Spektraltheorie

Sommersemester 2016 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Besprechung Dienstag 26.04.2016**

(1) Sei Q eine nach unten beschränkte Form mit Definitionsbereich $\mathcal{D}$ im Hilbertraum und seien $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$ untere Schranken. Zeigen Sie, dass die beiden Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ mit

$$\|f\|_1^2 = Q(f,f) + (1-\gamma_1)\|f\|^2 \quad \text{und} \quad \|f\|_2^2 := Q(f,f) + (1-\gamma_2)\|f\|^2$$

für $f \in \mathcal{D}$ äquivalent sind.

(2) Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum und $V : X \longrightarrow [0,\infty)$ messbar. Sei Q_V die durch $D(Q_V) = L^2(X, V\mu)$ und

$$Q_V(f,g) = \int_X V\overline{f} g d\mu$$

für $f, g \in D(Q_V)$ definierte Form. Bestimmen Sie den zu Q_V gehörenden selbstadjungierten Operator (d.h. den eindeutigen selbstadjungierten Operator M mit $D(M) \subset D(Q_V)$ und $\langle f, Mg\rangle = Q_V(f,g)$ fuer alle $g \in D(M)$ und $f \in D(M_V)$).

(3) Zeigen Sie, dass eine nach unten beschränkte Form Q mit Definitionsbereich $\mathcal{D}$ im Hilbertraum genau dann eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt, wenn folgendes gilt: Ist (f_n) eine Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$ mit $f_n \to 0$ bzgl. $\|\cdot\|$, so gilt $\|f_n\|_Q \to 0$. Konstruieren Sie in diesem Fall eine abgeschlossene Fortsetzung.

(4) Sei S ein symmetrischer Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$ mit

$$\mathcal{H} = Bild(S-\lambda) + Ker(S-\lambda)$$

fuer ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass S selbstadjungiert ist.

(Hinweis: Es gilt (warum?) fuer jeden dicht definierten Operator A die Gleichheit $\mathcal{H} = \overline{Bild(A-\lambda)} \oplus Ker(A^* - \lambda)$. Daraus folgt dann (auf welche Weise?) $Bild(S-\lambda) = Bild(S^*-\lambda)$ und $Ker(S-\lambda) = Ker(S^*-\lambda)$. Sei nun $g \in D(S^*)$ beliebig. Finden Sie (wie?) ein $f \in D(S)$ mit $(S^*-\lambda)g = (S-\lambda)f$ und schließen Sie $g = f \in D(S)$.)

Zusatzaufgabe: Geben Sie ein Beispiel eines symmetrischen Operators S, der $\mathcal{H} = Bild(S-\lambda) + Ker(S-\lambda)$ fuer ein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt. Geben Sie ein Beispiel eines selbstadjungierten Operators S, der die Gleichung $\mathcal{H} = Bild(S-\lambda) + Ker(S-\lambda)$ fuer kein $\lambda \in \mathbb{R}$ erfüllt.