Analysis I

Wintersemester 2016/2017 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe: 5.12.2016**

Im Folgenden sei $(K, +, \cdot)$ stets ein angeordneter Körper.

(1) Es sei $J : \mathbb{N} \to K$ die eindeutige Abbildung mit

$$J(1) = 1 \text{ und } J(n+1) = J(n) + 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Weiterhin seien

$$\mathbb{Z}_K = \{J(n) \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \{-J(n) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\mathbb{Q}_K = \left\{ \frac{J(k)}{J(n)} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \{0\} \cup \left\{ -\frac{J(k)}{J(n)} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Es ist $(\mathbb{Z}_K, +)$ eine abelsche Gruppe, die $J(\mathbb{N})$ enthält. Weiterhin ist $\mathbb{Z}_K$ die kleinste Teilmenge von K mit dieser Eigenschaft.

(b) Es ist $(\mathbb{Q}_K, +, \cdot)$ ein Körper, der $J(\mathbb{N})$ enthält. Weiterhin ist $\mathbb{Q}_K$ die kleinste Teilmenge von K mit dieser Eigenschaft.

Hinweis: Sie müssen nicht alle Gruppenaxiome/Körperaxiome prüfen. Es genügt die Abgeschlossenheit bezüglich der Operationen und Inversenbildung zu zeigen (Warum?).

(2) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $x_1, \ldots, x_n \in K_+$ gegeben. Beweisen Sie die Implikation

$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n = 1 \Longrightarrow x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n.$$

Hinweis: Um die Aussage für $n+1$ zu zeigen, können Sie ohne Einschränkung annehmen, dass $x_n \leq 1$ und $x_{n+1} \geq 1$ (Warum?). Wenden Sie dann die Induktionsvoraussetzung auf die Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n x_{n+1}$ an.

Für die beiden folgenden Aufgaben sei $(K, +, \cdot)$ zusätzlich ordnungsvollständig.

(3) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in K_+$ gilt:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot ... \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + ... + a_n}{n}.$$

(In Worten: Das *harmonische* Mittel ist kleiner gleich dem *geometrischen* Mittel und dieses ist kleiner gleich dem *arithmetischen* Mittel der $a_1, \ldots, a_n$.)

Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung aus Aufgabe 2.

(4) Für $A, B \subseteq K$ seien

$$A + B := \{x \in K \mid \text{ es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a + b\}$$

und

$$A \cdot B := \{x \in K \mid \text{ es existieren } a \in A \text{ und } b \in B \text{ mit } x = a \cdot b\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Sind $A, B \subseteq K$ nichtleer und nach unten beschränkt, dann ist

$$\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B).$$

(b) Es existieren nichtleere, beschränkte Mengen $A, B \subseteq K$, mit

$$\inf(A \cdot B) \neq \inf(A) \cdot \inf(B).$$