit. Allerdings existiert die Loesung in diesem Fall auch nicht ueberall, sondern 'explodiert' in endlicher Zeit. Der Grund fuer die Explosion liegt im starken Wachstum von y^2 fuer grosse Werte von y.
Man beachte, dass die Loesung nicht ueberall existiert, obwohl das Vektorfeld f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist!

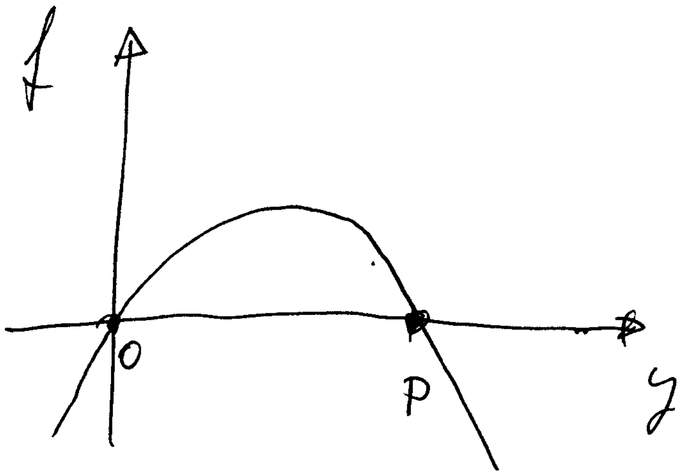
Lösungsschar:



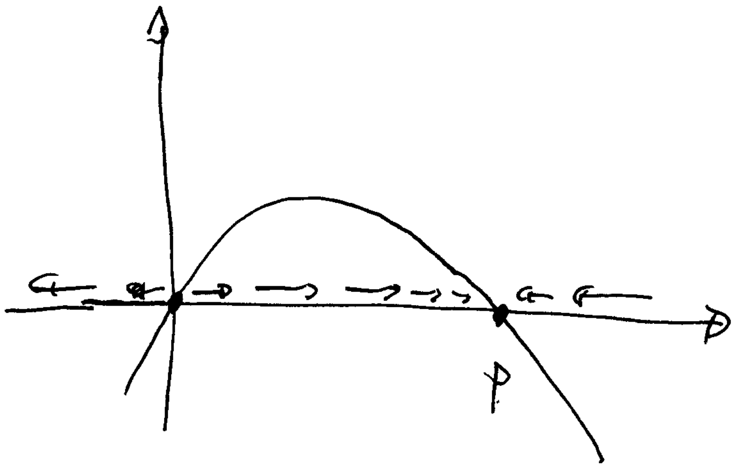
Bemerkung. Die Auftretenden $(x - x_0)$ Terme sind typisch fuer autonome Differentialgleichung (Invarianz unter Verschiebung).

Populationsentwicklung. $y' = (a - by)y = b(\frac{a}{b} - y)y = f(y)$ fuer $a, b > 0$. (Den Fall $a = 0$ oder $b = 0$ haben wir schon behandelt.)

Funktion $(f(y) = b(p-y)y)$



Vektorfeld (und Funktion):



Idee: Gleichgewichtspunkte in 0 und $p = a/b$. Alle Loesungen ausser den Gleichgewichtspunkten laufen nach a/b

Sei $0 < y_0 < p$. Dann gilt:

$$(y_-, y_+) = (0, p)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{b(p-s)s} ds = \frac{1}{a} \int_{y_0}^{y} \left(\frac{1}{p-s} + \frac{1}{s} \right) ds = \frac{1}{a}(-\ln(p-y) + \ln y) + C$$

mit $C := \frac{1}{a}(\ln(p - y_0) - \ln y_0)$.

$$(x_-, x_+) = (-\infty, +\infty) \text{ (Loesung existiert. auf ganz } \mathbb{R}.$$

Aufloesen von

$$x - x_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{p-y} + C$$

liefert

$$y(x) = \frac{p}{1 + \frac{p-y_0}{y_0} e^{-a(x-x_0)}}.$$

Zeichnung. (vgl. erwartetes Verhalten)

Sei $p < y_0$. Dann gilt:

$$(y_-, y_+) = (p, \infty)$$

$$F(y) = ... = \frac{1}{a} \ln \frac{y}{y-p} + C$$

mit

$$C = -\frac{1}{a} \ln \frac{y_0}{y_0 - p} < 0.$$

$$(x_-, x_+) = (C, \infty)$$

(Hier: C kommt von $y_+ = \infty$; ∞ kommt von $y_- = p$.) Damit explodiert die Loesung am linken Rand.) Aufloesung von

$$x - x_0 = F(y)$$

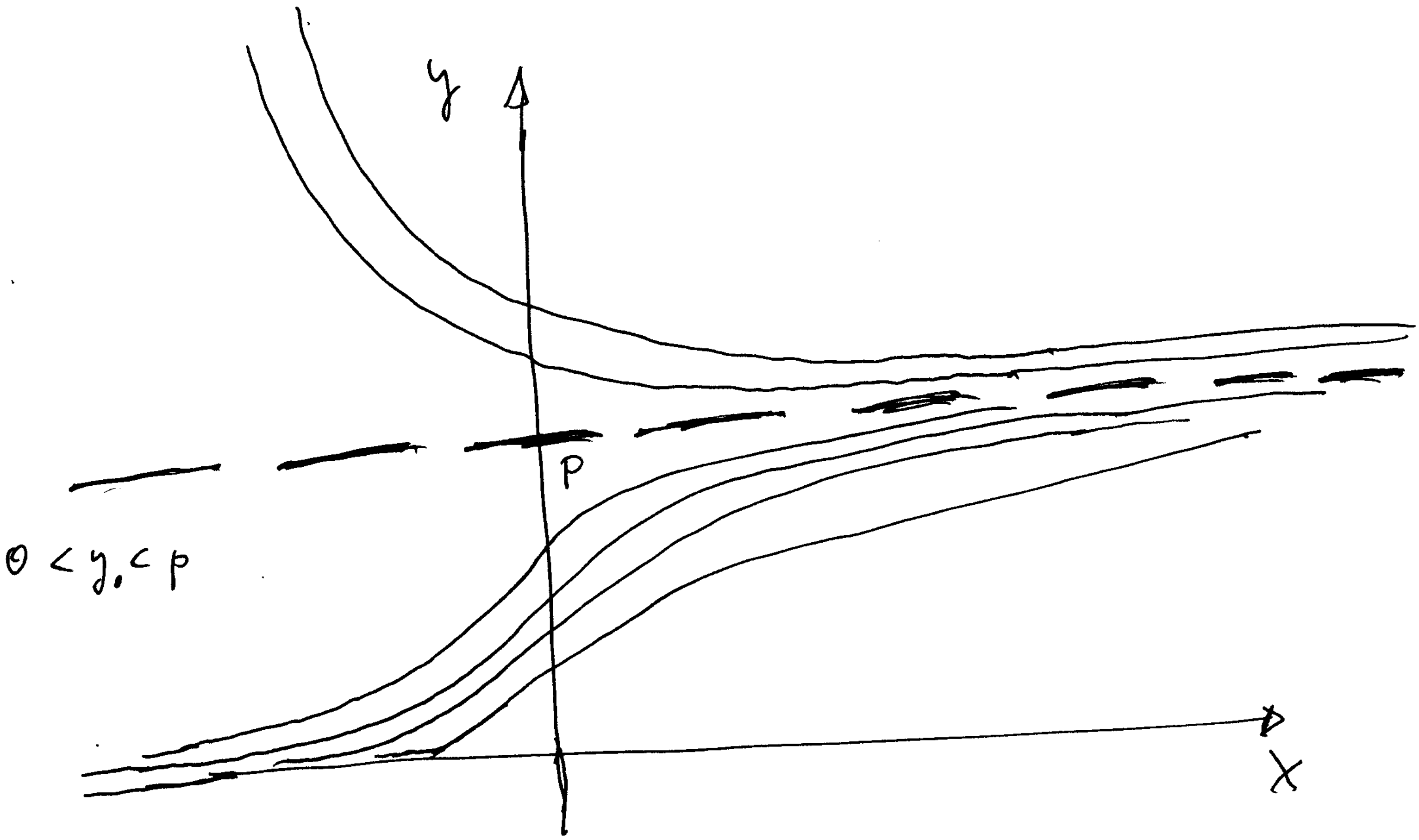
liefert wieder

$$y(x) = \frac{p}{1 + \frac{p-y_0}{y_0} e^{-a(x-x_0)}}.$$

Zeichnung. , erwartetes Verhalten vgl. $y' = y^2$.

Sei $y_0 = 0$ *oder* $y_0 = p$. Dann erhalten wir die konstante Loesung. $y \equiv 0$ bzw. $y \equiv p$ und keine andere (da die anderen Loesungen diese Werte nicht annehmen).

Lösungen ($y' = b(p-y)y$)



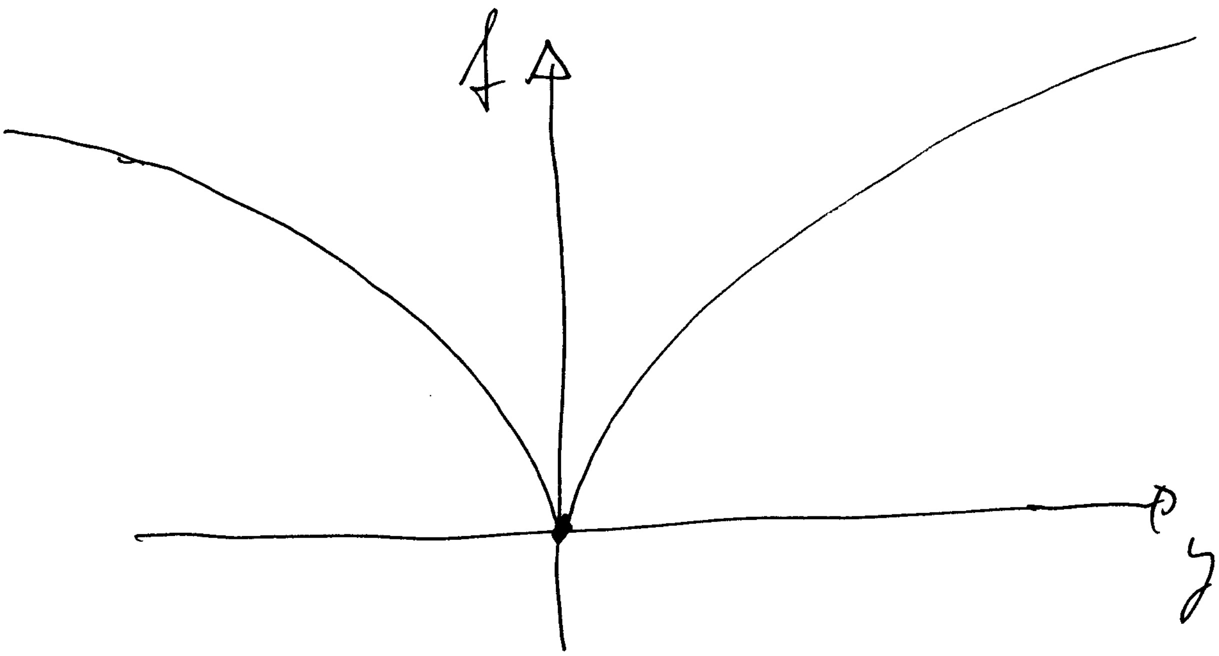
$$y(x) = \frac{p}{1 + \frac{p - y_0}{y_0} e^{-a(x - x_0)}}$$

Zusammenfassung: Auch in diesem Fall ist die Loesung eindeutig, erreicht den Gleichgewichtspunkt nicht in endlicher Zeit. Allerdings existiert die Loesung in diesem Fall auch nicht ueberall, sondern 'explodiert' in endlicher Zeit. Der Grund fuer die Explosion liegt im starken Wachstum der Groessenordnung y^2 fuer grosse Werte von y.
Man beachte, dass die Loesung nicht ueberall existiert, obwohl das Vektorfeld f auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist!

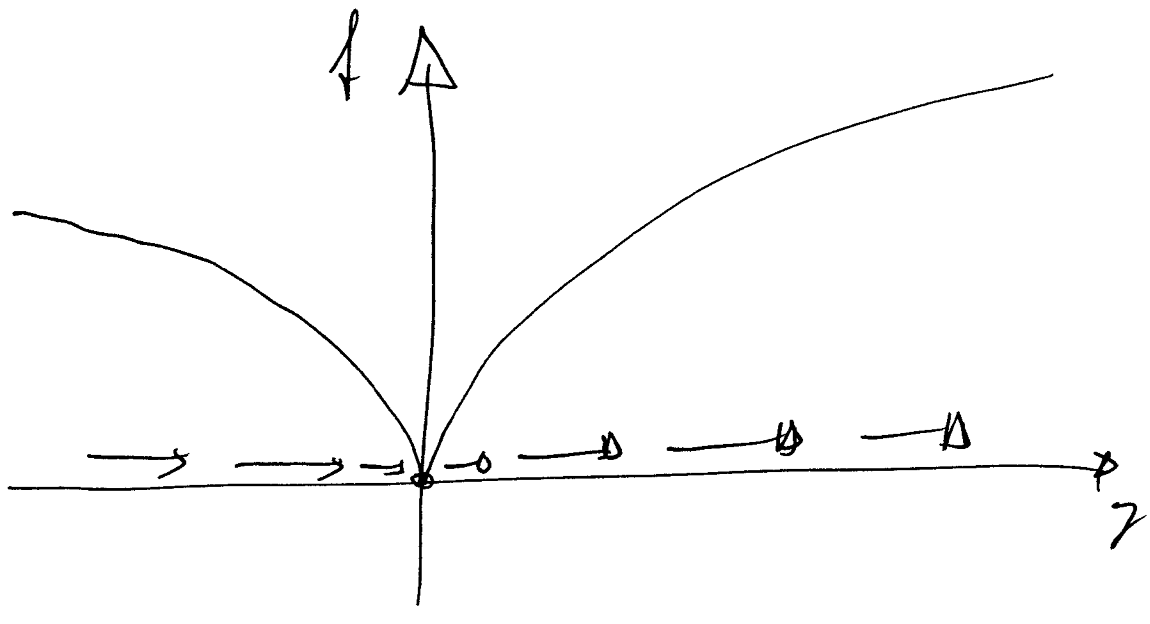
Ende der Vorlesung.

'Schwache' Vermehrung. $y^{'} = |y|^{1/2} = f(y) \quad y(x_0) = y_0$.

<u>Funktion:</u> ($f(y) = |y|^{\frac{1}{2}}$)



<u>Vektorfeld</u> (und Funktion)



Beachte: In 0 ist die Funktion nicht stetig differenzierbar. Tatsaechlich existieren links- und rechtsseitig die Grenzwerte der Differenzenquotienten uneigentlich und liefern $-\infty$ und $+\infty$. Zeichnung.

Sei $y_0 > 0$. Dann gilt:

$$(y_-, y_+) = (0, \infty)$$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s^{1/2}} ds = 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})$$

$$(x_-, x_+) = (-2\sqrt{y_0}, \infty).$$

Aufloesen von

$$x - x_0 = 2(\sqrt{y} - \sqrt{y_0})$$

liefert

$$y(x) = \frac{1}{4}(x - x_0 + 2\sqrt{y_0})^2.$$

Fuer $(x - x_0) \to -2\sqrt{y_0}$ gilt also $y(x) \to 0$. Der Gleichgewichtspunkt wurde vor endlicher Zeit verlassen. Zeichnung.

Sei $y_0 < 0$. Dann gilt:

$$(y_-, y_+) = (-\infty, 0)$$

$$F(y) = .. = -2(\sqrt{(-y)} - \sqrt{(-y_0)})$$

$$(x_-, x_+) = (-\infty, 2\sqrt{(-y_0)}).$$

Aufloesen von

$$x - x_0 = -2(\sqrt{(-y)} - \sqrt{(-y_0)})$$

liefert

$$y(x) = -\frac{1}{4}(x - x_0 - 2\sqrt{-y_0})^2.$$

Fuer $x - x_0 \to 2\sqrt{-y_0}$ gilt wieder $y(x) \to 0$. Der Gleichgewichtspunkt wird in endlicher Zeit erreicht.

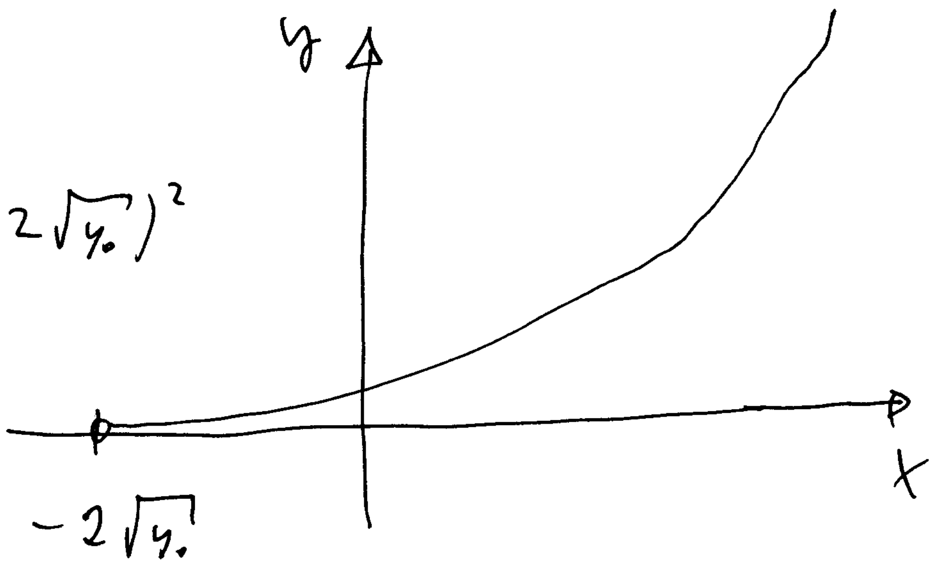
Sei $y_0 = 0$. Dann ist $(I, 0)$ eine Loesung auf jedem Intervall I.

Lösungen ($y' = |y|^{\frac{1}{2}}$)

$y_0 > 0$

$x_0 = 0$

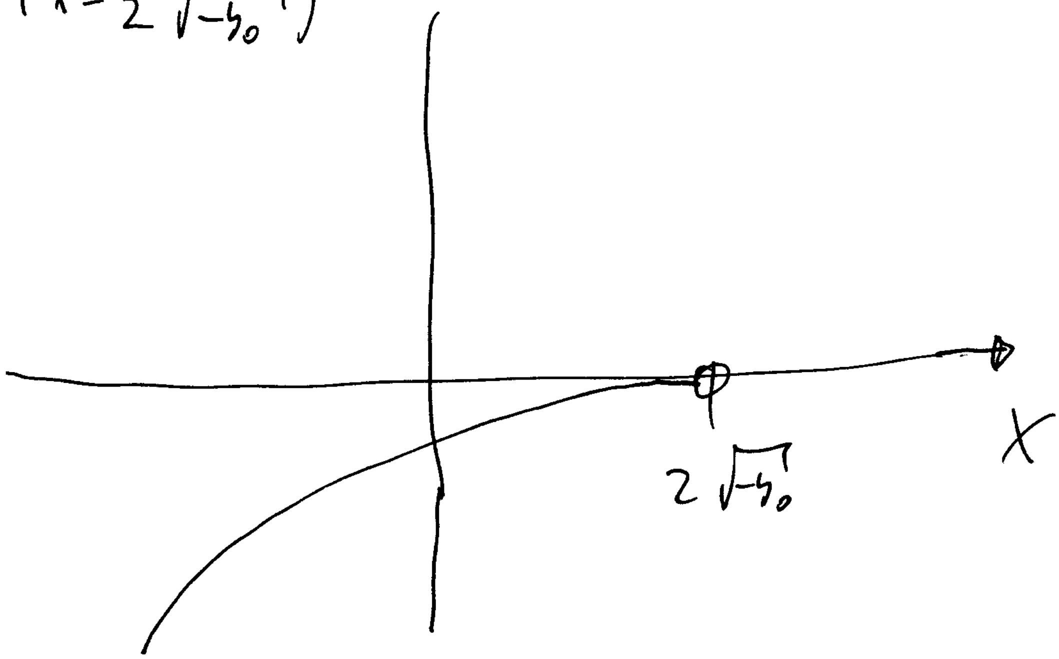
$y(x) = \frac{1}{4}\left(x + 2\sqrt{y_0}\right)^2$



$y_0 < 0$

$x_0 = 0$

$y(x) = -\frac{1}{4}\left(x - 2\sqrt{-y_0}\right)^2$



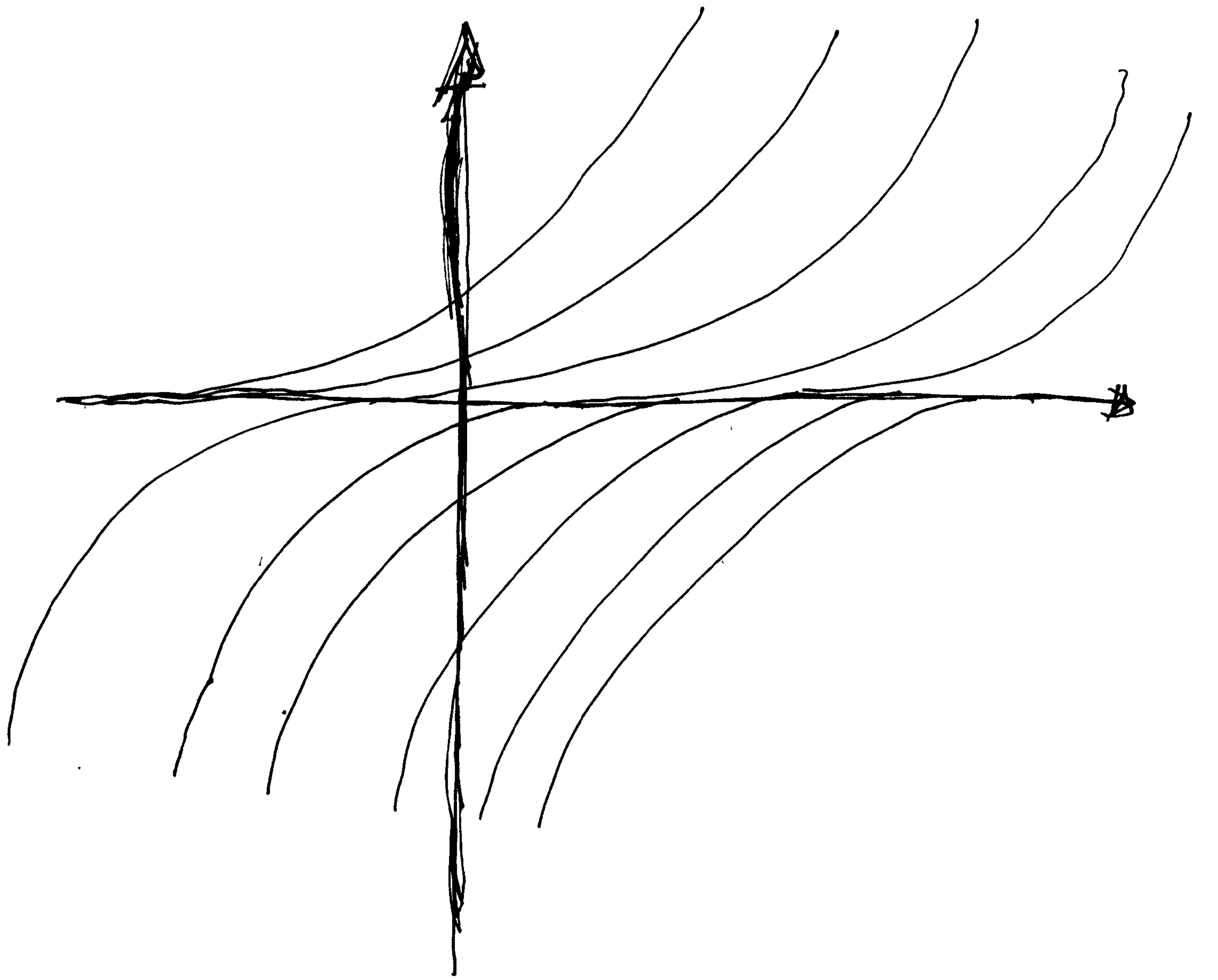
Diese drei Loesungen koennen kombiniert werden (Nachrechnen! oder allgemeines Resultat). Die allgemeine Loesung lautet dann also

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1/4(x-D)^2 & : \quad x \geq D \\ 0 & : \quad C \leq x \leq D \\ -1/4(x-C)^2 & : \quad x \leq C. \end{cases}$$

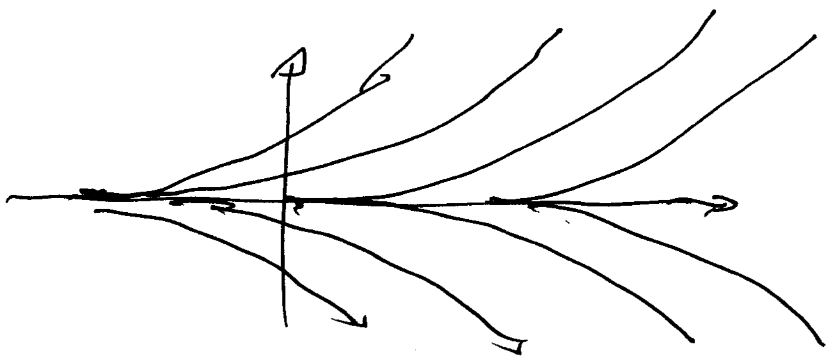
Zeichnung.

Zusammenfassung: In diesem Fall kann also jede Loesung auf $\mathbb{R}$ fortgesetzt werden; aber Loesungen sind gar nicht eindeutig und zwar weder nach rechts noch nach links.

Lösungsschar ($y' = |y|^{\frac{1}{2}}$)



Lösungsschar ($y' = \operatorname{sgn}(y)\, |y|^{\frac{1}{2}}$) (Übung)



Beispiel. $y' = \mathrm{sgn} y |y|^{1/2} = f(y)$. (vgl. Uebung.)

$y_0 > 0$. Das wurde oben schon behandelt.

$y_0 < 0$. Das ist bis auf Vorzeichen wie oben. Die Loesung ergibt sich durch 'Spiegelung' in x.

Loesung begann im Gleichgewicht vor endlicher Zeit, kommt aber davon nicht mehr weg. Zeichnung.

3. Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

In diesem Abschnitt spezialisieren wir die Differentialgleichung $y' = f(x, y)$ zu

$$y' = f(y)g(x)$$

gegebenenfalls zusammen mit einem Anfangswert $y(x_0) = y_0$.

Definition. *Eine Differentialgleichung der Form* $y' = f(y)g(x)$ *mit* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *und* $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *heisst Differentialgleichung mit getrennten Variablen.*

Bemerkung.

- Gleichgewichtspunkte sind gerade die p mit $f(p) = 0$ (falls $g \neq 0$).
- Der Fall $g \equiv 1$ wurde im letzten Abschnitt behandelt.

Wieder koennen wir *formal* (d.h. unter der Annahme der Existenz einer Loesung und gewisser Invertierbarkeiten) die Differentialgleichung loesen wie folgt:
Sei φ Loesung mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $f(y_0) \neq 0$. Dann gilt fuer x nahe x_0

$$\int_{x_0}^{x} \frac{\varphi'(s)}{f(\varphi(s))} ds = \int_{x_0}^{x} g(s) ds.$$

Also

$$F(y) = G(x) + C$$

mit Stammfunktionen F von $1/f$ und G von g und C mit $F(y_0) = G(x_0) + C$. Falls F invertierbar ist, liefert dies

$$y = F^{-1}(G(x) + C).$$

Wieder werden wir Invertierbarkeit von F zeigen und dann das einfach rueckwaerts lesen um eine Loesung zu bekommen. Das ist im wesentlichen der Inhalt des kommenden Satzes. Um den Satz kuerzer formulieren zu koennen, fixieren wir die Situation wie folgt.

Wir betrachten folgende Situation (S):

(S) Seien I_f und I_g offene Intervalle in $\mathbb{R}$ und $f : I_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I_g \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $x_0 \in I_g$ und $y_0 \in I_f$ mit $f(y_0) \neq 0$ gegeben. Sei F eine Stammfunktion von $1/f$ auf I_f und G eine Stammfunktion von g auf dem groessten offenen Teilinterval (y_-, y_+) um y_0 in I_f auf dem f nicht verschwindet.

Wie im vorigen Abschnitt gezeigt, ist dann F streng monoton, stetig differenzierbar mit $F^{'} = 1/f$ und es existieren also

$$s_- := \lim_{y \to y_-} F(y), \;\; s_+ := \lim_{y \to y_+} F(y)$$

und

$$F : (y_-, y_+) \longrightarrow (s_-, s_+)$$

ist bijektiv und stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inversen.

Theorem. *Es gelte (S). Dann gilt fuer das Anfangswertproblem*

$$(*) \;\; y^{'} = f(y)g(x), \;\; y(x_0) = y_0$$

folgendes:

(1) *(Lsgn der DGL loesen $F(y) = G(x) + C$.) Ist (I, φ) eine Loesung von $(*)$, so gilt $F(\varphi(x)) = G(x) + C$ mit $C = F(y_0) - G(x_0)$ fuer x nahe x_0. Insbesondere ist die Loesung lokal eindeutig. Ist umgekehrt I offen und $\varphi : I \longrightarrow (y_-, y_+)$ stetig differenzierbar mit $F(\varphi(x)) = G(x) + F(y_0) - G(x_0)$ und $\varphi(x_0) = y_0$, so ist (I, φ) eine Loesung von $(*)$.*

(2) *(Es gibt lokal eindeutige Loesung) Es gibt ein offenes Intervall I in $\mathbb{R}$ mit $x_0 \in \mathbb{R}$, auf dem es genau eine Loesung von $(*)$ gibt.*

(3) *(Loesungen stimmen ueberein, solange f nicht verschwindet.) Sind (I, φ_1) (I_2, φ_2) Loesungen von $(*)$ mit $f \circ \varphi_1 \neq 0$, so stimmen φ_1 und φ_2 auf $I_1 \cap I_2$ ueberein.*

Beweis. (1) Sei (I_1, φ) eine Loesung von $(*)$, $\varphi(x_0) = y_0$. Dann gilt $f(\varphi(x)) \neq 0$ fuer x nahe x_0, d.h. $\varphi(x) \in (y_-, y_+)$ fuer x nahe x_0. Damit folgt (vgl. Rechnung oben)

$$F(\varphi(x)) = G(x) + C \;\text{ mit } C = F(y_0) - G(x_0).$$

Da F bijektiv ist, folgt also

$$\varphi(x) = F^{-1}(G(x) + C).$$

Das liefert dann auch die lokale Eindeutigkeit (da rechte Seite eindeutig ist). Sei umgekehrt φ mit $\varphi(x_0) = y_0$ und $F(\varphi(x) = G(x) + C$ gegeben. Dann liefert Ableiten

$$F^{'}(\varphi(x))\varphi^{'}(x) = G^{'}(x).$$

Also

$$\frac{1}{f(\varphi(x))}\varphi^{'}(x) = g(x).$$

Also

$$\varphi^{'}(x) = g(x)f(\varphi(x)).$$

(2): Sei $C := F(y_0) - G(x_0)$. Dann gilt

$$G(x_0) + C = F(y_0) \in (s_-, s_+).$$

Da G stetig ist, gibt es dann ein offenes Intervall I mit

$$x_0 \in I \;\text{ und }\; C + G(I) \subset (s_-, s_+).$$

Dann ist

$$\varphi : I \longrightarrow (y_-, y_+), x \mapsto F^{-1}(G(x) + C)$$

stetig differenzierbar mit $F(\varphi) = G(x) + C$ und $\varphi(x_0) = F^{-1}(G(x_0) + C) = F^{-1}(F(y_0)) = y_0$. Damit folgt aus dem schon in (1) gezeigten, dass φ die lokal eindeutige Loesung ist.

Ende der Vorlesung.

(3): Lokale Eindeutigkeit gilt, solange f nicht verschwindet. Da $f \circ \varphi_1$ auf I_1 nicht verschwindet kann man mit lokaler Eindeutigkeit (nach dem schon bekannten Schluss) die Eindeutigkeit auf $I_1 \cap I_2$ erhalten. □

Der Satz liefert konkrete Schritte, um alle lokalen Loesungen einer Differentialgleichung mit getrennten Variablen zu bestimmen:

- Bestimme Stammfunktionen F von $1/f$ und G von g.
- Loese $F(y) = G(x) + C$ nach y auf. (Das liefert alle lokalen Loesungen zu Anfangswertproblem mit $g(y_0) \neq 0$ nach Teil (1) des Satzes.)
- Bestimme C so, dass $y = y_C(x_0) = y_0$ gilt. Das ist moeglich mit $C = G(y_0) - F(x_0)$.

Tatsaechlich kann man sich den dritten Schritt sparen, wenn man im ersten Schritt die Stammfunktion $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ und $G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{g(s)} ds$ waehlt. Dann gilt $G(y_0) = F(x_0) = 0 = C$. Auch koennte man die Reihenfolge des zweiten und dritten Schrittes vertauschen.

Dieses Verfahren funktioniert fuer alle Anfangswerte y_0 mit $f(y_0) \neq 0$. Der Fall von y_0 mit $f(y_0) = 0$ muss getrennt behandelt werden. In diesem Fall existiert jedenfalls die konstante Loesung $y \equiv y_0$.

Beispiel. $y' = xy^2$, $y(x_0) = y_0$. Dann gilt also $y' = f(y)g(x)$ mit $f(y) = y^2$ und $g(x) = x$. (Natuerlich waeren auch andere Wahlen von f und g moeglich. Zur Loesung folgen wir den drei oben angegebenen Schritten.

Erster Schritt. Falls $y_0 \neq 0$. $G(x) = \frac{1}{2}x^2$ auf $\mathbb{R}$ und $F(y) = -\frac{1}{y}$ auf $(0, \infty)$ bzw. $(-\infty, 0)$.

Zweiter Schritt. Loese $-\frac{1}{y} = \frac{1}{2}x^2 + C$. Das liefert

$$y = \frac{-1}{C + 1/2x^2}.$$

Dritter Schritt. Aufloesen von $y(x_0) = y_0$ liefert

$$y(x) = \frac{-1}{-1/2x_0^2 - 1/y_0 + 1/2x^2}.$$

Hier gilt $C = -1/2x_0^2 - 1/y_0$.

Um uns ein Bild von der Loesungsschar d.h. der Menge aller Loesungen zu machen, geben wir einige Zeichnungen. Dabei ist das Ziel, fuer jeden Anfangswert die entsprechende Loesung zu skizzieren. Es erweist sich als zweckmaessig in zwei Schritten vorzugehen. Dazu beschreiben wir zunaechst die Loesungen in Abhaengigkeit von C und machen uns dann klar in welchen Bereichen der Ebene welches Vorzeichen von C gilt. Zusammenfassen dieser beiden Informationen erlaubt es dann recht zuegig, die Loesungsschar zu zeichnen.

Zunaechst zeichnen wir fuer festes C die Loesung. Dabei unterscheiden wir drei Faelle. *Zeichnung* $C > 0$, $C < 0$, $C = 0$:

Nun zerlegen wir $\mathbb{R}^2$ in die Teile der Anfangswerte (x_0, y_0) mit $C > 0$, $C < 0$ und $C = 0$. Diese Teile werden durch die Kurven $y_0 = 0$ und $y_0 = \frac{-2}{x_0^2}$ begrenzt. *Zeichnung.*

Nun koenne wir zu 'jedem' Anfangswert die entsprechende Loesungskurve zeichnen. *Zeichnung.*

Schliesslich zeichnen wir auch noch das Richtungsfeld, wobei wir 'jedem' Punkt (x, y) eine normierte Version von $(1, g(y)f(x))$ antragen.

4. Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung in einer Dimension

In diesem Abschnitt spezialisieren wir die Differentialgleichung $y^{'} = f(x, y)$ zu

$$y^{'} + g(x)y = h(x)$$

bzw.

$$y^{'} = -g(x)y + h(x).$$

Eine solche Gleichung heisst *lineare Differentialgleichung erster Ordnung* (in einer Dimension). Gilt $h \equiv 0$, so heisst die Gleichung *homogen*, andernfalls heisst sie *inhomogen.*
Wir loesen zunaechst die homogene Gleichung.

Lemma. *(Loesung der homogenen linearen Differentialgleichung) Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y^{'} + g(x)y = 0, y(x_0) = y_0,$$

auf ganz I die eindeutige Loesung

$$\varphi(x) = y_0 \exp(-\int_{x_0}^{x} g(s)ds).$$

Beweis. Existenz. Wir geben zwei Varianten.

Variante 1: Direktes Nachrechnen.

Variante 2: Loesen der Differentialgleichung $y^{'} = -g(x)y$ mit getrennten Variablen:
Erster Schritt: Es sind

$$G(x) = -\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

$$F(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{1}{s} ds = \ln \frac{y}{y_0} \text{ auf } (0, \infty) \text{ bzw. } (-\infty, 0).$$

die gesuchten Stammfunktionen.
Zweiter Schritt: Aufoesen von $F(y) = G(x)$ d.h.

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\int_{x_0}^{x} g(s)ds$$

nach y liefert

$$y(x) = F^{-1}(G(x)) = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)ds}.$$

Der dritte Schritt 'Bestimmen von C aus den Anfangsbedingungen' ist nicht noetig, da $C = 0$ aufgrund der speziellen Wahl der Stammfunktionen gilt. Da fuer diese Loesung fuer $y_0 \neq 0$ auch $f(y)$ nirgends verschwindet, ist sie eindeutig.
Der Fall $y_0 = 0$ wird getrennt behandelt. Es ist dann

$$y \equiv 0 = y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} g(s)ds}$$

eine Loesung.

Eindeutigkeit. Die Eindeutigkeit im Falle $f(y_0) = y_0 \neq 0$ folgt aus dem Satz ueber Differentialgleichungen mit getrennten Variablen, da die angegebene Loesung φ fuer alle $x \in I$ auch $f(\varphi(x)) \neq 0$ erfuellt. Die Eindeutigktie im Falle $y_0 = 0$ folgt nach dem schon bekannten Schluss, da die anderen Loesungen nicht in die Nullloesung einmuenden. □

Bemerkung. Der Fall $g \equiv a$ liefert $y(x) = y_0 e^{a(x-x_0)}$ (wie schon oben behandelt).

Wir kommen nun zur inhomogenen Gleichung.

Theorem. *Sei I ein offenes Intervall. Seien $g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$y' + g(x)y = h(x),\ y(x_0) = y_0$$

die auf ganz I definierte eindeutige Loesung

$$\varphi = \varphi_{hom} + \varphi_{spez}$$

mit

$$\varphi_{hom} = y_0 \exp(-\int_{x_0}^{x} g(s)ds)$$

einer Loesung der homogenen Gleichung mit Anfangswert $y(x_0) = y_0$ und

$$\varphi_{spez} = \exp(-\int_{x_0}^{x} g(s)ds) \int_{x_0}^{x} h(s) \exp(\int_{x_0}^{s} g(t)dt)ds$$

einer speziellen der Loesung der inhomogenen Gleichung mit Anfangwert $y(x_0) = 0$.

Bemerkung. Die Loesung φ_s sieht wie eine Loesung der homogen Gleichung mit von x abhaengigem y_0 aus. Das ist kein Zufall (s.u.).

Beweis. Das angegebene φ ist Loesung. Offenbar ist φ_{hom} eine Loesung der homogenen Gleichung zum Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$. Nachrechnen zeigt, dass φ_{spez} eine Loesung der inhomogenen Gleichung zum Anfangswert $y(x_0) = 0$ ist:
Bezeichne die beiden Terme mit a und b, also $\varphi_{spez} = ab$. Dann gilt

$$\varphi_{spez}' = a'b + ab' = (-ga)b + aha^{-1} = -gab + h = -g\varphi_{spez} + h.$$

Damit gilt fuer $\varphi = \varphi_{spez} + \varphi_{hom}$ also

$$\varphi' = \varphi_{hom}' + \varphi_{spez}' = -g(x)\varphi_{hom} + (-g(x))\varphi_s + h = -g(x)\varphi + h$$

sowie

$$\varphi(x_0) = y_0 + 0 = y_0.$$

Damit loest φ das Anfangswertproblem.

Ende der Vorlesung.

Eindeutigkeit. Sei ψ eine weitere Loesung des Anfangswertproblem. Sei $w := \varphi - \psi$. Dann gilt

$$w' + gw = \varphi' - \psi' + g(\varphi - \psi) = h - h = 0$$
$$w(x_0) = \varphi(x_0) - \psi(x_0) = y_0 - y_0 = 0.$$

Damit loest w das homogene Problem zum Anfangwert 0. Da die Loesung des homogenen Problems eindeutig ist (s.o.) und $y \equiv 0$ eine solche Loesung ist, folgt $w \equiv 0$. □

Bemerkung.

- Der Eindeutigkeitsbeweis zeigt, dass Differenz von Loesungen der inhomogenen Gleichung die homogene Gleichung loest.
- Zum Anfangswert $y(x_0) = 0$ kann es eine nichtverschwindende Loesung der inhomogenen Gleichung geben (aber nicht der homogenen Gleichung!).
- Der Satz gilt auch, wenn das Intervall I halboffen oder abgeschlossen ist.
- Die Aussagen gelten auch fuer komplexwertige g und h (Nachrechnen).

Die angegebene Loesung kann auch mittels des Verfahrens der *Variation der Konstanten* bestimmt werden: Sei y eine Loesung des homogenen Problems

$$y' + gy = 0,\ y(x_0) = 1.$$

Dann verschwindet y nirgends (nach dem ersten Teil des Lemma). Damit kann man fuer das inhomogene Problem auf jeden Fall den Ansatz machen

$$\widetilde{y} := C(x)y.$$

Wenn es ueberhaupt eine Loesung des inhomogenene Problems gibt, muss sie so dargestellt werden koennen mit einer noch zu bestimmenden Funktion C. Einsetzen liefert

$$\widetilde{y}' = C'y + Cy' = C'y + C(-gy) = +C'y - g\widetilde{y}$$

also

$$\widetilde{y}' + g\widetilde{y} = C'y.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$C'y = h(x).$$

Damit folgt

$$C' = \frac{h}{y}.$$

Integration ergibt

$$C(x) = C(x_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{h(s)}{y(s)} ds.$$

Betrachten der Anfangsbedingung

$$y_0 = \widetilde{y}(x_0) = C(x_0)y(x_0) = C(x_0)$$

gibt $C(x_0) = y_0$. Damit erhaelt man insgesamt die angegebene Formel. Dieser Zugang 'begruendet' die Darstellung als Produkt.

5. Loesen von Differentialgleichungen mittels Substitution und weitere Beispiele.

Unter Umstaenden laesst sich eine Differentialgleichung durch eine Substitution in eine besser untersuchbare Differentialgleichung ueberfuehren. Wir behandeln den eindimensionalen Fall. Fuer den hoeherdimensionalen Fall kann man entsprechendes durchfuehren.

Zur Einstimmung behandeln wir zunaechst ein **Beispiel**. Sei $y^{'} = (y-x)^2$ gegeben. Dann erfuellt die neue Funktion $z = y - x$ also die Differentialgleichung

$$z^{'} = y^{'} - 1 = z^2 - 1 = f(z).$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir koennen sie loesen und erhalten dann $y = z + x$ als Loesung der gewuenschten Differentialgleichung.

Abstrakt laesst sich das ganze so behandeln:
Sei

$$(x, y) \mapsto (\sigma(x), \zeta(x, y))$$

stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Inversen

$$(s, z) \mapsto (\xi(s), \eta(s, z))$$

also insbesondere

$$(x, y) = (\xi \circ \sigma(x), \eta(\sigma(x), \zeta(x, y)).$$

Dann gilt:

(1) Loest $\Phi(x)$ die Differentialgleichung

$$y^{'} = f(x, y),$$

so loest

$$\Psi(s) := \zeta(\xi(s), \Phi(\xi(s)))$$

die Differentialgleichung

$$z^{'} = \xi^{'} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) \right),$$

wobei $\xi = \xi(s)$ und $\eta = \eta(s, z)$.
(*Bemerkung.* $\xi^{'}, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial \zeta}{\partial y}$ sind bekannte gegebene Funktionen).

(2) Loest Ψ die Differentialgleichung

$$z^{'} = \xi^{'} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial \zeta}{\partial y}(\xi, \eta) f(\xi, \eta) \right),$$

so loest

$$\Phi(x) := \eta(\sigma(x), \Psi(\sigma(x)))$$

die Differentialgleichung

$$y^{'} = f(x, y).$$

Beweis. Das folgt direkt durch Nachrechnen:
(1) Nach Definition von Ψ gilt mit $x = \xi(s)$ und $y = \Phi$

$$\Phi(\xi(s)) = y(x) = \eta(\sigma(x), \zeta(x,y))) = \eta(s, \zeta(\xi(s), \Phi(\xi(s)))) = \eta(s, \Psi(s)).$$

Ableiten von Ψ und Nutzen der Differentialgleichung fuer $\Phi^{'}$ liefert dann

$$\begin{aligned}
\Psi^{'}(s) &= \frac{\partial\zeta}{\partial x}(\xi,\eta)\xi^{'}(s) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(\xi,\eta)\Phi^{'}(\xi(s))\xi^{'}(s) \\
&= \xi^{'}(s)\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\xi,\eta) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(\xi,\eta)f(\xi,\Phi(\xi))\right) \\
(\Phi(\xi(s)) = \eta(s,\Psi(s)) \quad &= \xi^{'}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\xi,\eta) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(\xi,\eta)f(\xi,\eta)\right).
\end{aligned}$$

(2) Es gilt mit $s = \sigma(x), \xi(s) = x$ nach (1)

$$\Phi(x) = \eta(\sigma(x), \Psi(\sigma(x)).$$

Weiterhin gilt wegen $x = \xi(\sigma(x))$ nach Differentiation

$$1 = \xi^{'}(\sigma(x))\sigma^{'}(x) \qquad (*)$$

sowie fuer $y = \eta(\sigma(x), \zeta(x,y))$ nach Differentiation

$$1 = \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial\eta}{\partial s}\sigma^{'} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial x} \qquad (**)$$

Damit kann man mit $\omega = (\sigma(x), \Psi(\sigma(x)))$ rechnen

$$\begin{aligned}
\Phi^{'}(x) &= \frac{\partial\eta}{\partial s}(\omega)\sigma'(x) + \frac{\partial\eta}{\partial z}(\omega)\Psi^{'}(\sigma(x))\sigma^{'}(x) \\
(\text{Differentialgleichung } \Psi) &= \frac{\partial\eta}{\partial s}(\omega)\sigma' + \frac{\partial\eta}{\partial z}(\omega)\xi^{'}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\xi,\eta) + \frac{\partial\zeta}{\partial y}(\xi,\eta)f(\xi,\eta)\right)\sigma^{'} \\
(*) &= \frac{\partial\eta}{\partial s}(\omega)\sigma' + \frac{\partial\eta}{\partial z}(\omega)\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\xi,\eta) + \frac{\partial\eta}{\partial z}(\omega)\frac{\partial\zeta}{\partial y}(\xi,\eta)f(\xi,\eta) \\
(**) &= 0 + 1\cdot f(\xi,\eta) = f(x,y)
\end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun einige Anwendungen.

Anwendung. $y^{'} = f(ax + by + c)$ mit gegebenen reellen a, b, c.
Ohne Einschraenkung $b \neq 0$ (sonst ist sowieso alles klar...). Betrachte die Transformation

$$(x,y) \mapsto (x, ax + by + c)$$

mit der Inversen

$$(x,z) \mapsto (x, \frac{z - c - ax}{b}).$$

Dann loest y die Gleichung $y^{'} = f(ax + by + c)$ genau dann wenn $z = ax + by + c$ die Gleichung

$$z^{'} = a + by^{'} = a + bf(ax + by + c) = a + bf(z)$$

loest. Letzteres ist eine autonome Differentialgleichung. Sie kann wie oben diskutiert geloest werden. Die Loesung der Ursprungsgleichung ergibt sich als

$$y = \frac{1}{b}(z - ax - c).$$

Anwendung - Homogene Differentialgleichung $y^{'} = f(\frac{y}{x})$

Bemerkung. Diese Gleichung heisst homogene Differentialgleichung. Verwechselungen mit der (linearen) homogenen Differentialgleichung $y^{'} + gy = 0$ sind zu vermeiden!

Betrachte die Transformation

$$(x, y) \mapsto (x, \frac{y}{x})$$

mit Inverser

$$(x, z) \mapsto (x, xz).$$

Dann loest y die Differentialgleichung $y^{'} = f(\frac{y}{x})$ genau dann, wenn $z = \frac{y}{x}$ die Differentialgleichung

$$z^{'} = \frac{y^{'}x - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(y^{'} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(f(z) - z\right)$$

loest. Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Sie kann wie oben diskutiert geloest werden. Die Loesung der Ursprungsgleichung wird durch

$$y = xz$$

gegeben.

Bei diesen Untersuchungen wird für die Werte von x jeweils ein Interval zugrundegelegt, das 0 nicht enthaelt.

Ende der Vorlesung

Anwendung $y^{'} = f\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$.

Bemerkung. Diese Differentialgleichung verallgemeinert die ersten beiden Anwendungen. Tatsaechlich werden wir zur Loesung zwei Faelle unteschei-den, die jeweils auf eine der beiden schon behandelten Anwendungen führen.

Fall 1. Es gilt $\det(ab; \alpha\beta) = 0$. Dann ist o.E. $(a, b) = \lambda(\alpha, \beta)$ mit $\lambda \neq 0$. Damit handelt es sich also um

$$y^{'} = f\left(\frac{\lambda(\alpha x + \beta y) + c)}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right) = g(\alpha x + \beta y)$$

mit $g(s) = f(\frac{\lambda s + c}{s + \gamma})$. Dieser Fall wurde schon behandelt.

Fall 2. Es gilt $\det(ab; \alpha\beta) \neq 0$. Dann hat also das Gleichungssystem

$$0 = ax + by + c$$

$$0 = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

eine eindeutig bestimmte Loesung (ξ, η). Sei nun die Transformation

$$(x, y) \mapsto (x - \xi, y - \eta) =: (\overline{x}, \overline{y})$$

mit der Inversen

$$(\overline{x}, \overline{y}) \mapsto (\overline{x} + \xi, \overline{y} + \eta)$$

gegeben. Dann wird $(x, y(x))$ abgebildet auf $(\overline{x}, \overline{y}(\overline{x}))$ mit

$$\overline{y}(\overline{x}) = y(x) - \eta = y(\overline{x} + \xi) - \eta.$$

Fuer $\overline{y}(\overline{x})$ gilt demnach

$$\begin{aligned}
\overline{y}'(\overline{x}) &= y'(\overline{x} + \xi) \\
&= f\left(\frac{a(\overline{x} + \xi) + by(\overline{x} + \xi) + c}{\alpha(\overline{x} + \xi) + \beta y(\overline{x} + \xi) + \gamma}\right) \\
&= f\left(\frac{a(\overline{x} + \xi) + b(\overline{y}(\overline{x}) + \eta) + c}{\alpha(\overline{x} + \xi) + \beta(\overline{y}(\overline{x}) + \eta) + \gamma}\right) \\
(Konstr.\ \xi, \eta) \ : \quad &= f\left(\frac{a\overline{x} + b\overline{y}(\overline{x})}{\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}(\overline{x})}\right) \\
&= f\left(\frac{a + b\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}{\alpha + \beta\frac{\overline{y}}{\overline{x}}}\right) \\
&= g(\frac{\overline{y}}{\overline{x}})
\end{aligned}$$

mit $g(s) = f(\frac{a+bs}{\alpha+\beta s})$. Das ist gerade eine homogene Differentialgleichung. Die Loesung der Ursprungsgleichung ist dann gegeben durch

$$y(x) = \overline{y}(x - \xi) + \eta.$$

KAPITEL 3

Differentialgleichungen in zwei Dimensionen: Erste Integrale, Hamiltonfunktionen und exakte Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt betrachten wir $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und untersuchen das autonome System

$$(x, y)' = (f(x, y), g(x, y)) =: V(x, y) \ \ (*)$$

in der $x - y$-Ebene. Wir bezeichnen die unabhaengige Variable, nach der abgeleitet wird, mit t! (Auf diese Weise werden die Koordinaten in der Ebene wie ueblich mit x und y bezeichnet.) Das Ziel ist natuerlich die Untersuchung von Loesungen.

Unter Umstaenden begnuegt man sich aber mit Kenntnis des *Graphen* der Loesung (d.h. des Bildes der Loesungskurve) *Zeichnung.* Dann verzichtet man also auf Information ueber 'Geschwindigkeiten' und hat dafuer aber das Problem vereinfacht. Dazu gibt es zwei (verwandte) Ansaetze:

- erste Integrale,
- zugehoerige eindimensionale Differentialgleichung.

Das untersuchen wir in diesem Abschnitt.

Definition. *(Erstes Integral) $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst erstes Integral von $(*)$, wenn gilt*

$$\frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{\partial F}{\partial y} g \equiv 0$$

(d.h. wenn das Vektorfeld ∇F senkrecht auf dem Vektorfeld $V = (f, g)$ steht).

Lemma. *(Interpretation erstes Integral) Ist F ein erstes Integral und (I, φ) eine Loesung von $(*)$, so gilt $F \circ \varphi \equiv constant$.*

Beweis. Das folgt direkt mit Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} F \circ \varphi(t) &= \frac{\partial F}{\partial x} \varphi_1'(t) + \frac{\partial F}{\partial y} \varphi_2'(t) \\ (\varphi \ Lsg.) &= \frac{\partial F}{\partial x} f + \frac{\partial F}{\partial y} g \\ (1. \, Integral) &= 0. \end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage. □

Ist F ein erstes Integral, so liegen die Loesungen also auf den Konstanzflaechen von F. Die Konstanzflaechen von F haben (unter geeigneten Voraussetzungen) nach dem Satz ueber implizite Funktionen gerade die Struktur von

Graphen. Das kann eine wichtige Hilfe bei der Untersuchung von Loesungen sein.

Beispiel. $x^{'} = -y$, $y^{'} = x$. Dann ist $F(x, y) = x^2 + y^2$ ein erstes Integral. Die Loesungen der Differentialgleichung verlaufen also innerhalb von Kreislinien.

Einen wichtigen Spezialfall eines ersten Integral lernen wir als naechstes kennen.

DEFINITION. *(Hamiltonsch) $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heisst $(*)$ hamiltonsch, wenn es ein stetig differenzierbares $H : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit*

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -g, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = f.$$

In diesem Fall heisst H Hamiltonfunktion von $(*)$.

Der Nutzen von Hamiltonschen Vektorfeldern liegt in folgendem Lemma.

LEMMA. *Ist H eine Hamiltonfunktion, so ist H ein erstes Integral. Die Loesungen von $(*)$ verlaufen also innerhalb der Niveauflaechen (linien) von H.*

Beweis. Direkte Rechnung:

$$\frac{\partial H}{\partial x} f + \frac{\partial H}{\partial y} g = -gf + fg = 0.$$

□

Bemerkungen.

- Auf jeder Zusammenhangskomponente ist eine Hamiltonfunktion eindeutig bis auf eine Konstante. (Bew. H_1, H_2 hamiltonsch. Dann gilt $\nabla(H_1 - H_2) \equiv 0$. Damit folgt nach dem MWS auf jeder Zusammenhangskomponente $H_1 - H_2 = C$.)
- In den Anwendungen der Physik ist die Hamiltonfunktion (oft) gerade die Energie des Systems (Energieerhaltung).

Offenbar ist $(*)$ Hamiltonsch, genau dann, wenn $(-g, f)$ ein Gradientenfeld ist. Damit koennen wir mit den aus Analysis II bekannten Methoden entscheiden, ob $(*)$ Hamiltonsch ist und ggf eine Hamiltonfunktion bestimmen. Das diskutieren wir als naechstes.

Ende der Vorlesung.

Wir beginnen mit zwei *Erinnerungen:*

Sternfoermig. Eine Teilmenge D des Euklidischen Raumes heisst sternfoermig (mit Zentrum $p \in D$), wenn die Verbindung

$$\{p + t(x - p) : 0 \leq t \leq 1\}$$

von p nch x fuer jedes $x \in D$ ganz in D enthalten ist.

Lemma von Poincaré. Ist D eine offene sternfoermige Menge im Euklidischen Raum $\mathbb{R}^M$, so besagt das Lemma von Poincar'e, dass ein stetig differenzierbares $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^M$ genau dann ein Gradientenfeld ist (d.h. $F = \nabla\Phi$ gilt mit einem stetig differenzierbaren $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{R}$, wenn

$$\partial_j F_i(x) = \partial_i F_j(x)$$

fuer alle $i, j = 1, \dots, M$ und $x \in D$ gilt. Damit erhalten wir als Anwendung.

PROPOSITION. *Ist D sternfoermig und sind f, g stetig diffferenzierbar, so sind aequivalent:*

(i) *$(*)$ ist Hamiltonsch (d.h. $(-g, f)$ ein Gradientenfeld,*
(ii) *Es gilt $-\partial_y g = \partial_x f$.*

In diesem Fall ergibt sich die Hamiltonfunktion durch Integration von $\partial_x H = -g$ und $\partial_y h = f$ und anschliessendes Vergleichen.

Beispiel - harmonischer Oszillator. Es gilt $F = -ks$ also $ms^{''} = -ks$. Mit den neuen Variablen $x = s$ und $y = ms^{'}$ erhaelt man

$$(x, y)^{'} = (x^{'}, y^{'}) = (\frac{1}{m}y, -kx)$$

also $f(x, y) = \frac{1}{m}y$ und $g(x, y) = -kx$. Damit gilt also

$$\partial_x f = 0,\ \partial_y g = 0.$$

Nach dem Lemma von Poincaré gibt es also eine Hamiltonfunktion $H = H(x, y)$. Diese erfuellt:

$$-\frac{1}{m}y = f = \partial_y H;\ \text{ also } H = \frac{1}{2m}y^2 + C(x)$$

$$+kx = -g = \partial_x H,\ \text{ also } H = \frac{kx^2}{2} + D(y).$$

Insgesamt ergibt sich damit durch Vergleich dann die Hamiltonfunktion

$$H(x, y) = \frac{k}{2}x^2 + \frac{1}{2m}y^2.$$

Nach diesen Ueberlegungen zu ersten Integralen, kommen wir nun zu einer Darstellung mittels Graphen. Dazu eine Vorueberlegung: Ist (x, y) eine Loesung von $(*)$ mit $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$ mit $f(x_0, y_0) \neq 0$, also

$$x^{'}(t_0) = f(x, y) \neq 0,$$

so kann man $x(t)$ um t_0 herum nach t aufloesen, $t = t(x)$ (Zeichnung). Damit genuegt dann der Graph $x \mapsto y(t(x))$ der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = y^{'}(t(x))\frac{dt}{dx} = \frac{y^{'}}{x^{'}} = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}.$$

Es gilt also

$$f(x, y)\frac{dy}{dx} - g(x, y) = 0 \ \ (**)$$

Die Loesungskurve von $(*)$ ist (lokal) durch den Graphen der Loesungen von $(**)$ gegeben. Damit hat man in gewisser Weise das Problem um eine Dimension reduziert! Allerdings verliert man in dieser Darstellung Information ueber die Geschwindigkeit, in der die Loesungskurven durchlaufen werden. *Zeichnung.*

LEMMA. *(Loesung als Graph) Ist (φ, I) eine Loesung von $(*)$ durch (x_0, y_0) mit $f(x_0, y_0) \neq 0$, so verlaeuft die Loesungskurve lokal im Graphen der Loesung von $(**)$.*

Bemerkung. Ist $V(x,y) \neq 0$ (d.h. (x,y) ist kein Gleichgewicht), so gilt $f(x,y) \neq 0$ oder $g(x,y) \neq 0$. Entsprechend kann man dann den obigen Satz zumindest lokal anwenden nach ggf Vertauschen von f und g und x und y. In diesem Sinne liefert der Satz ein effektives Verfahren ausserhalb der Gleichgewichtspunkte.

Wir untersuchen nun die Loesungen des reduzierten System $(**)$.

DEFINITION. *(Exakte Differentialgleichung) Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Die Differentialgleichung $(**)$ heisst exakt, wenn es ein $S : D \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt mit*

$$\frac{\partial S}{\partial x} = -g, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = f.$$

Bemerkung.

- Eine Stammfunktion S zu $(**)$ ist gerade ein Hamiltonfunktion H zu $(*)$ (und umgekehrt).
- Haengt g nur von x ab und f nur von y, so ist $(**)$ exakt mit $S = F(y) - G(x)$ mit Stammfunktionen F von f und G von g. Dann handelt es sich im wesentlichen um eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen der Form $y^{'} f(y) - g(x) = 0$.
- Die Definition sagt gerade, dass die 1-Form $\omega = f dy - g dx$ exakt ist, d.h. es gilt $\omega = dF$.

Beispiel. Im Falle des harmonischen Oszillator $(x,y)^{'} = (1/my, -kx)$ erhaelt man als System $(**)$ gerade

$$\frac{1}{m} y y^{'} + kx = 0.$$

Das ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen und mit Stammfunktionen $F(y) = \frac{1}{2m} y^2$ von $f(y) = 1/my$ und $G(x) = -\frac{k}{2} x^2$ von $g(x) = -kx$ ist dann

$$S(x,y) = F(y) - G(x) = \frac{1}{2m} y^2 + \frac{k}{2} x^2$$

die uns schon als Hamiltonfunktion bekannte Stammfunktion.

Offenbar gilt direkt nach den Definitionen.

LEMMA. *Aequivalent:*

(i) *Es ist $(*)$ Hamiltonsch.*
(ii) *Es ist $(**)$ exakt.*
(iii) *Es ist $(-g, f)$ ein Gradientenfeld.*

Ist D sternfoermig und sind f, g stetig differenzierbar, so ist dies aequivalent zu

(iv) $-\partial_y g = \partial_x f$.

Ohne Bedingungen an D ist in jedem Fall (iv) eine notwendige Bedingung (falls f, g stetig differenzierbar sind).

Bemerkung. Statt der Sternfoermigkeit reicht es auch vorausszusetzen, dass D einfach zusammenhaengend ist.

Ende der Vorlesung.

Wir fassen unsere bisherigen Ueberlegungen zusammen.

THEOREM. *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(x,y) \neq 0$ fuer alle $x, y \in D$. Dann verlaeuft die Loesung von $(*)$ lokal im Graphen der Loesung von*

$$fy' - g = 0.$$

Ist diese Gleichung exakt mit Stammfunktion S, so erhaelt man alle ihre Loesungen durch Aufloesen der Gleichung $S(x,y) = C$.

Beweis. Die erste Aussage wurde oben schon gezeigt. (Beachte, dass $f(x,y) \neq 0$ nach Voraussetzung). Wir kommen nun zur zweiten Aussage: Ist φ eine Loesung, so gilt

$$\frac{d}{dx}S(x,\varphi(x)) = \frac{\partial S}{\partial x}(x,\varphi(x)) + \frac{\partial S}{\partial y}\varphi'(x) = -g(x,\varphi(x)) + f(x,\varphi(x))\varphi'(x) = 0.$$

Umgekehrt ist wegen $\partial_y S = f \neq 0$, das Aufloesen stets lokal eindeutig moeglich und liefert nach dem Satz ueber implizite Funktionen eine Funktion $y = y(x)$ mit

$$S(x, y(x)) \equiv C$$

also

$$0 = \partial_x S + \partial_y S y' = fy' - g.$$

Das beendet den Beweis. $\square$

Manchmal ist eine Differentialgleichung nicht exakt, wird aber exakt nach Multiplikation mit einer Funktion $M = M(x,y)$, die nicht verschwindet. Dann heisst diese Funktion ein *integrierender Faktor* oder *Eulerscher Multiplikator*. Die Multiplikation mit einem solchen Faktor aendert die Loesungsmenge nicht (da er nicht verschwindet).

LEMMA. *(Lokales Berechnen integrierender Faktor) Es gilt lokal:*
(a) Verschwindet f nicht, so ist $M = M(x)$ genau dann ein integrierender Faktor, wenn gilt

$$\frac{M'}{M} = -\frac{\partial_y g + \partial_x f}{f}.$$

Insbesondere existiert ein integrierender Faktor, der nur von x abhaengt, wenn die rechte Seite nur von x abhaengt.
(b) Verschwindet g nicht, so ist $M = M(y)$ ein integrierender Faktor, genau dann, wenn gilt

$$\frac{M'}{M} = -\frac{\partial_y g + \partial_x f}{g}.$$

Insbesondere existiert ein integrierender Faktor, der nur von y abhaengt, wenn die rechte Seite nur von y abhaengt.

Bemerkung. Die integrierenden Faktoren im Lemma ergeben sich durch Integration einer Gleichung mit getrennten Variablen zu:

$$\ln(M/M_0) = \text{Stammfunktion von}(...)$$

also

$$M = M_0 e^{Stammfunktion}.$$

Beweis. Zu loesen ist $Mf = \partial_y S$, $-Mg = \partial_x S$. Lokal ist unsere Menge sternfoermig und wir erhalten als notwendige und hinreichende Bedingung (Lemma von Poincaré)

$$\partial_x(Mf) = \partial_y(-Mg).$$

Dies ist aequivalent zu

$$\partial_x M \cdot f + M\partial_x f = (-\partial_y M) \cdot g - M\partial_y g.$$

(a) Es ist $M = M(x)$ genau dann, wenn $\partial_y M = 0$. Damit ergibt sich

$$\partial_x M \cdot f + M(\partial_x f) = -M\partial_y g$$

und nach Division durch M und f die Behauptung.

(b) Es ist $M = M(y)$ genau dann, wenn $\partial_x M = 0$. Damit ergibt sich

$$+M\partial_x f = (-\partial_y M) \cdot g - M\partial_y g$$

und nach Division durch M und g die Behauptung. □

Beispiel. Wir betrachten das Raeuber-Beute Modell.

$$x^{\cdot} = ax - bxy =: f(x, y)$$

$$y^{\cdot} = -cy + dxy =: g(x, y)$$

mit gegebenem $a, b, c, d > 0$. Das System ist nicht Hamiltonsch. (Denn die Integrabilitaetsbedingung ist offenbar nicht erfuellt, da gilt $\partial_x f = a - by$, $-\partial_y g = -c + dx$.) Es fuehrt auf die Differentialgleichung

$$(ax - bxy)y^{'} + (cy - dxy) = 0.$$

(Loesungskurven des Ursprungssystem liegen auf Niveauflaechen dieser Differentialgleichung.) Diese Differentialgleichung ist nicht exakt (da urspruengliche Differentialgleichung nicht Hamiltonsch ist). Multiplikation mit $M(x, y) = \frac{1}{xy}$ fuehrt auf

$$\left(\frac{a}{y} - b\right) y^{'} + \left(\frac{c}{x} - d\right) = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist exakt, da die Vorfaktoren nur von x bzw. y abhaengen (s.o.). Eine Stammfunktion is gegeben durch

$$S(x, y) = a \ln y - by + c \ln x - dx.$$

Damit liegen die Loesungskurven der Ursprungsgleichung auf den Konstanzflaechen von S. Statt Konstanzflaechen von S kann man natuerlich auch Konstanzflaechen von e^S betrachten. Es geht also um die Mengen

$$N_K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^a e^{-by} = Kx^{-c}e^{dx}\}$$

fuer ein festes $K \geq 0$.
Wir analysieren nun N_K mit hilfe der beiden Funktionen $h(y) = y^a e^{-by}$ und $k(x) = Kx^{-c}e^{dx}$.
Zeichnung (linke Seite h): beschraenkte nichtnegative Funktion, verschwindet bei 0 und ∞.
Zeichnung (rechte Seite k): positive Funktion, explodiert bei $x = 0$ und $x = \infty$.

Da h global nach oben beschraenkt ist, muss auch k auf N_K nach oben beschraenkt sein. Daher ist also die x Koordinate von der Null weg beschraenkt und nach oben beschraenkt. Da k global nach unten von Null weg beschraenkt ist, muss auch h auf N_K von der Null weg beschraenkt sein. Damit folgt also, dass auch y nach oben und von der Null weg beschraenkt ist. Insgesamt folgt also, dass sowohl x als auch y auf N_K von Null wegbeschraenkt und nach oben beschraenkt sind.
Eine etwas feinere Analyse zeigt, dass die N_K sogar geschlossene Kurven sind.

KAPITEL 4

Existenz von Loesungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Existenz von Loesungen. Es zeigt sich, dass Existenz von Loesungen lokal unter sehr allgemeinen Bedingungen gilt. Es muss lediglich die Stetigkeit der rechten Seite vorausgesetzt werden.

Aus den abstrakten Ueberlegungen des ersten Kapitels wissen wir, dass es genuegt Differentialgleichung erster Ordnung d.h.. der Form

$$y' = f(x,y)$$

zu untersuchen (da der allgemeine Fall darauf zurueckgefuehrt werden kann).

1. Der Peanosche Existenzsatz (Lokale Existenz von Loesungen)

In diesem Abschnitt widmen wir uns dem folgenden Satz.

THEOREM. *(Peanoscher Existenzsatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Sei $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Seien $a > 0$ und $r > 0$ mit*

$$Z := [x_0 - a, x_0 + a] \times B_r(y_0) \subset \Omega$$

gewaehlt. Sei $M := \sup\{|f(x,y)| : (x,y) \in Z\}$ und $\beta := \min\{a, \frac{r}{M}\}$. Dann existiert eine Loesung des Anfangswertproblem

$$y' = f(x,y) \;\; y(x_0) = y_0$$

auf $[x_0 - \beta, x_0 + \beta]$.

Bemerkungen.

- Der Wert fuer β ergibt sich als der kleinste Wert zu dem die Loesung die Menge Z verlassen haben kann. (Zeichnung)
- Die Voraussetzungen sind in gewisser Weise optimal, denn es wird nur die Stetigkeit von f vorausgesetzt und eine solche Voraussetzung ist notwendig (s.o.).
- Der Satz liefert keine Eindeutigkeit und Eindeutigkeit wird unter diesen Voraussetzungen im Allgemeinen nicht gelten (vgl. Beispiele $y' = |y|^{1/2}$...)
- Der Satz gibt ein explizites Intervall auf dem die Loesung existiert.

Ende der Vorlesung.

Wir beschreiben nun die *Idee des Beweises* (und verzichten auf Details). Betrachte $y' = f(y)$, $y(x_0) = y_0$. (Zeichnung). Zeige Existenz der Loesung in zwei Schritten:

Schritt 1: Betrachte Zerlegung $\mathcal{Z}$ von $[x_0, x_0 + \beta]$ in (kleine) Teilintervalle via $\mathcal{Z} : x_0 < x_1 < x_2 < \ldots x_{n+1} = x_0 + \beta$ und definiere *Naeherungsloesung* $\varphi = \varphi_{\mathcal{Z}}$ durch das 'Euler Polygon'

$$\phi(x) = \phi(x_0) + (x - x_0) f(x_0, \phi(x_0)) : x \in [x_0, x_1]$$

$$\phi(x) = \phi(x_1) + (x - x_1)f(x_1, \phi(x_1) : x \in [x_1, x_2]$$
$$\ldots$$

Fuer diese ϕ gilt

$$\phi^{'}(x) = f(x_j, \phi(x_j))$$

fuer alle $x \in [x_j, x_{j+1}]$. Da f und ϕ stetig sind, ist die rechte Seite 'nahe' an dem gewuenschten Wert $f(x, \phi(x))$, wenn die Abstaende von x_j zu x_{j+1} klein sind. In diesem Sinne ist ϕ nahe an einer Loesung (also eine Naeherungsloesung).
Schritt 2. Zeige, dass die $\phi = \phi_{\mathcal{Z}}$ gegen eine Loesung des Anfangswertproblem konvergieren, wenn man die Zerlegungen immer feiner macht. (Das sind zwei Aussagen: Konvergenz der Naeherungsloesungen gegen einen Grenzwert und Aussage, dass der Grenzwert eine Loesung ist).
Das beendet die Diskussion des Beweises.

Bemerkungen.

- Der diskutierte Beweis liefert auch numerisch nuetzliches Verfahren zur Bestimmung von Loesungen: Eulersche Polygone.
- Der diskutierte Beweis rechtfertigt ebenfalls den zeichnerischen Zugang zur Diskussion von Loesungen.

2. Maximale Loesungen und globale Existenz

In diesem Abschnitt diskutieren wir das Konzept von maximaler Loesung. Das wird es uns erlauben, einen 'globalen' Existenzsatz fuer Loesungen zu beweisen.

Definition. *(Maximale Loesung) Eine Loesung (φ, I) der Differentialgleichung $y' = f(t, y)$ heisst rechtsmaximal, wenn sie keine echte Fortsetzung nach rechts erlaubt (d.h. keine Loesung (ψ, J) mit $I \subset J$, $\varphi = \psi$ auf I und $J \setminus I$ enthaelt einen Punkt groesser als alle Punkte von I). Entsprechend definiert man linksmaximal. Eine Loesung heisst maximal, wenn sie rechts- und linksmaximal ist.*

Bemerkung. Das Intervall I einer rechts / links maximale Loesung (I, φ) ist am rechten / linken Randpunkt offen (da sonst nach dem lokalen Existenzsatz eine Fortsetzung existierte).

Maximale Loesungen sind dadurch charakterisiert, dass sie lange genug existieren, um jedes Kompaktum zu verlassen:

Lemma. *(Charakteristische Eigenschaft maximaler Loesungen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $(x_0, y_0) \in \Omega$. Sei $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Loesung von $y^{'} = f(x, y)$ mit $y(x_0) = y_0$ mit $\min I = x_0$. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es ist (φ, I) rechtsmaximal.*
(ii) *Fuer jedes kompakte $K \subset \Omega$ existiert ein $\widetilde{x} \in I$ mit $(\widetilde{x}, \varphi(\widetilde{x})) \notin K$.*

(iii) *Fuer jedes kompakte $K \subset \Omega$ existiert ein $\widetilde{x} \in I$ mit $(x, \varphi(x)) \notin K$ fuer alle $x \in I$ mit $\widetilde{x} \leq x$.*

Entsprechendes gilt fuer linksmaximale Loesungen.

Beweis. (iii)$\Longrightarrow$ (ii): Klar.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Angenommen (I, φ) ist nicht rechtsmaximal. Dann existiert also eine echte Fortsetzung (J, ψ) nach rechts. Damit existiert ein $\widetilde{x} \in J$ mit $I \subset [x_0, \widetilde{x}] \subset J$. Dann gilt aber

$$\text{Graph von } \varphi \subset \text{Graph von } \psi_{[x_0, \widetilde{x}]} \text{ kompakt.}$$

Das ist ein Widerspruch zu (ii).

(i) $\Longrightarrow$ (iii): Sei $I = [x_0, b)$. Angenommen es gibt ein kompaktes $K \subset \Omega$, das φ nicht endgueltig verlaesst. Dann gilt $b < \infty$. Weiterhin gibt es dann eine Folge (x_n) in I mit $x_n \to b$ so dass $(x_n, \varphi(x_n))$ in K bleibt. Ohne Einschraenkung koennen wir dann $(x_n, \varphi(x_n))$ als konvergent voraussetzen (da K kompakt). Sei (b, y^*) der Grenzwert. Sei $s > 0$, $r > 0$, so dass

$$Z = [b - s, b] \times B_{2r}(y^*) \subset \Omega.$$

Dann ist f auf Z beschaenkt durch ein M. Damit folgt, dass fuer ein genuegend kleines $\delta > 0$ der Graph jeder Loesung von $y' = f(x, y), y(\widetilde{x}) = \widetilde{y}$ auf $[\widetilde{x}, b]$ in Z enthalten ist, wenn $\widetilde{x} \in [b - \delta, b]$, $\widetilde{y} \in B_\delta(y^*)$. Fuer genuegend grosses $N \in \mathbb{N}$ gilt aber nun $(x_N, \varphi(x_N)) \in [b - \delta, b] \times B_\delta(y^*)$. Damit ist also insbesondere der Graph von $(\varphi, [x_N, b))$ in Z enthalten. Insbesondere ist dann φ' auf $[x_N, b)$ beschraenkt durch M. Damit ist φ auf $[x_N, b)$ gleichmaessig stetig und es existiert $\lim_{x \to b} \varphi(x)$. Aufgrund der Definition von y^* muss gelten $\lim_{x \to b} \varphi(x) = y^*$. Damit koennen wir φ fortsetzen durch eine lokale Loesung des Anfangwertproblemes $y' = f(x, y), y(b) = y^*$. Das liefert einen Widerspruch zur Maximalitaet (i). $\square$

Bemerkung. Auf $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ gibt es zwei Arten, wie die Loesung jedes Kompaktum verlassen kann: Sie existiert entweder fuer alle Zeiten oder sie existiert nur fuer endliche Zeit, nutzt diese aber um mit ihren Funktionswerten bis zum Rand von Ω zu gelangen. (Zeichnung). So kennen wir es auch von Beispielen. (Fuer allgemeine Ω bedeutet Maximalitaet, dass die Loesung sich dem Rand von Ω naehert.)

Wir koennen aus dem Satz leicht eine Folgerung fuer Mengen Ω der Form $\Omega = \mathbb{R} \times U$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen ziehen.

FOLGERUNG. *Sei $\Omega = \mathbb{R} \times U$ mit $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (wie es z.b. fuer autonome Systeme gilt). Ist $(\varphi, [x_0, \widehat{x}))$ eine rechtsmaximale Loesung von $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, so existiert zu jedem kompakten $K \subset U$ ein $x_K \in (x_0, \widehat{t})$ mit $\varphi(x) \notin K$ fuer $x \geq x_K$ falls $\widehat{x} < \infty$.*

Beweis. Betrachte das kompakte $[x_0, \widehat{x}] \times K \subset \Omega$ und wende das vorige Lemma an. $\square$

Wir kommen nun zum schon erwaehnten globalen Existenzsatz.

THEOREM. *(Existenz maximaler Loesungen) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und $(x_0, y_0) \in \Omega$ beliebig. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$y^{'} = f(x,y),\ y(x_0) = y_0,$$

eine maximale Loesung.

Beweis. Wir zeigen nur die Existenz rechtsmaximaler Loesungen: Waehle eine Folge kompakter Mengen K_n via $K_n := \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) \geq \frac{1}{n}\} \cap B_n(0)$.)
Aufgrund des lokalen Existenzsatz und der Kompaktheit der K_n gilt die folgende Behauptung:

Beh. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $\beta_n > 0$, so dass eine Loesung von $y^{'} = f(x,y), y(x^*) = y^*$ mit $(x^*, y^*) \in K_n$ auf $[x^*, x^* + \beta_n]$ existiert.

Damit koennen wir nun induktiv $b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots$ und Loesungen $\varphi_n : [x_0, b_n] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ konstruieren mit

$$\varphi_1 : [x_0, b_1] \longrightarrow \Omega, ;\ mit\ \ (b_1, \varphi(b_1)) \notin K_1,$$

$$\varphi_2 : [x_0, b_2] \longrightarrow \Omega, ;\ mit\ \ \varphi_2|_{[x_0,b_1]} = \varphi_1 \ \text{ und }\ (b_2, \varphi(b_2)) \notin K_2,$$

...

$$\varphi_n : [x_0, b_n] \longrightarrow \Omega, ;\ mit\ \ \varphi_n|_{[x_0,b_{n-1}]} = \varphi_{n-1} \ \text{ und }\ (b_n, \varphi(b_n)) \notin K_n,$$

...

Dann ist $\varphi : [x_0, \lim b_n) \longrightarrow \Omega$, $\varphi|_{[x_0,b_n]} = \varphi_n$, eine Loesung des Anfangswertproblem mit $(b_n, \varphi(b_n)) \notin K_n$. Damit handelt es sich um eine Loesung, die nicht in irgendeinem Kompaktum (in Ω) enthalten ist. (Denn fuer jedes solche Kompaktum gilt wegen $\Omega = \cup K_n^\circ$ natuerlich $K \subset \cup K_n^\circ$ also $K \subset \cup_{j=1}^N K_j \subset K_N$.) Nach der Charakterisierung fuer maximale Loesungen, handelt es sich also um eine maximale Loesung. □

Ende der Vorlesung

FOLGERUNG. *Situation wie im Satz. Dann laesst sich jede Loesung des Anfangswertproblem*

$$y^{'} = f(x,y), y(x_0) = y_0,$$

zu einer maximalen Loesung fortsetzen.

Beweis. Uebung. (Sei $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine Loesung. Wir untersuchen nur Rechtsmaximalitat und nehmen an, dass x_0 der linke Randpunkt von I ist. Sei b der rechte Randpunkt. Hierbei sind die Faelle $b = \infty$ und $b \notin I$ moeglich. Wenn die Loesung jedes Kompaktum verlaesst ist sie schon maximal und es ist nichts zu tun. Es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, dass die Loesung in einem Kompaktum enthalten ist. Zeige, dass dann der Grenzwert

$$\lim_{x \to b} \varphi(x) =: y^*$$

existiert. Nach dem vorigen Satz existiert eine maximale Loesung von $y^{'} = f(x,y), y(b) = y^*$. Fuegt man diese an die Loesung φ an, so erhaelt man eine rechtsmaximale Loesung. □

Die Saetze ueber Existenz und Charakterisierung maximaler Loesungen erlauben es auf 'langes' Existieren der Loesung zu schliessen, wenn naemlich die Loesung Kompakta nicht verlassen kann. In diesem Sinne ist eine allgemeine 'Philosophie', dass Schranken an das Wachstum von Loesungen effektiv Existenz von Loesungen garantiert.

FOLGERUNG. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *offen und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *stetig. Sei* $(x_0, y_0) \in \Omega$. *Dann gilt fuer das zugehoerige Anfangswertproblem und*

$$y' = f(x, y), \ y(x_0) = y_0 :$$

(a) Enthaelt Ω *die Menge* $A := [x_0, x_0 + a] \times B_b(y_0)$ *und ist* f *auf* A *durch* M *beschraenkt, so existiert jede maximale Loesung auf ganz* $[x_0, x_0 + \min\{a, b/M\}]$.
(b) Enthaelt Ω *den Streifen* $A = [x_0, x_0 + a] \times \mathbb{R}^m$ *und gilt* $|f(x, y)| \leq M_0 + L|y|$, *so existiert jede maximale Loesung auf ganz* $[x_0, x_0 + a]$.
(c) Ist $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *und gilt* $|f(x, y)| \leq M_0 + L|y|$, *so existiert jede maximale Loesung auf ganz* $\mathbb{R}$.

Beweis. Aufgrund des vorangegangenen Satzes reicht es jeweils zu zeigen, dass die maximale Loesung den Rand des Definitionsbereiches fruehstens in der angebenen Zeit erreicht.
(a) Solange y in A existiert gilt $|y'| = |f(x, y)| \leq M$. Daher kann die Loesung fruehstens bei a bzw. b/M an den Rand von A stosssen.
(b) Nach Voraussetzung gilt $|f(x, y)| \leq M_0 + L|y|$. Damit folgt fuer $g(x) = (1 + |y(x)|^2)^{1/2}$ also

$$g'(x) = \frac{y(x)y'(x)}{g(x)} \leq \frac{|y(x)|}{g(x)}|f(x, y(x))| \leq |f(x, y(x))| \leq M_0 + L|y(x)| \leq Kg(x).$$

mit $K = L + |M_0|$. Damit folgt mit Trennung der Variablen

$$g(x) \leq const e^{Kx}$$

solange y existiert. Das liefert

$$|y(x)| \leq g(x) \leq Ae^{Kx}$$

solange y existiert. Damit kann y den Rand des Streifens fruehstens in $x_0 + a$ erreichen.
(c) Aus (b) folgt, dass die maximale Loesung auf jedem Streifen rechts von x_0 existiert. Damit folgt die Behauptung. □

Wir betrachten jetzt 'zeichnerisch' einige Sitationen von autonomen Situationen, in denen eine maximale Loesung fuer alle Zeiten existieren muss.

Beispiel. Ebene, f verschwindet ausserhalb von Kompaktum.

Beispiel. Ebene, f blockiert Kompaktum durch 'Pfeile nach Innen'.

Beispiel. Auf $\mathbb{R}$, Verhalten zwischen zwei Nullstellen von f.

Beispiel. Ebene, f blockiert Kompaktum durch Kreis von Fixpunkten und es gilt Eindeutigkeit der Loesung.

Beachte. Die Betrachtungen dieses Abschnittes gelten auch fuer $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^k$ und stetiges $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^k$ (indem man naemlich $\mathbb{C}^k$ durch $\mathbb{R}^m$ mit $m = 2k$ ersetzt).

KAPITEL 5

Der Eindeutigkeitssatz

1. Die lokale Lipschitzbedingung

In diesem Abschnitt lernen wir die Eigenschaft kennen, die die entscheidende Voraussetzung fuer den Eindeutigkeitssatz sein wird.

Definition. *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *offen und*

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m, \;\; (x, y) \mapsto f(x, y)$$

gegeben.
(a) Es erfuellt f *eine globale Lipschitzbedingung bzgl.* y *, wenn eine Konstante L (die Lipschitzkonstante) existiert mit*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \;\; \textit{fuer alle} \, (x, y_1), (x, y_2) \in \Omega.$$

(Es handelt sich um 'dasselbe' x***. Nur*** y ***wird variiert!)***
(b) Es erfuellt f *eine lokale Lipschitzbedingung bzgl.* y*, wenn es zu jedem Punkt* $(x_0, y_0) \in \Omega$ *eine Umgebung* $U \subset \Omega$ *gibt, so dass die Einschraenkung* $f|_{\Omega \cap U}$ *von* f *auf* $\Omega \cap U$ *eine Lipschitzbedingung mit Lipschitzkonstante* $L(U)$ *erfuellt.*

Notation. Statt von Lipschitzbedingung bezueglich y werden wir im folgenden oft verkuerzt nur von Lipschitzbedingung sprechen. Es wird sich aber immer um eine Lipschitzbedingung bzgl y handeln.

Bemerkung. Die Lipschitzbedingung ist eine starke Form der Stetigkeit (in y). Man kann sie auch verstehen (s.u.) als eine schwache Form der Differenzierbarkeit.

Es kann sehr wohl passieren, dass eine Funktion einer lokalen Lipschitzbegingung genuegt, aber keiner globalen (wenn naemlich die Konstanten $L(U)$ fuer wachsende U gegen ∞ konvergieren). Dazu diskutieren wir ein Beispiel.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2$. Dann genuegt f einer lokalen Lipschitzbedingung. Denn es gilt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |xy_1^2 - xy_2^2| = |x(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| \leq |x(y_1 + y_2)||y_1 - y_2|.$$

(Fuer y_1, y_2, t aus einer beschraenkten Menge, bleibt der Vorfaktor $|t(y_1+y_2)|$ beschraenkt...) Allerdings genuegt f nicht einer globalen Lipschitzbedingung: Betrachtet man naemlich $y_2 = y_1 + 1$ so gilt mit der gerade durchgefuehrten Rechnung

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |x(2y_1 + 1)||y_2 - y_1|$$

und damit fuehrt

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \leq L$$

auf $|x||2y+1| \leq L$ also $L \to \infty$ for $y \to \infty$ and $x \neq 0$.

Es kann auch sein, dass eine Funktion nicht einmal lokal einer Lipschitzbedingung genuegt:

Beispiel. Die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|^{1/2}$ genuegt (bei 0) keiner Lipschitzbedingung. Denn es gilt

$$|f(x,0) - f(x, \frac{1}{n^2})| = |\frac{1}{n^2}|^{1/2} = \frac{1}{n} = n|\frac{1}{n^2} - 0|.$$

Der folgende Satz zeigt, dass stetige partielle Differenzierbarkeit (bzgl. y) eine Lipschitzbedingung impliziert.

THEOREM. *Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $(x,y) \mapsto f(x,y)$ stetig und bzgl. y stetig partiell differenzierbar (d.h. die partiellen Ableitungen von f bzgl. y sind stetig auf Ω). Dann genuegt f einer lokalen Lipschitzbedingung. Ist zusaetzlich Ω konvex und die partiellen Ableitungen von f bzgl. y auf Ω beschraenkt, so genuegt f sogar einer globalen Lipschitzbedingung.*

Beachte. Eine entsprechende Aussage (mit entsprechendem Beweis) gilt natuerlich fuer Funktionen auf $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{C}^k$, wenn man $\mathbb{C}^k$ als $\mathbb{R}^{2k}$ auffasst.

Beweis. Der Beweis ist im wesentlichen eine Folge des Mittelwertsatzes. Hier sind die Details:

Nach dem Mittelwertsatz gilt fuer eine stetig differenzierbare Funktion $g : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $|\partial_k g_j(y)| \leq M$, $k = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m$ fuer alle $y \in U$ die Abschaetzung

$$|g(y_1) - g(y_2)| \leq M\sqrt{mn}|y_1 - y_2|$$

falls die Verbindungsstrecke von y_1 und y_2 ganz in U enthalten ist.

Da Ω offen ist und die partiellen Ableitungen von f nach y stetig sind, koennen wir zu jedem (x_0, y_0) eine Umgebung

$$V = (x_0 - r, x_0 + r) \times U_r(x_0) \subset \Omega$$

waehlen, auf der die partiellen Ableitungen von f nach y beschraenkt sind (durch ein M). Da V konvex ist, folgt aus dem Mittelwertsatz sofort die erste Behauptung.

Die zweite Behauptung folgt aus dem Mittelwertsatz mit der Wahl $V = \Omega$. □

Bemerkung. Auch wenn f nicht differenzierbar ist, kann trotzdem eine Lipschitzbedingung (bezueglich y) gelten. Beispiel: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(y) = |y|$.

2. Der Eindeutigkeitssatz

In diesem Abschnitt lernen wir den grundlegenden Satz ueber Eindeutigkeit von Loesungen gewoehnlicher Differentialgleichung kennen.

THEOREM. *(Lokale Lipschitzbedingung impliziert globale Eindeutigkeit) Sei* $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ *offen und* $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *stetig und erfuelle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl.* y*. Sind* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *und* $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *Loesungen der Differentialgleichung*

$$y' = f(x, y), \ \ \textit{mit } \varphi(x_0) = \psi(x_0)$$

fuer ein $x_0 \in I$*, so gilt* $\varphi = \psi$*.*

Bemerkung. Erfuellt f die Bedingungen des Satzes und sind ψ und φ Loesungen desselben Anfangswertproblemes auf verschiedenen Intervallen, so muessen sie also auf dem Schnitt der beiden Intervalle uebereinstimmen.

Ende der Vorlesung

Beweis. Wuerde die Aussage nicht gelten, so gaebe es ein

- $x' > x_0$ mit $x \in I$ und $\varphi(x') \neq \psi(x')$,
  oder
- $x' < x_0$ mit $x \in I$ und $\varphi(x') \neq \psi(x')$.

Ohne Einschraenkung koennen wir annehmen, dass der erste Fall vorliegt. Wir betrachten nun das maximale Intervall rechts von x_0 auf dem φ und ψ uebereinstimmen. Genauer sei

$$x_1 := \sup\{t \in I : \varphi(s) = \psi(s) \text{ fuer alle } x_0 \leq s \leq t\}.$$

Nach Voraussetzung gilt

$$x_1 \leq x'.$$

Aufgrund der Stetigkeit von φ, ψ gilt auch

$$y_1 := \varphi(x_1) = \psi(x_1).$$

Zeichnung. Sei $r > 0$, so dass

$$U := (x_1 - r, x_1 + r) \times U_r(y_1) \subset D$$

und f auf U einer lokalen Lipschitzbedingung mit Konstante $L = L(U)$ genuegt. Da φ, ψ stetig sind, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\varphi(x) \in U_r(y_1) \ \text{ und } \ \psi(x) \in U_r(y_1)$$

fuer alle $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$. Ohne Einschraenkung $\delta < r$ (sonst Verkleinern von δ). Fuer $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$ gilt dann aufgrund der Differentialgleichung und der Lipschitzbedingung (evtl. mehr Details)

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \psi(x)| &= |\varphi(x) - y_1 - (\psi(x) - y_1)| \\ &= \left| \int_{x_1}^{x} (f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))ds \right| \\ &\leq \int_{x_1}^{x} L|\varphi(s) - \psi(s)|ds. \end{aligned}$$

(**Idee:**Das ist fuer x nahe x_1 unmoeglich. Denn: linke Seite $|\varphi(x) - \psi(x)|$, rechte Seite $\sim (x - x_1)L|\varphi(x) - \psi(x)|$....)
Waehle ein t mit $x_1 < t \leq x_1 + \delta$ und setze

$$S(t) := \sup\{|\varphi(s) - \psi(s)| : x_1 \leq s \leq t\}.$$

Dann gilt fuer bliebiges $x_1 < x \leq t$ also nach dem gezeigten

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_{x_1}^{x} L|\varphi(s) - \psi(s)|ds \leq (t - x_1)LS(t).$$

Bildet man das Supremum ueber alle $x \in [x_1, t]$ so folgt

$$S(t) \leq (t - x_1)\, L\, S(t).$$

Das ist fuer t nahe x_1 nur moeglich, falls $S(t) = 0$. Widerspruch (zur Konstruktion von x_1). □

Bemerkung.

- Ohne eine lokale Lipschitzbedingung ist die Eindeutigkeistsaussge im allgemeinen falsch (vgl. Beispiel $y' = |y|^{1/2}$.)
- Der Beweis zeigt: $f : [a, b] \longrightarrow [0, \infty)$ mit $f(t) \leq L \int_0^t f(s)ds$ muss identisch verschwinden. Das ist ein Spezialfall eines Gronwall Lemma (vgl. Uebung).

FOLGERUNG. *(Bei eindeutiger Loesbarkeit koennen Gleichgewichtspunkte nicht in endlicher Zeit erreicht werden) Genuegt $y' = f(y)$ einer lokalen Lipschitzbedingung und gilt $f(y_g) = 0$, so kann eine Loesung (φ, I) mit Anfangswert $f(\varphi(x_0)) \neq 0$, den Wert y_g nicht annehmen.*

Beweis. Offenbar ist $\psi(x) \equiv y_g$ eine Loesung von $y' = f(y)$. Aufgrund der Eindeutigkeit kann dann φ nirgends mit ψ uebereinstimmen. □

Beispiel.
- Glatte Funktion auf $\mathbb{R}$ mit Nullstelle. (Zeichnung.)
- Spirale

KAPITEL 6

Das Picard Lindeloef Verfahren

In diesem Abschnitt diskutieren wir kurz ein allgmeinenes Verfahren zum Berechnen von Loesungen (und damit auch Beweisen ihrer Existenz).

Wir betrachten folgende Situation:

(S) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und erfülle eine lokale Lipschitzbedingung bzgl. y.

Nach dem (HDI) loest dann die stetige Funktion $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ das Anfangwertproblem $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ genau dann, wenn

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s))ds$$

fuer alle $x \in I$ gilt. Damit ist also das Anfangswertproblem der Differentialgleichung in eine Integralgleichung umgeformt worden.

Wir wollen nun die Integralgleichung durch Iteration loesen, d.h. wir setzen

$$(*) \qquad y_0(x) \equiv y_0, \;\; y_{k+1}(x) := y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds$$

und zeigen gleichmaessige Konvergenz der y_k auf einem geeigneten Interval. (Es ist nicht schwer zu sehen (s.u.), dass dann der gleichmaessige Grenzwert y der y_k die Integralgleichung loesen muss.)
Hier sind die Details:

Da Ω offen ist, koennen wir ein $r > 0$ finden, so dass

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m : |x - x_0| \leq r, |y - y_0| \leq r\}$$

in Ω enthalten ist und f auf A eine Lipschitzbedingung mit Konstante L erfuellt. Da f stetig ist, existiert weiter ein $M \geq 0$ mit

$$|f(x, y)| \leq M \text{ fuer alle } (x, y) \in A.$$

Sei nun

$$\varepsilon := \min\{r, \frac{r}{M}\}, \;\; I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon].$$

(Die Konstruktion ist gerade so, dass eine eine Kurve, die in (x_0, y_0) beginnt, fruehstens an den Randpunkten von I an den Rand von A stossen kann. Zeichnung.)
Wir definieren nun die Funktionen y_k gemaess $(*)$ fuer $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $x \in I$ und zeigen, dass diese y_k auf ganz I definiert sind und auf I gleichmaessig gegen eine Loesung der Integralgleichung (und damit des Anfangswertproblem) konvergieren: (Wir betrachten nur $[x_0, x_0 + \varepsilon]$.)

Alle y_k sind auf ganz I definiert: Wir zeigen induktiv, dass $|y_k(x) - y_0| \leq r$ fuer alle $x \in I$, $k \in \mathbb{N}_0$ gilt (und damit, dann auch y_{k+1} auf ganz I definiert ist).

Ende der Vorlesung

$k = 0$: ist klar.

$k \Longrightarrow (k+1)$: Es gelte $|y_k - y_0| \leq r$. Dann folgt aus der Rekursionsformel also

$$|y_{k+1}(x) - y_0| \leq |\int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds| \leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_k(s))|ds \leq M\varepsilon \leq r.$$

Es gilt die Abschaetzung $|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{|x-x_0|^{k+1}}{(k+1)!}$ *:*
Induktion:
$k = 0$: Es gilt

$$|y_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(s, y_0)ds| \leq M|x - x_0| = ML^0 \frac{|x - x_0|^{0+1}}{(0+1)!}.$$

$k \Longrightarrow k+1$:

$$\begin{aligned} |y_{k+1}(x) - y_k(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} |f(s, y_k(s)) - f(s, y_{k-1}(s))|ds \\ &\leq \int_{x_0}^{x} L|y_k(s) - y_{k-1}(s)|ds \\ &\leq L\frac{ML^{k-1}}{k!} \int_{x_0}^{x} |s - x_0|^k ds \\ &= ML^k \frac{|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}. \end{aligned}$$

(*Erinnerung.* Gleichmaessige Konvergenz und Stetigkeit des gleichmaessigen Grenzwertes stetiger Funktionen....)

Die Folge y_k konvergiert gleichmaessig gegen ein stetiges y. Fuer alle $x \in I$ und $k \in \mathbb{N}_0$ gilt nach dem vorigen Behauptung

$$|y_{k+1}(x) - y_k(x)| \leq ML^k \frac{\varepsilon^{k+1}}{(k+1)!}.$$

Da die rechte Seite nicht von $x \in I$ abhaengt und summierbar ist (vgl. Exponentialreihe) ist also die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} |y_{k+1}(x) - y_k(x)|$$

auf I gleichmaessig konvergent. Somit konvergiert auch

$$y_{k+1} = y_0 + \sum_{l=0}^{k} (y_{l+1} - y_l)$$

gleichmaessig auf I gegen

$$y = y_0 + \sum_{l=0}^{\infty} (y_{l+1} - y_l)$$

und y ist stetig auf I (als gleichmaessiger Grenzwert stetiger Funktionen).

Der Grenzwert y der y_k loest die Integralgleichung. Wegen

$$|f(x, y(x)) - f(x, y_k(x))| \leq L|y(x) - y_k(x)|$$

und der gleichmaessigen Konvergenz der y_k gegen y, konvergiert $f(x, y_k(x))$ gleichmaessig gegen $f(x, y(x))$. Damit konvergiert dann auch (fuer jedes feste $x \in I$ $\int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds$ gegen $\int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$.
Damit folgt fuer $x \in I$

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{k\to\infty} y_k(x) \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_k(s))ds \right) \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds. \end{aligned}$$

Damit haben wir die gewuenschte Konvergenz der (y_k) gezeigt.

Der Grenzwert y der y_k ist eine Loesung des Anfangswertproblemes. (Das haben wir oben schon erwaehnt.) Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt ist ein stetiges y mit

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y(s))ds$$

differenzierbar mit $y'(x) = f(x, y(x))$ (da $s \mapsto f(s, y(s))$ stetig ist). Damit loest y also die Differentialgleichung. Weiterhin gilt fuer $x = x_0$ offenbar $y(x_0) = y_0$. Damit erfuellt y die Anfangsbedingung. Insgesamt loest also y das Anfangswertproblem.

Bemerkung.

- Der erste Teil des Beweises zeigt, dass die (y_k) auf einem Intervall gleichmaessig konvergiert.
- Der letzte Teil des Beweis zeigt folgendes: Wenn die y_k auf einem Intervall gleichmaessig konvergieren, stellt ihr Grenzwert dort eine Loesung dar.
- Insbesondere kann in konkreten Faellen das Verfahren auf ganz $\mathbb{R}$ konvergieren und dann auch auf ganz $\mathbb{R}$ eine Loesung liefern (auch wenn unsere Betrachtung zunaechst auf ein bestimmtes Intervall eingeschraenkt ist).

Beispiel - Picard Lindeloef zum Loesen von $y' = ay, y(0) = y_0$: Wir erhalten

$$y_0 = y_0,$$

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x ayds = y_0 + xay_0.$$

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x ay_1(s)ds = y_0 + a\int_0^x (y_0 + xay_0)ds = y_0 + xay_0 + \frac{x^2a^2}{2}y_0$$

und (nach einer kleinen Induktion)

$$y_k = y_0 \sum_{l=0}^{k} \frac{x^l a^l}{l!}.$$

Damit ergibt sich fuer die Loesung

$$y(x) = \lim_{k\to\infty} y_k(x) = \lim_{k\to\infty} y_0 \sum_{l=0}^{k} \frac{x^l a^l}{l!} = y_0 e^{xa}.$$

Der Satz von Picard-Lideloeff liefert nur Konvergenz auf einem Intervall um 0 herum. Im konkreten Fall erhaelt man (lokal gleichmaessige) Konvergenz aber auf ganz $\mathbb{R}$. Entsprechend ist y auf ganz $\mathbb{R}$ eine Loesung. (Vgl. Uebung fuer den Fall von Matrizen.)

KAPITEL 7

Stetige Abhaengigkeit von den Anfangsbedingungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Abhaengigkeit der (maximalen) Loesung des Anfangswertproblems

$$y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$$

von

- Anfangspunkt x_0,
- Anfangsbedingung y_0,
- rechter Seite f.

Es wird sich im wesentlichen eine stetige Abhaengigkeit ergeben. Dabei ist aber zu unterscheiden, ob Existenz der Loesung nach Stoerung schon vorausgesetzt ist oder noch zu zeigen. Das fundamentale Hilfsmittel sind jeweils sogenannte Gronwall - Abschaetzungen.

LEMMA. *(Gronwall-Lemma) Sei I ein Intervall in $\mathbb{R}$ mit linkem Endpunkt $a \in \mathbb{R}$ und $u : I \longrightarrow [0,\infty)$ stetig mit*

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t \beta(s)u(s)ds$$

fuer geeignete $\alpha \geq 0$ und stetige $\beta : I \longrightarrow [0,\infty)$. Dann gilt

$$0 \leq u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Bemerkung.

- Falls $\beta \equiv L$ erhalt man die Abschaetzung $u(t) \leq \alpha^{L(t-a)}$.
- Fuer $\alpha = 0$ erhaelt man die Abschaetzung $u \equiv 0$ (vgl. Eindeutigkeitsbeweis).

Beweis. Es reicht den Fall $\alpha > 0$ zu behandeln. Der Fall $\alpha = 0$ folgt dann durch Grenzuebergang. Wir berechnen

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds\right) = \frac{\beta(t)u(t)}{\alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds} \leq \beta(t).$$

(Hier wird in der letzten Abschaetzung die Voraussetzung benutzt.) Integration von a bist t liefert

$$\ln\left(\alpha + \int_a^t \beta(s)u(s)ds\right) - \ln\alpha \leq \int_a^t \beta(s)ds.$$

Exponentieren und Nutzen der Vorausetzung liefert dann die Aussage

$$u \leq \alpha + \int_0^t \beta(s)u(s)ds \leq \alpha e^{\int_a^t \beta(s)ds}.$$

Das beweist die Aussage. □

THEOREM. *(Lokaler Stetigkeitssatz) Sei $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$ offen und $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig und f erfuelle globale Lipschitzbedingung bzgl y mit Konstante L. Sei φ eine Loesung von $y^{'} = f(x, y), y(x_0) = y_0$ und ψ eine Loesung von $y^{'} = g(x, y), z(x_0) = z_0$. Dann gilt, solange φ und ψ existieren, dass*

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\| \leq \|y_0 - z_0\| e^{L(x-x_0)} + \frac{S}{L}\left(e^{L(x-x_0)} - 1\right)$$

mit

$$S := \sup_{(x,v)\in\Omega} \|f(x, v) - g(x, v)\|.$$

Bemerkungen.

- Der Satz kann als eine Aussage zur stetigen Abhaengigkeit verstanden werden.
- Der Beweis setzt Existenz von Loesungen voraus. Er macht keine Aussage darueber, wie Existenz der einen Loesung auf einem Intervall, die Existenz der anderen Loesung auf einem (kleineren) Intervall erzwingt. Daher ist er noch nicht, dass gewuenschte Resultat.
- Das Auseinanderlaufen der Loesungen hat zwei verschiedene Ursachen: Verschiedene rechte Seiten und verschiedene AW. Das entspricht gerade den beiden Termen: Gilt $y_0 = z_0$, so faellt der erste Term weg. Gilt $f = g$ so faellt der zweite Term weg.
- Abschaetzung hat jeweils die Form: Differenz mal exponentielles Wachstum.
- Die Abschaetzung mag grob erscheinen, ist aber optimal, wie folgende Beispiele zeigen:

  $$f(x, y) = g(x, y) = Ly, y_0 \neq z_0.$$

  Dann $\varphi(x) = y_0 e^{L(x-x_0)}$, $\psi(x) = z_0 e^{L(x-x_0)}$.

  $$f(x, y) = Ly, g(x, y) = f(x, y) + \varepsilon.$$

  $\varphi(x) = y_0 e^{L(x-x_0)}, \psi(x) = y_0 e^{L(x-x_0)} + \frac{\varepsilon}{L}(e^{L(x-x_0)} - 1)$.
- Durch Verschieben kann man mit dem Theorem auch den Fall von verschiedenen Anfangszeiten behandeln: $g(x, y) = f(x + (x_1 - x_0), y)$. Ist dann φ eine Loesung von $y^{'} = g(x, y), y(x_0) = y_0$ so ist $\psi = \varphi(\cdot + (x_0 - x_1))$ gerade eine Loesung von

  $$y^{'} = f(x, y), y(x_1) = y_0.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\|\varphi(t)-\psi(t)\| &\le \|y_0-z_0\| + \int_{x_0}^{x} \|f(t,\varphi(t)) - g(t,\psi(t))\| dt \\
&\le \|y_0-z_0\| + \int_{x_0}^{x} \|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\| dt \\
&\quad + \int_{x_0}^{x} \|f(t,\psi(t)) - g(t,\psi(t))\| dt \\
&\le \|y_0-z_0\| + L\int_{x_0}^{x} \|\varphi(t)-\psi(t)\| dt + \int_{x_0}^{x} S dt \\
&= \|y_0-z_0\| + L\int_{x_0}^{x} \left(\|\varphi(t)-\psi(t)\| + \frac{S}{L}\right) dt.
\end{aligned}$$

Damit gilt dann also fuer

$$u(t) := \|\varphi(t)-\psi(t)\| + \frac{S}{L}$$

die Abschaetzung

$$u(t) \le \|y_0-z_0\| + \frac{S}{L} + L\int_{x_0}^{x} u(s) ds.$$

Mit Gronwall folgt

$$u(t) \le (\|y_0-z_0\| + \frac{S}{L}) e^{L(x-x_0)}.$$

Das liefert mittels der Definition von u sofort

$$\|\varphi(t)-\psi(t)\| \le \|y_0-z_0\| e^{L(x-x_0)} + \frac{S}{L}(e^{L(x-x_0)} - 1).$$

Das ist die Behauptung. □

THEOREM. *(Allgemeine Loesung ist stetig) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit lokaler Lipschitzbedingung. Sei*

$$\mathcal{D} := \{(x_0,y_0,z) \in \Omega\times\mathbb{R} : \textit{maximale Loesung von } y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \textit{ existiert noch zu } z\}$$

und

$$\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m, (x_0,y_0,z) \mapsto \textit{Wert der maximalen Loesung von } y' = f(x,y), y(x_0) = y_0 \textit{ an der Stelle}$$

Dann ist $\mathcal{D}$ offen und Φ stetig.

Beweis. Wir skizzieren nur die Ideee. Die Details sind muehselig (aber nicht schwierig). Stetigkeit folgt aus dem vorangegangenen Lemma und der Bemerkung zu verschobenen Funktionen. Die Offenheit folgt, wenn man zeigt, dass die Loesung bei 'kleinen' Aenderungen in der Anfangsbedingungen nicht schnell 'explodieren' kann. Das folgt ebenfalls aus dem vorigen Lemma. □

Ende der Vorlesung.

Wir werden das jetzt noch etwas umformulieren:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$ offen und $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig mit lokaler Lipschitzbedingung. Sei $(\varphi_{x_0,y_0}, I_{x_0,y_0})$ die maximale Loesung von $y' = f(x,y), y(x_0) = y_0$. (Diese ist eindeutig aufgrund der lokalen Lipschitzbedingung.) Dann heisst

$$\mathcal{D} = \{(x_0,y_0,z) \in \Omega\times\mathbb{R} : z \in I_{x_0,y_0}\}$$

der Definitionsbereich der allgemeinen Loesung und

$$\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ (x_0, y_0, z) \mapsto \varphi_{x_0,y_0}(z).$$

heisst die allgemeine Loesung. Der Satz besagt dann, dass die allgemeine Loesung stetig ist und auf einer offenen Menge definiert.

KAPITEL 8

Systeme linearer Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt geht es um Differentialgleichung der Form

$$y^{'} = A(x)y + b$$

mit $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ und $b : J \longrightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Diese Differentialgleichung heisst lineare Differentialgleichung oder System linearer Differentialgleichung. Ist $b \equiv 0$, so spricht man von homogener Gleichung. Wir zeigen zunaechst, dass jedes Anfangswertproblem auf ganz J loesbar ist. Anschliessend untersuchen wir dann die Struktur des Loesungsraumes.

1. Existenz- und Eindeutigkeit der Loesungen fuer Systeme linearer Differentialgleichungen

THEOREM. *(Existenz und Eindeutigkeit der allgemeinen Loesung) Sei $J \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ und $b : J \longrightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Dann ist fuer jedes $x_0 \in J$ und $y_0 \in C^m$ das Anfangswertproblem*

$$y^{'} = A(x)y + b, y(x_0) = y_0$$

eindeutig auf ganz J loesbar.

Beweis. Sei $J_0 \subset J$ eine beliebiges kompaktes Intervall mit $x_0 \in J_0$ und sei G_0 der Streifen $G_0 = J_0 \times \mathbb{C}^m$. (Zeichnung) Dann erfuellt

$$f : G_0 \longrightarrow \mathbb{C}^m,\ f(x, y) = A(x)y + b(x)$$

eine globale Lipschitzbedingung auf G_0 bzgl y:

$$\begin{aligned}
\|f(x,y) - f(x,y^*)\| &= \|A(x)y - A(x)y^*\| \\
&\le \|A(x)\|\|y - y^*\| \\
&\le \max\{\|A(x)\| : x \in J_0\}\|y - y^*\| \\
&= L\|y - y^*\|
\end{aligned}$$

mit $L = \max\{\|A(x)\|\} < \infty$. (Beachte, dass $\|A(\cdot)\|$ auf J stetig ist, also auf dem kompakten J_0 sein Maximum annimmt.) Damit folgt aus den bekannten Saetzen die Existenz und Eindeutigkeit. □

Wir untersuchen nun die Struktur des Loesungsraumes.

- Die Loesungen der homogenen Gleichung $y^{'} = Ay$ bilden einen Vektorraum d.h. es gilt das Superpositionsprinzip: Sind φ, ψ Loesungen und $\lambda \in \mathbb{C}$, so ist auch $\varphi + \lambda\psi$ eine Loesung. (Nachrechnen!) Tatsaechlich gilt auch die Umkehrung: Ist $y^{'} = f(x, y)$ eine Differentialgleichung auf einem Streifen und bilden die Loesungen einen Vektorraum so handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung. (Bew. Uebung)

- Ist V der Vektorraum der Loesungen des homogenen Problems und ψ eine beliebige Loesung des inhomogenen Problems $y' = Ay + b$, so ist $\psi + V$ die Menge der Loesungen des inhomogenen Problems. (Nachrechnen). Die Loesungen des inhomogenen Problems bilden also einen affinen Raum ueber den Loesungen des homogenen Systems.

In den folgenden Abschnitten wird es um eine genaue Beschreibung des Loesungsraumes und Berechnen der Loesungen gehen.

2. Die homogene Gleichung: Loesungmatrix und Fundamentalsystem

Zusammenfassung.

Fundamentalsystem: Basis des (endlichdimensionalen) Vektorraumes der Loesungen.

Loesungsmatrix: Matrix mit Spalten eines speziellen Fundamentalsystem.

Wir bezeichnen die Einheitsmatrix mit E.

LEMMA. *(Loesungsmatrix) Sei $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ stetig.*
(a) Das matrixwertige Anfangswertproblem $Y' = A(x)Y, Y(x_0) = E$ besitzt fuer jedes $x_0 \in J$ genau eine Loesung $Y_{x_0} : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$.
(b) Fuer jedes $y_0 \in \mathbb{C}^m$ und $x_0 \in J$ ist $y = Y_{x_0} y_0$ die eindeutige Loesung des Anfangswertproblem $y' = Ay, y(x_0) = y_0$.
(c) Fuer jedes $x \in J$ und $x_0 \in J$ ist $Y_{x_0}(x)$ invertierbar und es gilt fuer $x_0, x_1, x_2 \in J$

$$Y_{x_0}(x) = Y_{x_1}(x) Y_{x_0}(x_1).$$

Beweis. (a) Offenbar handelt es sich um eine lineare Differentialgleichung fuer das matrixwertige Y (!) Damit folgen Existenz und Eindeutigkeit aus dem vorangehenden Satz.

(b) Aufgrund der Eindeutigkeitsaussage des vorigen Satzes reicht es zu zeigen, dass $\phi := Y_{x_0} y_0$ das Anfangswertproblem $y' = Ay$, $y(x_0) = y_0$ loest. Das folgt direkt durch Nachrechnen:

Differentialgleichung: $\phi'(x) = Y' y_0 = AY y_0 = A\phi(x)$.

Anfangswert $\phi(x_0) = Y_{x_0}(x_0) y_0 = E y_0 = y_0$.

(c) Wegen $Y_{x_0}(x_0) = E$ reicht es die zweite Aussage zu zeigen. (Denn dann folgt aus

$$Y_x(x_0) Y_{x_0}(x) = Y_{x_0}(x_0) = E$$

die Invertierbarkeit von $Y_{x_0}(x)$.) Die zweite Aussage folgt aus der Eindeutigkeit der Loesungen auf folgende Weise: Sei die Funktion $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ definiert durch $\Phi(x) := Y_{x_1}(x) Y_{x_0}(x_1)$. Dann loest Φ offenbar das Anfangswertproblem

$$\Phi(x_1) = Y_{x_0}(x_1), \;\; \Phi' = A\Phi.$$

Ebenso loest natuerlich $Y_{x_0}(x)$ dieses Anfangswertproblem. Damit folgt die Aussage aus der Eindeutigkeit. $\square$

Ende der Vorlesung

Bemerkung.

- Die Spalten y_j der Matrix(-funktion) Y_{x_0} sind also die Loesungen zum Anfangswertproblem $y^{'} = Ay$, $y(x_0) = e_j$. Die Loesung von $y^{'} = Ay$,$y(x_0) = y_0$, ist dann eine Linearkombination der Spalten naemlich
$$y = Yy_0 = \sum y_0(j)y_j.$$
- Die letzte Aussage ist eine 'Gruppeneigenschaft' der Loesungen.
- Die Eindeutigkeit der Loesung liefert einem auch dass keine Nichtnullloesung jemals die Null erreichen kann. (Bew...)

DEFINITION. *(Loesungsmatrix) Die Matrixwertige Funktion $Y = Y_{x_0}$ aus dem vorigen Lemma heisst die Loesungsmatrix der Differentialgleichung $y^{'} = Ay$ zum Anfangspunkt x_0.*

LEMMA. *Sei $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ stetig. Fuer Loesungen $z_1, \ldots, z_k$ von $y^{'} = Ay$ sind aequivalent:*

(i) *Die Funktionen $z_1, \ldots, z_k$ sind linear unabhaengig (d.h. $0 = \sum c_j z_j \Longrightarrow c_j = 0, j = 1, \ldots, k$.*
(ii) *Fuer ein $\widetilde{x} \in J$ sind die Vektoren $z_1(\widetilde{x}), \ldots, z_k(\widetilde{x})$ linear unabhaengig.*
(iii) *Fuer jedes $x \in J$ sind die Vektoren $z_1(x), \ldots, z_k(x)$ linear unabhaengig.*

Ist $k = m$ so ist dies aequivalent zu:

(iv) *Es sind $z_1, \ldots, z_n$ eine Basis des Raumes der Loesungen von $y^{'} = Ay$.*

Beweis. $(iii) \Longrightarrow (ii) \Longrightarrow (i)$: Das ist klar.
$(i) \Longrightarrow (iii)$: Sei $0 = \sum c_j z_j(x_0)$ fuer ein $x_0 \in J$. Dann loest also $z := \sum c_j z_j$ das Anfangswertproblem $y^{'} = Ay, y(x_0) = 0$. Die eindeutige Loesung dieses Anfangswertproblem ist aber $y \equiv 0$. Damit folgt $z \equiv 0$. Nach (i) gilt dann also $c_j = 0$, $j = 1, \ldots, k$. Damit folgt die gewuenschte lineaere Unabhaengigkeit.
Es bleibt die Aequivalenz der ersten drei Aussagen zu (iv) zu zeigen. Die Implikation $(iv) \Longrightarrow (i)$ ist offensichtlich. Es genuegt also (ii)$\Longrightarrow$ (iv) zu zeigen: Seien $z_1, \ldots, z_m$ linear unabhaengig in $\widetilde{x}$. Dann sind also $z_1(\widetilde{x}), \ldots, z_m(\widetilde{x})$ eine Basis von $\mathbb{C}^m$. Sei φ eine beliebige Loesung von $y^{'} = Ay$. Dann gibt es also (Basis !) c_j, $j = 1, \ldots, m$ mit
$$\varphi(\widetilde{x}) = \sum c_j z_j(\widetilde{x}) =: y_0.$$
Damit loesen also φ und $z := \sum c_j z_j$ das Anfangswertproblem $y^{'} = Ay$, $y(\widetilde{x}) = y_0$ und stimmen also aufgrund des Eindeutigkeitsatzes ueberein. □

DEFINITION. *(Fundamentalsystem) Sei $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ stetig. Eine Menge $\{y_1, \ldots, y_m\}$ von Loesungen von $y^{'} = Ay$ heisst Fundamentalsysem der Differentialgleichung, wenn eine der Bedingungen des vorigen Lemma gilt (d.h. wenn es sich um eine Basis des Raumes der Loesungen handelt).*

Ist $Y = Y_{x_0}$ die Loesungsmatrix eines linearen Differentialgleichung, so bilden die Spalten nach dem schon gezeigten ein Fundamentalsystem. Tatsaechlich kann man beliebige Fundamentalsysteme in die Loesungsmatrix 'umrechnen'. Das entspricht einem Basiswechsel:

LEMMA. *(FS vs L-Matrix)*$A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ *stetig und* $z_1, \ldots, z_m$ *ein Fundamentalsystem von* $y' = Ay$. *Sei* Z *die Matrix mit den Spalten* $z_1, \ldots, z_m$. *Sei* $x_0 \in J$ *beliebig. Dann ist* $Z(x)$ *fuer jedes* $x \in J$ *invertierbar und es gilt*

$$Z(x)Z(x_0)^{-1} = Y_{x_0}(x), \;\; Z(x) = Y_{x_0}(x)Z(x_0).$$

Beweis. Jedes z_j ist eine Loesung der Differentialgleichung $y' = Ay$. Damit gilt nach Konstruktion der Loesungsmatrix also $z_j = Y_{x_0}z_j(x_0)$ fuer jedes j. Insgesamt folgt $Z = Y_{x_0}Z(x_0)$. Da (nach dem vorigen Lemma) $Z(x)$ in jedem Punkt invertierbar ist, folgt die Behauptung. □

Wir koennen die Betrachtungen zu Loesungsmatrix und Fundamentalsystem zusammenfassen:

THEOREM. $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ *stetig. Dann bilden die Loesungen von* $y' = Ay$ *einen* m*-dimensionalen Vektorraum. Die Basen dieses Vektorraum sind gerade die Fundamentalsysteme. Ist* $z_1, \ldots, z_m$ *ein beliebiges FS und* $Z = (z_1, \ldots, z_m)$, *so ist die Loesungsmatrix gegeben durch* $Y = ZZ(x_0)^{-1}$. *Insbesondere ist die Loesung von* $y' = Ay, y(x_0) = y_0$ *gegeben durch*

$$y(x) = \sum t_j z_j$$

mit t_j *=j-te Komponente von* $Z(x_0)^{-1}y_0$.

Beweis. Bis auf die letzte Aussage ist alles schon explizit gezeigt worden. Die letzte Aussage folgt aus (dem schon bekannten)

$$y = Y_{x_0}y_0 = Z(x)Z(x_0)^{-1}y_0$$

sofort. □

Man kann die Betrachtungen zu linearer Unabhaengigkeit des Fundamentalsystem in jedem Punkt noch etwas praeziser fassen. Dazu definieren wir zu Loesungen $z_1, \ldots, z_m$ von $y' = Ay$ die Wronskideterminante $W(z_1, \ldots, z_m)(x)$ durch

$$W(z_1, \ldots, z_m)(x) := \det(z_1(x), \ldots, z_m(x)).$$

PROPOSITION. *(Zeitentwicklung der Wronskideterminante) Seien* $z_1, \ldots, z_m$ *Loesungen von* $y' = Ay$. *Dann gilt fuer die zugehoerige Wronskidetermnanten* W *fuer jedes* $x_0 \in J$

$$W(x) = W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} tr(A(t))dt}.$$

Beweis. (Weggelassen) Es reicht $W'(x) = \operatorname{tr}(A(x))W(x_0)$ in jedem $x \in J$ zu zeigen. Denn dann loesen W und die rechte Seite dieselbe Differentialgleichung. (Alternativ: dann getrennte Variablen...) Wir zeigen das in einem festen x_0: Sei $Z = (z_1, \ldots, z_m)$. Dann gilt $Z(x) = Y_{x_0}Z(x_0)$, da beide Seiten dasselbe Anfangswertproblem loesen (siehe auch oben). Damit folgt

$$W(x) = \det Y_{x_0}W(x_0) = V(x)W(x_0)$$

mit $V(x) = \det Y_{x_0}(x)$. Es reicht also $V^{'}(x_0) = \mathrm{tr}A(x_0)$ zu zeigen. Wir berechnen mit $Y_{x_0} = Y = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ und $D(h) = \frac{\det Y(x+h) - \det(Y)}{h}$

$$\begin{aligned} D(h) &= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{m}(\det(y_1(x), \ldots, y_{i-1}(x), y_i(x+h), \ldots, y_m(x+h)) \\ &\quad - \det(y_1(x), \ldots, y_i(x), y_{i+1}(x+h), \ldots, y_m(x+h))) \\ &= \frac{1}{h}\sum_{i=1}^{m}\det(y_1(x), \ldots, y_{i-1}(x), y_i(x+h) - y_i(x), y_{i+1}(x+h), \ldots, y_m(x+h)) \\ &= \sum_{i=1}^{m}\det(y_1(x), \ldots, y_{i-1}(x), \frac{y_i(x+h) - y_i(x)}{h}, y_{i+1}(x+h), \ldots, y_m(x+h)) \\ &\overset{h\to 0}{=} \sum_{i=1}^{m}\det(y_1(x), \ldots, y_{i-1}(x), y_i^{'}(x), y_{i+1}(x), \ldots, y_m(x)) \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$V^{'}(x_0) = \sum_{i=1}^{m}\det(e_1, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_m) = \sum_{i=1}^{m} a_{ii} = \mathrm{tr}A.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Ende der Vorlesung

FOLGERUNG. *Situation wie in voriger Proposition. Gilt tr$A(x) \equiv 0$, so ist die Wronskideterminante von jedem Fundamentalsystem konstant.*

Bemerkungen. Die Folgerung hat Anwendung in der Theorie der Sturm/Liouville Operatoren und in der Untersuchung von Erhaltung von Volumina im Phasenraum (Satz von Liouville).

3. Die inhomogene Gleichung

Um die inhomogene Gleichung zu loesen muss man zunaechst die homogene Gleichung loesen. Anschliessend kann man entweder mittels eine speziellen (irgendwie gefundenen) Loesung der inhomogenen Gleichung oder mittels einer Integraldarstellung die allgemeine Loesung der inhomogenen Gleichung berechnen.

Wir beginnen mit einer einfachen Aussage darueber, wie man bei gegebenen Fundamentalsystem und einer speziellen Loesung der inhomogenen Gleichung die allgemeine Loesung der inhomogenen Gleichung erhaelt.

THEOREM. *(Berechnen der allgemeinen Loesung mittels spezieller Loesung) $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ und $b : J \longrightarrow \mathbb{C}^m$ stetig. Sei $z_1, \ldots, z_m$ ein Fundamentalsystem von $y^{'} = Ay$ und $\widetilde{y}$ eine spezielle Loesung von $y^{'} = Ay + b$. Dann ist*

$$y := \widetilde{y} + Z(x)Z(x_0)^{-1}(y_0 - \widetilde{y}(x_0))$$

die eindeutige Loesung des Anfangswertproblem

$$y^{'} = Ay + b,\ \ y(x_0) = y_0.$$

Beweis. y ist Loesung des Anfangswertproblem. Das folgt durch einfaches Nachrechnen.

Eindeutigkeit der Loesung wurde schon gezeigt. □

THEOREM. *(Berechnen der allgemeine Loesung mittels L-Matrix) $A : J \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times m}$ und $b : J \longrightarrow \mathbb{C}^m$ stetig und $Y = Y_{x_0}$ die Loesungsmatrix zu $x_0 \in J$. Dann ist die eindeutige Loesung des Anfangswertproblem*

$$y^{'} = Ay + b,\ y(x_0) = y_0,$$

gegeben durch

$$y(x) = Y(x)y_0 + Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)dt.$$

Hierbei ist $Y(x)y_0$ die Loesung der homogenen Gleichung die die Anfangsbedingung erfuellt und $Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)dt$ eine Loesung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert 0.

Beweis. Es reicht, die letzte Aussage zu zeigen.

$Y(x)y_0$ ist eine Loesung der homogenen Differentialgleichung zum Anfangswert y_0: Das ist klar (und wurde schon gezeigt).

Es ist $Y(x)\int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)dt$ Loesung der inhomogenen Differentialgleichung zum Anfangswert 0: Das laesst sich sofort nachrechnen. □

Ende der Vorlesung.

Bemerkung. Man kann diese Loesung durch Variation der Konstanten finden mittels des Ansatzes

$$y(x) = Y(x)y_0(x).$$

Dazu berechnen wir $y^{'}$ auf zwei Arten

$$y^{'} = Ay + b\ \ (Differentialgleichung)$$

sowie

$$y^{'} = Y^{'}y_0 + Yy_0^{'} = AYy_0 + Yy_0^{'} = Ay + Yy_0^{'}.$$

Gleichsetzen und subtrahieren von Ay liefert:

$$b = Yy_0^{'}.$$

Damit folgt dann

$$y_0^{'} = Y^{-1}b.$$

Integration liefert dann die gewuenschte Aussage

$$y_0(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} Y(t)^{-1}b(t)dt.$$