

---

## Analysis I

Wintersemester 2013/2014

Prof. Dr. D. Lenz

---

Blatt 5

Abgabe 21.11.2013

(1) Für  $A, B \subset \mathbb{R}$  seien

$$\begin{aligned} A + B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a + b\}, \\ A \cdot B &:= \{x \in \mathbb{R} \mid \text{es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}. \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) Sind  $A, B \subset \mathbb{R}$  nach unten beschränkt, dann ist

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

(b) Es existieren nichtleere, beschränkte Mengen  $A, B \subset \mathbb{R}$ , mit

$$\inf(A \cdot B) \neq \inf(A) \cdot \inf(B).$$

(2) Die Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  genüge der folgenden Bedingung

$$f(m + n) = f(m) + f(n) + a$$

für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  und ein  $a \in \mathbb{R}$ , und es seien  $f(2) = 10$  und  $f(20) = 118$ . Ist  $f$  hierdurch eindeutig bestimmt? Man bestimme gegebenenfalls  $f$  und  $a$ .

(3) Beweisen Sie für positive Zahlen  $x_1, \dots, x_n$  die Implikation

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \implies x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq n.$$

Hinweis: Um die Aussage für  $n + 1$  zu zeigen, können Sie ohne Einschränkung (Warum?) annehmen  $x_n \leq 1$  und  $x_{n+1} \geq 1$  und dann die Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$  anwenden.

(4) Man zeige, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$  und alle  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  mit  $a_1, \dots, a_n > 0$  gilt:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot \dots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}.$$

(In Worten: Das *harmonische* Mittel ist kleiner gleich dem *geometrischen* Mittel und dieses ist kleiner gleich dem *arithmetischen* Mittel der  $a_1, \dots, a_n$ .)

Hinweis: Aufgabe (3).

**Zusatzaufgabe:** Betrachten Sie die ganzen Zahlen  $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathbb{Z}$  mit der üblichen Nachfolgeabbildung  $\nu : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\nu(k) := k + 1$  für kein  $e \in \mathbb{Z}$  die Peano-Axiome erfüllt. Finden Sie eine Nachfolgeabbildung auf  $\mathbb{Z}$  und ein  $e \in \mathbb{Z}$ , mit denen die Peano-Axiome erfüllt sind.