Analysis III Wintersemester 2017/2018

Hausaufgabenblatt 7

Abgabe am 05.12.2017

Aufgabe 1.

(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = n^{-1}1_{[0,n]}$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, konvergiert, aber

$$\int f \mathrm{d}x \neq \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}x.$$

Wieso widerspricht dies nicht dem Satz von Lebesgue?

(b) Wir betrachten die Funktionenfolge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_n = n1_{[1/n,2/n]}$. In welchem Sinne konvergiert $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Nullfunktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 0$? Welche Konvergenzsätze sind anwendbar?

(c) Ist das Lemma von Fatou auf die Funktionenfolge $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_n = -n^{-1}1_{[0,n]}$ anwendbar?

Aufgabe 2. Sei $X = (0,1)$ und $\mathcal{S} = \{(0, 1/n) \colon n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Sei $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S})$, d.h. $\mathcal{A}$ ist die kleinste σ-algebra, die $\mathcal{S}$ enthält.

(a) Gehört $[1/150, 1/7]$ zu $\mathcal{A}$?

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ die Menge beliebiger Vereinigungen von Mengen vom Typ $[1/(n+1), 1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, ist.

(c) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $f(x) = 1/x$, messbar ist.

Hinweis: Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ liegt in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Begründung: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist die Menge $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ offen, also in $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da σ-Algebren abgeschlossen bezüglich Komplementbildung sind, ist $\{x\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Da σ-Algebren abgeschlossen bezüglich abzählbaren Vereinigungen sind, folgt die Behauptung.

(d) Bestimmen Sie alle messbaren Funktionen $f : (X, \mathcal{S}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Aufgabe 3.

(a) Zeigen Sie, dass jede stetige Funktion $f : (\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede monoton wachsende Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist.

Bitte wenden!

Aufgabe 4. Sei $X = [0,1]^2$, λ^2 das Lebesgue-Maß auf $(X, \mathcal{B}(X))$ und λ^1 das Lebesgue-Maß auf $([0,1], \mathcal{B}([0,1]))$.

(a) Sei $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^3}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Fubini, dass f nicht in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}(X), \lambda^2)$ liegt.

(b) Sei $f : (X, \mathcal{B}(X)) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = (1 - xy)^3.$$

Stimmen die drei Integrale

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) \mathrm{d}\lambda^1(x_1) \right) \mathrm{d}\lambda^1(x_2), \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x_1, x_2) \mathrm{d}\lambda^1(x_2) \right) \mathrm{d}\lambda^1(x_1), \quad \int_X f \mathrm{d}\lambda^2$$

überein?