Höhere Analysis II

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Montag 03.05. 2010**

(1) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ein normaler Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Zeigen Sie:

(a) Ist A^{2^m} kompakt für ein $m \in \mathbb{N}$ so ist A kompakt. (Hinweis: Induktion $\|A^{2^{k+1}}x\| = \|(A^*)^{2^k} A^{2^k} x\|$).

(b) Ist A^n kompakt für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist A kompakt.

(c) Es gibt nicht-kompakte Operatoren $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, für die A^2 normal und kompakt ist.

(2) Zeigen Sie, dass es zu jedem positiven Operator $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ einen eindeutigen, positiven Operator S gibt mit der Eigenschaft $S^2 = T$. (Hinweis: Nutzen Sie, dass es eine Folge von Polynomen (p_n) mit positiven Koeffizienten gibt, so dass (p_n) auf dem Intervall $[0, 1]$ gleichmäßig gegen die Funktion $t \mapsto 1 - (1 - t)^{\frac{1}{2}}$ konvergiert.)

(3) Sei $\mathrm{Sp} : \mathcal{C}_1 \to \mathbb{C}$ linear. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(a) $\mathrm{Sp}(U^*TU) = \mathrm{Sp}(T)$ für U unitär und $T \in \mathcal{C}_1$.

(b) $\mathrm{Sp}(T^*T) = \mathrm{Sp}(TT^*)$ für alle $T \in \mathcal{C}_2$.

(c) $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ für alle $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{C}_1$.

(Hinweis zu (a): Aus Aufgabe (2) folgt, dass man jeden positiven Operator als endliche Linearkombination unitärer Operatoren schreiben kann.)

(4) Sei $\mathrm{tr} : \mathcal{C}_1 \to \mathbb{C}$ die Spur. Zeigen Sie:

(a) Ist (A_n) eine Folge positiver, beschränkter Operatoren mit $A_n \nearrow A$ im Sinne der starken Konvergenz, so gilt $\mathrm{tr}(A_n) \nearrow \mathrm{tr}(A_n)$.

(b) Ist $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und $B \in \mathcal{C}_1$, so gilt $|\mathrm{tr}(AB)| \leq \|A\| \mathrm{tr}(|B|)$.