

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 1**Abgabe: Montag 07.05.2012**

(1) Lösen Sie das Anfangswertproblem:

a.) $y' = ax + b$, mit $y(0) = 1$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

b.) $y' = x \cdot \sin(ax)$ mit $y(\frac{\pi}{a}) = 0$, wobei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gegeben ist.

c.) $y' = e^{-y}$, mit $y(1) = 1$.

d.) $y' = \cos^2(y) - 1$, mit $y(\pi) = 2\pi$.

(2) Zeigen Sie, dass $y' = |y|^{2/3}$, mit $y(1) = 0$ unendlich viele Lösungen hat. Skizzieren Sie die Lösungsschar.

(3) Skizzieren Sie das Vektorfeld der folgenden Differentialgleichungen:

a.) $y' = 1$

b.) $y' = 1 - \exp(-y^2)$

c.) $y' = (y^2 + 1) \cdot y$

(4) Stellen Sie zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen das äquivalente System erster Ordnung auf:

a.) $y'' = \frac{1}{2} y^2$

b.) $y'' = \frac{1}{2} y^2 + 7x$

c.) $y^{(4)} = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{y^2 + 1}$

Zusatzaufgaben:

1. Es sei, für eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die Gleichung $y' = f(y)$ gegeben.

a.) Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton ist.

b.) Gegeben sei eine Lösung $\varphi(x)$, für die der Limes $\ell := \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$ existiert. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $\psi(x) := \ell$ eine Lösung ist.

- (2) (Mischungsproblem) Ein Tank enthält 1000 Liter Wasser, in dem anfänglich 50 Kilogramm eines Salzes gelöst seien. Pro Minute mögen 2 Liter der Salzlösungen aus dem Tank auslaufen und 2 Liter reinen Wassers zulaufen, die sich sofort und vollständig mit der vorhandenen Salzlösung vermischen. Wieviel Kilogramm Salz sind t Minuten nach Beginn des Auslaufens noch im Tank vorhanden?