Probeklausur Analysis II

Sommersemester 2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Hinweise:

- Hilfsmittel: Keine.
- Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben Sie **nicht** mit Bleistift.
- Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
- Bei (versuchtem) Betrug gilt die Klausur als nicht bestanden.

(1) (a) Geben Sie zwei äquivalente Definitionen der Exponentialfunktion an und skizzieren Sie den Beweis der Äquivalenz.

(b) Definieren Sie den Sinus Hyperbolicus sinh und den Kosinus Hyperbolicus cosh.

(c) Diskutieren Sie die Differenzierbarkeit von sinh und cosh.

(d) Geben Sie eine Reihenentwicklung von sinh und cosh an.

(2) (a) Definieren Sie das Konzept des metrischen Raumes.

(b) Wann heißt eine Teilmenge eines metrischen Raumes offen bzw. abgeschlossen.

(c) Sei $W = \{u : \mathbb{N} \to \{0,1\}\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass $d : W \times W \to [0,\infty)$ gegeben durch

$$d(u,v) := \begin{cases} 0, & u = v, \\ \min\{n \in \mathbb{N} \mid u_n \neq v_n\}^{-1}, & u \neq v, \end{cases}$$

eine Metrik ist. Geben Sie eine Charakterisierung der offenen Kugeln mit Radius $r > 0$ um $u \in W$ an. Gibt es eine Menge außer W und $\emptyset$, die sowohl offen als auch abgeschlossen ist?

(d) Definieren Sie den Begriff einer Norm in einem Vektorraum. Zeigen Sie, dass die durch eine Norm induzierte Metrik eine Metrik ist.

(e) Sei $\mathbb{R}^N$ mit der Norm $\|\cdot\|_\#$ ausgestattet. Zeigen Sie, dass dann auf dem Raum $\mathcal{L}$ aller linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^N$ nach $\mathbb{R}^N$ durch

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_\# \mid x \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \|x\|_\# = 1\}, \qquad A \in \mathcal{L},$$

eine Norm definiert ist.

(f) Geben Sie drei Charakterisierungen für Konvergenz im metrischen Raum und beweisen Sie deren Äquivalenz.

(g) Geben Sie drei äquivalente Formulierungen von Kompaktheit in metrischen Räumen an.

(h) Zeigen Sie, dass der metrische Raum (W, d) aus Aufgabe (c) kompakt ist.

(i) Definieren Sie die Begriffe zusammenhängend und wegzusammenhängend in metrischen Räumen. Geben Sie ein Beispiel einer Menge an, welche zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

(3) (a) Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definieren Sie die Begriffe Obersumme, Untersumme und Riemann-Summe von f bezüglich einer Zerlegung. Wann heißt f Riemann-integrierbar?

(b) Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Definieren Sie hierfür auch den Begriff der Stammfunktion.

(c) Formulieren und beweisen Sie die Substitutionsregel.

(d) Formulieren und beweisen Sie das Theorem der partiellen Integration.

(e) Berechnen Sie für alle $a \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_1^e x^a \ln(x)dx$.

(f) Es seien $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 2n - n^2 x, & \frac{1}{n} < x \leq \frac{2}{n} \\ 0, & x > \frac{2}{n} \end{cases}$.

Berechnen sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx$ sowie $\int\limits_0^1 \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)dx$. Was stellen Sie fest?

(4) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit und der partiellen Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in U$.

(b) Geben Sie ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für Differenzierbarkeit an.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Differenzierbarkeit außerhalb des Ursprungs und bilden Sie die partiellen Ableitungen bei $(0,0)$. Untersuchen Sie anschließend die Funktion auf Differenzierbarkeit bei $(0,0)$.

(d) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) := \langle Ax, x\rangle + b$, wobei $B \in \mathbb{R}^{k\times k}$, $b \in \mathbb{R}$ und $\langle x, y\rangle := \sum_{j=1}^{k} x_j \cdot y_j$ das Euklidische Skalarprodukt ist. Bestimmen Sie die Ableitung von f anhand der Definition von Differenzierbarkeit.

(5) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\tau(n)$ gegeben als die Anzahl der Teiler von n. Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot z^n$.

Viel Erfolg!