Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 9 **Abgabe Freitag 29.06.2012**

(1) Sei $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Hilbertraum und $P : H \to H$ eine lineare Abbildung. Dann ist P genau dann die orthogonale Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum, wenn $P = P^2$ und $\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pv\rangle$ für alle $u, v \in H$ gilt.

(2) Sei c_c mit dem ℓ^2-Skalarprodukt ausgestattet. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $U \subsetneq c_c$, sodass $U^\perp = \{0\}$.

(3) Sei H ein Hilbertraum und B eine Bilinearform auf H, für die ein $M \geq 0$ existiert, sodass

$$|B(u,v)| \leq M\|u\|\|v\|,$$

für alle $u, v \in H$. Dann gibt es einen beschränkten Operator $T : H \to H$ mit

$$B(u,v) = \langle Tu, v\rangle,$$

für $u, v \in H$.

(4) Es seien X, Y Bannachräume und $B : X \times Y \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Dann sind äquivalent:

(i) B ist stetig (bezüglich der Produkttopologie auf $X \times Y$).

(ii) B ist partiell stetig (d.h. für alle $x \in X$ ist die Abbildung $y \mapsto B(x,y)$ stetig und für alle $y \in Y$ ist die Abbildung $x \mapsto B(x,y)$ stetig).

(iii) Es existiert eine Konstante $M \geq 0$, sodass für alle $x \in X, y \in Y$

$$|B(x,y)| \leq M\|x\|_X\|y\|_Y$$

gilt.

Hinweis: Satz von Banach-Steinhaus.

Zusatzaufgaben.

- Zeigen Sie statt Aufgabe 3: Sei V ein Raum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ welcher nicht vollständig ist. Dann gibt es einen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq V$ mit $U \neq V$ und $U^{\perp} = \{0\}$.
- Sei X ein reflexiver Banachraum und $K \neq \emptyset$ eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge. Dann gibt es für jedes $x \in X$ eine beste Approximation $y \in K$, d.h. es gilt

$$d(x, y) = d(x, K).$$