

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

---

**Blatt 1****Abgabe: Montag 07.05.2012**

(1) Lösen Sie das Anfangswertproblem:

a.)  $y' = ax + b$ , mit  $y(0) = 1$ , wobei  $a, b \in \mathbb{R}$  gegeben sind.

b.)  $y' = x \cdot \sin(ax)$  mit  $y(\frac{\pi}{a}) = 0$ , wobei  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gegeben ist.

c.)  $y' = e^{-y}$ , mit  $y(1) = 1$ .

d.)  $y' = \cos^2(y) - 1$ , mit  $y(\pi) = 2\pi$ .

(2) Zeigen Sie, dass  $y' = |y|^{2/3}$ , mit  $y(1) = 0$  unendlich viele Lösungen hat. Skizzieren Sie die Lösungsschar.

(3) Skizzieren Sie das Vektorfeld der folgenden Differentialgleichungen:

a.)  $y' = 1$

b.)  $y' = 1 - \exp(-y^2)$

c.)  $y' = (y^2 + 1) \cdot y$

(4) Stellen Sie zu folgenden gewöhnlichen Differentialgleichungen das äquivalente System erster Ordnung auf:

a.)  $y'' = \frac{1}{2} y^2$

b.)  $y'' = \frac{1}{2} y^2 + 7x$

c.)  $y^{(4)} = \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{y^2 + 1}$

**Zusatzaufgaben:**

1. Es sei, für eine stetige Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die Gleichung  $y' = f(y)$  gegeben.

a.) Zeigen Sie, dass jede Lösung monoton ist.

b.) Gegeben sei eine Lösung  $\varphi(x)$ , für die der Limes  $\ell := \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x)$  existiert. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion  $\psi(x) := \ell$  eine Lösung ist.

- (2) (Mischungsproblem) Ein Tank enthält 1000 Liter Wasser, in dem anfänglich 50 Kilogramm eines Salzes gelöst seien. Pro Minute mögen 2 Liter der Salzlösungen aus dem Tank auslaufen und 2 Liter reinen Wassers zulaufen, die sich sofort und vollständig mit der vorhandenen Salzlösung vermischen. Wieviel Kilogramm Salz sind  $t$  Minuten nach Beginn des Auslaufens noch im Tank vorhanden?