Analysis II — Sommersemester 2017

Hausaufgabenblatt 9

Abgabe am 07.06.2017

Aufgabe 1. Sei $X = \mathbb{R}^N$ mit der euklidischen Metrik d_2. Beweisen Sie, dass für $x \in X$ und $r > 0$ für die offene Kugel $U_r(x)$ um x mit Radius r und die abgeschlossene Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r gilt

$$\overline{U_r(x)} = B_r(x), \qquad B_r^\circ(x) = U_r(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass ein $p \in X$ genau dann $d_2(p,x) = r$ erfüllt, wenn in jeder Umgebung von p ein Punkt u mit $d_2(u,x) < r$ als auch ein Punkt v mit $d_2(v,x) > r$ liegen.

Aufgabe 2. Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{F_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $F_n \supset F_{n+1}$ für alle $n \geq 1$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{n=1}^\infty F_n \neq \emptyset$ gelten muss.

Erinnerung: Für eine beschränkte Menge $B \subset M$ bezeichnet

$$\operatorname{diam} B = \sup\{d(x,y) : x, y \in B\}$$

den Durchmesser von B.

Aufgabe 3. Sei (X,d) ein metrischer Raum und $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass die Funktionen $|f|$, $\max\{f,g\}$ und $\min\{f,g\}$ stetig sind.

Aufgabe 4. Sei $\|\cdot\|_*$ eine Norm auf $\mathbb{R}^N$. Zeigen Sie, dass jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$ stetig ist.

Zusatzaufgabe 5. Zeigen Sie, dass es eine bijektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in das offene Intervall $(0,1)$ gibt, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.