Aperiodische Ordnung - Notizen [1]

Daniel Lenz

Jena - Wintersemester 2011 / 2012

[1] Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Aperiodische Ordnung ist in den letzten 100 Jahren in verschiedenen Verkleidungen aufgetreten und untersucht worden. Ausgeloest durch die Entdeckung der sogenannten Quasikristalle im Jahre 1982 durch Shechtman (Nobelpreis für Chemnie im Jahr 2011) hat das Gebiet in den letzen zwei Jahrzehnten besondere Aufmerksamkeit erfahren. Quasikristalle wurden in Diffraktionsexperimenten entdeckt.

Neben dem Interesse aus der Anwendung auf Quasikristalle gibt es mehrere strukturelle Gründe für die Auseinandersetzung mit aperiodischer Ordnung. Dazu gehoeren die folgenden beiden:

- Untersuchung der am 'staerksten geordneten' Strukturen innerhalb der nichtperiodischen Strukturen (geht auf Morse/Hedlund 1940/42 zurueck).
- Untersuchung der Mengen die in eine 'Fourierreihen' entwickelt werden koennen (Meyer 1972 - Gausspreis 2010).

Zum Abschluss der Einleitung stellen wir noch zwei gaengige Modelle fuer aperiodische Ordnung vor: Das Fibonacci Model und das Chair Tiling....

KAPITEL 1

Etwas zu topologischen dynamischen Systemen

In diesem Abschnitt lernen wir mit dynamischen Systemen grundlegende Objekte kennen. Minimalität und eindeutige Ergodizität werden im vordergrund der Betrachtungen stehen.

1. Topologische dynamische Systeme

DEFINITION. *Sei G eine topologische Gruppe. Ein dynamisches System über G ist ein Paar (X, α) bestehend aus einem kompakten metrischen Raum X und einer stetigen Aktion α von G auf X d.h. einer stetigen Abbildung*

$$\alpha : G \times X \longrightarrow X, x \mapsto \alpha_t(x),$$

so dass gilt:

(i) *$\alpha_e(x) = x$ fuer alle $x \in X$. (Hier ist e das neutrale Element von G.)*
(ii) *$\alpha_{st}(x) = \alpha_s(\alpha_t(x))$ fuer alle $s, t \in G$ und $x \in X$.*

Bemerkung.

- Fuer jedes $s \in G$ ist dann α_s eine Homöomorphismus mit Inversem $\alpha_{s^{-1}}$.
- In dieser Vorlesung ist meist $G = \mathbb{Z}^N$ oder $G = \mathbb{R}^N$.
- Ist $G = \mathbb{Z}$, so ist α durch den Homöomorphismus $T = \alpha_1 : X \longrightarrow X$ komplett festgelegt: Es gilt dann $\alpha_n = T^n$ und $\alpha_{-n} = (T^n)^{-1}$ fuer $n \in \mathbb{N}$. Umgekehrt liefert jeder Homöomorphismus $T : X \longrightarrow X$ mittels dieser beiden Formeln eine Aktion von $\mathbb{Z}$. Daher schreibt man für dynamische Systeme über $\mathbb{Z}$ dann meist (X, T) mit einem Homöomorphismus T.

Notation. Meist wird α weggelassen: $tx := t \cdot x := \alpha_t(x)$ sowie (X, G) statt (X, α).

Beispiel. Klassische Mechanik auf Energieschale.
Beispiel. Translation (von $\mathbb{R}$) auf dem Torus.
Beispiel. Translation (via $\mathbb{Z}$) auf dem Torus. Sonderfall: (Ir)rationale Rotation auf dem Einheitskreis.

2. Minimalität

Wir kommen nun zu der einen der beiden fundamentalen Eigenschaften, um die es uns geht.

Definition. *Ein dynamisches System* (X,G) *heisst minimal, wenn fuer jedes* $x \in X$ *der Orbit*

$$\mathcal{O}(x) := \{tx : t \in G\}$$

dicht in X *ist (d.h.* $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$ *gilt).*

Beispiel. Die irrationale Rotation ist minimal. Die rationale Roation ist nicht minimal.
Beispiel. (Uebung). Wann ist die Rotation auf dem n-Torus minimal?

Ende der 1. Vorlesung

Theorem. *(Charakterisierung Minimalität) Sei* (X,G) *ein dynamisches System. Die folgenden Aussagen sind aequivalent:*

(i) *Es ist* (X,G) *minimal.*
(ii) *Ist* $A \subset X$ *abgeschlossen und invariant (d.h.* $tA \subset A$ *fuer alle* $t \in G$*), so gilt* $A = X$ *oder* $A = \varnothing$.
(iii) *Ist* $U \subset X$ *offen und* $U \neq \varnothing$ *so gilt* $X = \cup_{t\in G} tU$.

Bemerkung

- Es besagt (ii), dass man kein invariantes Teilsystem finden kann.
- Gilt fuer A die Inklusion $tA \subset A$ fuer alle $t \in G$, so folgt (wie?) $tA = A$ fuer alle $t \in G$.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei A abgeschlossen und invariant mit $A \neq \varnothing$. Zu zeigen: $A = X$.
Wegen $A \neq \varnothing$ existiert ein $x \in A$. Da A invariant ist, gilt dann $\mathcal{O}(x) \subset A$. Da A abgeschlossen ist folgt dann mit (i)

$$X \overset{(i)}{=} \overline{\mathcal{O}(x)} \subset \overline{A} = A.$$

Das zeigt (ii).
(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Definiere

$$A := X \setminus \left(\bigcup_{t\in G} tU \right).$$

Dann ist A abgeschlossen und invariant (da U offen und invariant ist). Damit folgt aus (ii) also $A = \varnothing$ oder $A = X$. Wegen $U \neq \varnothing$ ist $A = X$ nicht moeglich. Damit folgt also $A = \varnothing$. Das liefert (iii).
(iii)$\Longrightarrow$ (i): Sei $x \in X$ beliebig und $U \subset X$ offen mit $U \neq \varnothing$. Zu zeigen: es existiert ein $s \in G$ mit $sx \in U$.
Aufgrund von (iii) gilt $x \in tU$ fuer ein $t \in G$. Damit folgt also $sx \in U$ mit $s = t^{-1}$. □

Aus dem vorigen Satz erhalten wir eine Charakterisierung der Minimalitaet fuer den besonders wichtigen Fall von dynamischen Systemen über $\mathbb{Z}$.

Folgerung. *Sei* (X,T) *ein dynamisches System über* $\mathbb{Z}$ *(d.h.* $T : X \longrightarrow X$ *ist ein Homöomorphismus). Die folgenden Aussagen sind aequivalent:*

(i) *Es ist* (X,T) *minimal.*
(ii) *Fuer jedes* $x \in X$ *ist der Vorwaertsorbit* $\mathcal{O}^+(x) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* X.
(iii) *Fuer jedes* $x \in X$ *ist der Rückwaertsorbit* $\mathcal{O}^-(x) := \{T^n x : n \in \mathbb{N}\}$ *dicht in* X.

Beweis. Offenbar implizieren (ii) bzw. (iii) die Aussage (i).
(i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $x \in X$. Definiere

$$A^\infty := \text{Menge der Häufungspunkte der Folge } (T^n x)_n.$$

Wie man leicht sieht, ist dann A^∞ abgeschlossen und invariant. Da A nichtleer ist (aufgrund der Kompaktheit von X), folgt aus dem vorigen Theorem dann $A = X$. Das liefert (ii).
(i)$\Longrightarrow$ (iii): Das kann analog zu (i)$\Longrightarrow$ (ii) gezeigt werden. □

Beispiel. Irrationale Rotation ist minimal.

DEFINITION. *(Minimale Menge) Sei (X, G) ein dynamisches System. Dann heisst eine abgeschlossene nichtleere Teilmengen A von X minimal, wenn das dynamische System (A, G) minimal ist. (Hier ist (A, G) die Einschraenkung der Aktion von G auf X auf A).*

THEOREM. *Jedes dynamische System hat eine minimale Menge.*

Beweis. Sei (X, G) ein dynamisches System. Betrachte die Familie $\mathcal{E}$ aller nichtleeren, abgeschlossenen invarianten Menge in X. Dann ist $\mathcal{E}$ nichtleer, denn es gehoert X zu $\mathcal{E}$. Es ist $\mathcal{E}$ halbgeordnet bzgl. der Inklusion.
(Eine Relation $\le$ heisst Halbordnung auf einer Menge M, wenn gilt

- $m_1 \le m_2, m_2 \le m_3 \Longrightarrow m_1 \le m_3$.
- $m \le m$
- $m \le m', m' \le m \Longrightarrow m = m'$.

Das 'halb' bezieht sich darauf, dass nicht gefordert wird, dass fuer beliebige m, m' aus M eine der Aussagen $m \le m'$ oder $m' \le m$ gelten muss. Offenbar ist $\mathcal{E}$ mit $U \le V \Longleftrightarrow U \subset V$ halbgeordnet.)
Sei nun $\mathcal{C}$ eine totalgeordnete Teilmenge von $\mathcal{E}$ (d.h. fuer alle $C_1, C_2 \in \mathcal{C}$ gilt $C_1 \subset C_2$ oder $C_2 \subset C_1$). Dann hat $\mathcal{C}$ eine untere Schraenke in $\mathcal{E}$ naemlich den Durchschnitt

$$S := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \neq \emptyset.$$

(Hierbei ist klar, dass S in jedem C aus $\mathcal{C}$ enthalten ist. Es bleibt aber zu zeigen, dass S zu $\mathcal{E}$ gehoert, also invariant und nichtleer ist: Invarianz ist einfach. Um zu zeigen, dass S nichtleer ist, reicht es nach dem Cantorschen Kompaktheitslemma zu zeigen, dass fuer beliebige $C_1, \ldots, C_n$ aus $\mathcal{C}$ der Schnitt

$$\bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

nichtleer ist. Letzteres ist aber klar, da $\mathcal{C}$ total geoordnet ist (und daher der Schnitt gerade das kleinste der C_j ist).)
Da jede totalgeordnete Teilmenge von $\mathcal{E}$ eine untere Schranke hat, folgt aus dem Zornschen Lemma sofort die Existenz eines minimalen Elementes C. Diese C ist dann eine minimale Menge. (Denn fuer jedes $x \in C$ ist $\overline{\mathcal{O}(x)}$ eine abgeschlossene invariante Teilmenge von C, muss also aufgrund der Minimalitaet bzgl. $\subset$ mit C uebereinstimmen).

□

Exkurs. In obigem Beweis haben wir zwei abstrakte Hilfmittel benutzt viz das Zornsche Lemma und das Cantorsche Kompaktheitslemma. Diese Hilfsmittel wollen wir hier noch einmal kurz diskutieren:

- *Zornsches Lemma:* Sei $(M, \leq)$ ein halbgeordnete Menge in der jede totatgeordnete Teilmenge eine untere Schranke hat. Dann hat M ein minimales Element. Das Zornsche Lemma ist aquivalent zum Auswahlaxiom: Sind X_α, $\alpha \in I$, nichtleere Mengen, so ist auch
$$\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f \text{ auf } I \text{ mit } f(\alpha) \in X_\alpha \text{ fuer jedes } \alpha \in I\}$$
nichtleer. Das Auswahlaxiom führt auf das Banach-Tarski Paradoxon.
- *Cantorsches Kompaktheitslemma:* Ist X kompakt und sind C_α, $\alpha \in I$, kompakte Teilmengen von X mit
$$\bigcap_{j=1}^{n} C_{\alpha_j} \neq \emptyset$$
fuer alle $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in I$, so gilt
$$\bigcap_{\alpha \in I} C_\alpha \neq \emptyset.$$
Bew...

3. Eindeutige Ergodizität

Definition. *Sei X kompakt. Eine lineare Abbildung $L : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst Mass, wenn $L(f) \geq 0$ gilt fuer alle $f \geq 0$. ('L ist positiv'). Gilt zudem noch $L(1) = 1$, so heisst L ein Wahrscheinlichkeitsmass.*

Proposition. *Ist L ein Mass auf X, so gilt $|L(f)| \leq L(1)\|f\|_\infty$ fuer alle $f \in C(X)$.*

Beweis. Es gilt
$$-\|f\|_\infty 1 \leq f \leq \|f\|_\infty 1.$$
Da L positiv ist, erhaelt es Ungleichungen, und es folgt also
$$L(-\|f\|_\infty 1) \leq L(f) \leq L(\|f\|_\infty 1).$$
Da L linear ist, folgt die Aussage. □

Proposition. *(Vage Kompaktheit der Wahrscheinlichkeitsmasse) Sei X ein kompakter metrischer Raum. Sei (L_n) eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmassen. Dann gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmass L und eine Teilfolge (L_{n_k}) von (L_n) mit*
$$L_{j_k}(f) \longrightarrow L(f)$$
fuer alle $f \in C(X)$. ('Vage Konvergenz der (L_{n_k}) gegen L')

Beweis. Da X kompakt und metrisierbar ist, gibt es eine abzaehlbare dichte Teilmenge (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$) $\{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$ von $C(X)$. Nun Diagonalfolgeverfahren und Stetigkeit der WMasse nutzen... □

Ende der 2. Vorlesung

Definition. *Sei (X, G) ein dynamisches System. Ein Mass L auf X heisst invariant, wenn fuer alle $f \in C(X)$ und alle $t \in G$ gilt $L(f) = L(f(t\cdot))$.*

Lemma. *(Existenz invarianter Masse). Sei $G = \mathbb{R}^d$ oder $G = \mathbb{Z}^d$. Dann besitzt jedes dynamische System über G ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmass.*

Beweis. Sei B_n der Quader mit Seitenlaenge $2n$ um den Ursprung und $|B_n|$ sein Volumen bzw. die Anzahl seiner Punkte. Sei $\int_{B_n}$ das Integral bzw. die Summe ueber B_n. Sei $p \in X$ beliebig. Definiere fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $L_n : C(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ durch

$$L_n(f) := \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} f(tp)dt.$$

Dann ist offenbar L_n fuer jedes n ein Wahrscheinlichkeitsmass. Daher hat nach dem vorigen Lemma (Vage Kompaktheit) die Folge (L_n) eine gegen ein Wahrscheinlichkeitsmass L konvergente Teilfolge (L_{n_k}).
Behauptung. Es ist L ein invariantes Mass.
Bew. Fuer $s \in G$ gilt

$$L(f) - L(f(s\cdot)) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{B_{n_k}} \left(\int_{B_{n_k}} f(tp)dt - \int_{B_{n_k}} f((t+s)p)dt \right).$$

Den Term in den Klammern $(\ldots)$ kann man aber abschaetzen wie folgt

$$|(\ldots)| = \left| \int_{B_{n_k}} f(tp)dt - \int_{s+B_{n_k}} f(tp)dt \right| \le |B_{n_k} \triangle (s + B_{n_k})| \|f\|_\infty.$$

Damit folgt

$$|L(f) - L(f(s\cdot))| \le \lim_{k\to\infty} \frac{1}{B_{n_k}} |B_{n_k} \triangle (s + B_{n_k})| \|f\|_\infty \to 0, k \to \infty.$$

(Hier folgt die Konvergenz gegen Null, da das Volumen des Wuerfels viel schneller waechst als seine Oberflaeche.)
Damit haben wir ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmass L gefunden. □

Im allgemeinen wird ein dynamisches System viele invariante Wahrscheinlichkeitsmasse haben. Besonders 'einfach' sind daher die Systeme, die nur ein einziges solches haben.

Definition. *Das dynamische System (X, G) heisst eindeutig ergodisch, wenn es genau ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmass besitzt.*

Beispiel. Die irrationale Rotation ist eindeutig ergodisch (wie aus der Eindeutigkeit des Haarmasses folgt...)

Theorem. *(Charakterisierung eindeutige Ergodizitaet) Sei $G = \mathbb{R}^d$ oder $G = \mathbb{Z}^d$. Sei (X, G) ein dynamisches System ueber G. Dann sind die folgenden Aussagen aquivalent:*

(i) *Fuer jedes $f \in C(X)$ konvergiert die Folge der Funktionen*

$$(x \mapsto \frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} f(tx)dt)$$

gleichmäßig gegen eine konstante Funktion.

(ii) *Für jedes $f \in C(X)$ und jedes $x \in X$ konvergiert die Folge*

$$\frac{1}{|B_n|} \int_{B_n} f(tx)dt$$

gegen eine von $x \in X$ unabhaengige Konstante C_f.

(iii) *Es gibt ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmass L auf X mit*

$$\frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} f(tx)dt \to L(f)$$

fuer jedes $x \in X$ und $f \in C(X)$.

(iv) *Es ist (X,G) eindeutig ergodisch.*

In (i) und (ii) kann $C(X)$ durch eine in $C(X)$ dichte Teilmenge ersetzt werden.

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Das ist klar.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Unter Nutzen von (ii) definieren wir das Mass L durch

$$L(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} f(tx)dt$$

(fuer ein beliebiges $x \in X$). Dann ist L offenbar ein Wahrscheinlichkeitsmasse. Weiterhin sieht man wie im Beweis des Lemma zur Existenz invarianter Masse, dass L invariant ist. Damit folgt also (iii).

(iii)$\Longrightarrow$ (iv): Sei M ein beliebiges invariantes Wahrscheinlichkeitsmass auf X. Zu zeigen $M = L$.
Fuer die Folge der Funktionen

$$g_n(x) := \frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} f(tx)dt$$

gilt aber nun

- $|g_n| \le \|f\|_\infty 1$
- $g_n \to L(f)$ punktweise.

Damit erhalten wir nach dem Satz von Lebesgue und dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} L(f) &= M(L(f)) \\ (Lebesgue) &= \lim_{n\to\infty} M(\frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} f(t\cdot)dt) \\ (Fubini) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} M(f(t\cdot))dt \\ (\text{M inv.}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} M(f)dt \\ &= M(f). \end{aligned}$$

(iv)$\Longrightarrow$ (i): Wir zeigen zunaechst eine Zwischenbehauptung.

Zwischenbehauptung: Sei (x_n) eine belieibige Folge in X. Sei L_n das Wahrscheinlichkeitsmass

$$L_n(f) := \frac{1}{|B_n|}\int_{B_n} f(tx_n)dt.$$

Dann konvergiert $L_n(f)$ gegen $L(f)$ fuer jedes $f \in C(X)$.
Bew. Es reicht zu zeigen:

(1) Jede Teilfolge von $(L_n(f))$ hat eine konvergente Teilfolge.
(2) Alle konvergenten Teilfolgen von $L_n(f)$ konvergieren gegen $L(f)$.

Zu (1). Das ist klar, da $(L_n(f))$ beschraenkt ist.
Zu (2): Sei $(L_{n_k}(f))$ eine konvergente Teilfolge. Nach dem Lemma zur vagen Kompaktheit, hat (L_{n_k}) eine Teilfolge, ohne Einschraenkung wieder L_{n_k} selber, so dass $L_{n_k}(g))$ fuer jedes $g \in C(X)$ konvergiert. Der Grenzwert ist dann ein invariantes Wahrscheinlickeitsmass (vgl. Beweis des Lemma zur Existenz invarianter Masse). Da es nur ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmass gibt, muss der Grenzwert also gerade dieses Mass sein. Damit konvergiert also $L_{n_k}(g)$ gegen $L(g)$ fuer jedes $g \in C(X)$.

Es bleibt zu zeigen, dass aus der Zwischenbehauptung die Aussage (i) folgt. Das ist einfach. □

Bemerkung. Ergodentheorie....

Ende der 3. Vorlesung

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen Minimalitaet und eindeutiger Ergoditzitaet. Wie man an Beispielen sieht, sind diese Eigenschaften im allgemeinen unabhaengig von einander.

Beispiel. (Eindeutige Ergodizitaet ohne Minimalitaet) $T : S \longrightarrow S, T(e^{2\pi i\theta}) = e^{2\pi i\theta^2}$.

DEFINITION. *Sei X ein kompakter Raum und L ein Mass auf X. Dann ist der Traeger von L definiert durch*

$$supp(L) = \{x \in X : L(f) > 0 \textit{ fuer alle } f \in C(X) \textit{ mit } f \geq 0 \textit{ und } f(x) > 0\}.$$

Bemerkung. Statt $f \geq 0$ mit $f(x) > 0$ zu betrachten, koennte man auch $f \geq 0$ mit $f(x) = 1$ betrachten.

PROPOSITION. *Sei X kompakt und metrisierbar und L ein Mass auf X.*
(a) Es ist supp(L) abgeschlossen.
(b) Ist (X, G) ein dynamisches System und L invariant, so ist supp(L) invariant.

Beweis. (a) Wir zeigen, dass $X \setminus \mathrm{supp}(L)$ offen ist. Sei $x \in X \setminus \mathrm{supp}(L)$. Dann existiert also ein $f \in C(X)$ mit $f \geq 0$ und $f(x) > 0$ und $L(f) = 0$. Da f stetig ist, hat dann x eine Umgebung U mit $f > 0$ auf U. Damit gehoert dann ganz U zum Komplement des Traegers.
(b) Das ist einfach. □

Damit kommen wir nun zum strukturellen Zusammenhang zwischen Eindeutiger Ergodizitaet und Minimalitaet.

THEOREM. *Sei $G = \mathbb{R}^d$ oder $G = \mathbb{Z}^d$. Sei (X, G) eindeutig ergodisch mit invariantem Wahrscheinlichkeitsmass L. Dann besitzt (X, G) eine eindeutige abgeschlossene minimale Menge. Diese ist gegeben durch den Traeger von L.*

Beweis. Wir zeigen zunaechst, dass $Y := \mathrm{supp}(L)$ eine minimale Menge ist: Betrachte dazu eine nichtleere invariante abgeschlossene Teilmenge A von Y. Zu zeigen $A = Y$.
Es ist (A, G) ein dynamisches System, besitzt also nach einem Lemma ein invariantes Wahrscheinlichkeistmass L_A. Dann induziert L_A durch

$$C(X) \longrightarrow \mathbb{R}, f \mapsto L_A(f|_A)$$

ein invariantes Wahrscheinlichkeitsmass $\widetilde{L_A}$ auf X. Da (X,G) eindeutig ergodisch ist, folgt $\widetilde{L_A} = L$. Damit folgt

$$\operatorname{supp}(L) = \operatorname{supp}(\widetilde{L_A}) \subset A \subset \operatorname{supp}(L).$$

Das liefert die Behauptung.

Wir zeigen nun die Eindeutigkeitsaussage: Sei B eine abgeschlossene minimale Menge. Dann findet man wie im ersten Teil des Beweises ein invariantes Mass L_B auf B. Ebenso folgt wie im ersten Teil des Beweises dann

$$\operatorname{supp}(L) = \operatorname{supp}(\widetilde{L_B}) \subset B.$$

Da B minimal ist und $\operatorname{supp}(L)$ eine abgeschlossene nichtleere invariante Teilmenge von B folgt dann $B = \operatorname{supp}(L)$. □

FOLGERUNG. *Sei (X,G) eindeutig ergodisch mit invariantem Wahrscheinlichtkeitsmass L. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist (X,G) minimal.*
(ii) *Es gilt $L(f) > 0$ fuer alle $f \in C(X)$ mit $f \geq 0$ und $f \neq 0$.*

Beweis. Nach dem vorigen Theorem ist (i) aequivalent zu $X = \operatorname{supp}(L) = X$. Das ist aber gerade die Aussage (ii). □

KAPITEL 2

Symbolische Dynamik

In diesem Kapitel führen wir eine wichtige Klasse von dynamischen Systemen ein, viz Subshifts ueber endlichen Alphabeten. Diese Klasse spielt eine besondere Rolle in der Untersuchung aperiodischer Ordnung.

1. Grundlegendes

Sei eine endliche Mengen $\mathcal{A}$ gegeben. Sie wird als Alphabet bezeichnet und die Elemente von $\mathcal{A}$ heissen dann Buchstaben. Es geht dann um

$$\mathcal{A}^{\mathbb{Z}} := \{f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}\}$$

die Menge der zweiseitig unendlichen Folgen mit Werten in $\mathcal{A}$. Als naechstes wird eine Topologie auf dieser Menge eingeführt und studiert. Sei dazu $d_{\mathcal{A}}$ die diskrete Metrik auf $\mathcal{A}$. Dann wird durch

$$d(\omega, \varrho) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{d_{\mathcal{A}}(\omega_k, \varrho_k)}{2^{|k|}}$$

eine Metrik auf $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ definiert. Konvergenz einer Folge $(\omega^{(n)})$ gegen ein ω bzgl. der induzierten Topologie läßt sich wie folgt beschreiben: Es sind aequivalent:

- Es konvergiert $\omega^{(n)}$ gegen ω.
- Fuer jedes $k \in \mathbb{Z}$ existiert ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\omega_k^{(n)} = \omega_k$ fuer alle $n \geq N_k$.
- Fuer alle $K \in \mathbb{N}$ existiert ein $N_K \in \mathbb{N}$ mit $\omega|_{[-K,K]}^{(n)} = \omega|_{[-K,K]}$ fuer alle $n \geq N_K$.

Proposition. *Es ist $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, d)$ vollstaendig und total beschraenkt (also kompakt).*

Beweis. Vollstaendigkeit: Sei $(\omega^{(n)})$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$. Wegen

$$d_{\mathcal{A}}(\rho_k, \omega_k) \leq 2^{|k|} d(\rho, \omega)$$

fuer alle $\omega, \rho \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist dann $(\omega_k^{(n)})$ eine Cauchy-Folge fuer jedes $k \in \mathbb{Z}$. Da $(\mathcal{A}, d_{\mathcal{A}})$ ein vollstaendiger Raum ist, existiert dann der Grenzwert ω_k von $(\omega_k^{(n)})$ d.h.

$$\omega_k = \lim_{n\to\infty} \omega_k^{(n)}$$

fuer jedes $k \in \mathbb{Z}$. Sei $\omega = (\omega_k)$. Dann sieht man leicht, dasss $(\omega^{(n)})$ gegen ω konvergiert.

Total Beschraenktheit: Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: Es kann $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ durch endliche viele Kugeln vom Radius ε ueberdeckt werden.

Sei $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{|n| \geq K} \frac{1}{2^{|n|}} < \varepsilon$$

gewaehlt. Zu jedem $x \in \mathcal{A}^{[-K,K]}$ waehlen wir ein ein $\omega_x \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ mit

$$x = \omega_x|_{[-K,K]}.$$

Zeichnung. Wir zeigen nun

$$(*)\ \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} = \bigcup_{x \in \mathcal{A}^{[-K,K]}} B_{\varepsilon}(\omega_x),$$

wobei $B_r(\omega)$ die Kugel um ω mit Radius r bezeichnet.
Zum Beweis von $(*)$ betrachten wir ein beliebiges $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ und setzen $x := \omega|_{[-K,K]}$. Dann gilt also

$$\omega|_{[-K,K]} = x = \omega_x|_{[-K,K]}.$$

Damit folgt sofort

$$d(\omega, \omega_x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{d_{\mathcal{A}}(\omega_n, \omega_{x,n})}{2^{|n|}} = \sum_{|n| > K} \frac{d_{\mathcal{A}}(\omega_n, \omega_{x,n})}{2^{|n|}} \leq \sum_{|n| > K} \frac{1}{2^{|n|}} < \varepsilon.$$

Damit folgt $\omega \in B_{\varepsilon}(\omega_x)$. Da $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ beliebig war, folgt $(*)$. Das beendet den Beweis. □

Auf dem kompakten metrischen Raum $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ führen wir nun einen steigen Homöomorphismus ein. Seien

$$T : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, (T\omega)(n) = \omega(n+1),$$
$$S : \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, (S\omega)(n) = \omega(n-1).$$

Dann sind T und S zueinander invers und stetig. Es heisst das dynamische System $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, T)$ der volle Shift über $\mathcal{A}$. Uns wird es um Untersysteme gehen.

Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Gilt fuer $\Omega \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$*
- *Ω ist abgeschlossen (also kompakt),*
- *Ω ist invariant unter T,*

so heisst das dynamische System (Ω, T) ein Subshift über $\mathcal{A}$.

Bemerkung.
- Besitzt $\mathcal{A}$ mindestens zwei Elemente, etwa 0 und 1, so ist der volle Shift $(\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}, T)$ weder minimal noch eindeutig ergodisch, da er mit $M_1 = \{\overline{1}\}$ und $M_0 := \{\overline{0}\}$ zwei disjunkte abgeschlossene minimale Mengen besitzt. (Hier bezeichnet $\overline{x}$ die Folge ueber $\mathbb{Z}$, die nur den Wert x animmt.)
- Uns wird es meist um eindeutig ergodische minimale Subshifts gehen.

Ende der 4. Vorlesung

Unser naechstes Ziel besteht darin, Minimalitaet und Eindeutige Ergodizitaet zu charakterisieren. Die Grundidee bei dieser (und vielen anderen) Untersuchungen ist es, die Eigenschaften der unendlichen zweiseitigen Folgen auf Eigenschaften von endlichen Teilstuecken dieser Folgen zurueckzuführen. In gewisser Weise geht es dabei, darum globale Eigenschaften auf lokale Eigenschaften zurueckzuführen. Dazu brauchen wir noch etwas 'lokale Notation':

Sei die endliche Menge $\mathcal{A}$ gegeben. Ein Element von $\mathcal{A}^n$ heisst *Wort der Laenge n*. Meist schreibt man dann

$$v = v_1 \dots v_n \text{ fuer } v = (v_1, \dots, v_n)$$

und setzt

$$|v| := n \quad \text{fuer } v = v_1 \dots v_n$$

mit $v_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \dots, n$, Das Wort $v = v_1 \dots v_n$ *tritt* im Wort $w = w_1 \dots w_m$ an *der Stelle l auf*, wenn gilt

$$w_l \dots w_{l+n-1} = v.$$

Dann sagt man auch, dass w *eine Kopie von v an der Stelle l enthaelt*. Ein l, an dem v auftritt, heisst auch ein *Auftreten* von v in w. Schliesslich wird auch noch das Zaehlen von Auftreten von endlichen Woertern in endlichen Wörtern wichtig sein. In diesem Zusammenhang definiert man

$$\sharp_v w := \sharp\{l : v \text{ tritt in } w \text{ an der Stelle } l \text{ auf}\},$$

wobei $\sharp M$ die Kardinalitaet der Menge M bezeichnet. Voellig analog Betrachtungen und Notation beziehen sich auf das Auftreten von endlichen Wörtern v in unendlichen Wörtern $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ bzw. in einseitig unendlichen Wörtern $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$.
Für gewisse Anwendungen ist es nützlich auch noch das leere Wort

$$\epsilon := \emptyset \text{ mit } |\varepsilon| = 0$$

zur Verfügung zu haben.

Beispiel. Das Wort 010 tritt im Wort 0000100101 an genau zwei Stellen auf. (Welche ;-) Es gilt also $\sharp_{010}\, 0000100101 = 2$.

Beispiel. Das Wort 100 tritt im unendlichen Wort $\dots 010 \dots$ an einer Stelle auf.

Ist $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ gegeben, so heisst

$$\mathcal{W}_\omega := \{\omega_l \dots \omega_{l+n-1} : l \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

die zu ω *assoziierte Sprache und die Elemente von $\mathcal{W}_\omega$ heissen die zu ω assozierten (oder auch die bzgl. ω legalen) endlichen Wörter*. Analog definiert man für $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ die zu ω *assoziierte Sprache* als

$$\mathcal{W}_\omega := \{\omega_l \dots \omega_{l+n-1} : n \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}$$

und nennt die Elemente von $\mathcal{W}_\omega$ die zu ω assoziierten Wörter. Ist Ω eine Teilmenge von $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, so heisst

$$\mathcal{W}(\Omega) := \bigcup_{\omega \in \Omega} \mathcal{W}_\omega$$

die zu Ω *assozierte Sprache und die Elemente von $\mathcal{W}(\Omega)$ heissen die zu Ω assoziierten Wörter (oder die bzgl. Ω legalen Wörter)*.

2. Minimalität

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zur Charakterisierung von Minimalitaet.

THEOREM. *(Charakterisierung Minimalitaet) Sei (Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ und $\mathcal{W} := \mathcal{W}(\Omega)$ die Menge der assoziierten Wörter. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist (Ω, T) minimal.*
(ii) *Zu jedem $v \in \mathcal{W}$ existiert ein $l_v \in \mathbb{N}$ so dass jedes Wort aus $\mathcal{W}$ mit Laenge mindestens l_v eine Kopie von v enthaelt.*
(iii) *Es gilt $\mathcal{W}_\omega = \mathcal{W}$ fuer jedes $\omega \in \Omega$.*

Bemerkung. Die Eigenschaft (iii) besagt gerade, dass alle unendlichen Wörter in Ω dieselben endlichen Teilwörter habe. Die Eigenschaft (ii) besagt, dass die Luecken zwischen zwei aufeinanderfolgenden Auftreten eines festen Wortes v gleichmaessig beschraenkt sind (durch $l_v - |v|$). Zeichnung!

Beweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Angenommen nein! Dann existiert also ein $w \in \mathcal{W}$ und $v_n \in \mathcal{W}$ mit

- $|v_n| \to \infty$
- w tritt nicht in v_n auf.

Ohne Einschraenkung (ggf. einen Buchstaben entfernen) seien die Laengen aller v_n ungerade d.h.

$$|v_n| = 2l_n + 1$$

mit $l_n \to \infty$. Nach Definition von $\mathcal{W}$ existiert weiterhin zu jedem v_n ein $\omega_n \in \Omega$, in dem v_n auftritt. Da Ω invariant unter T ist, existieren also insbesondere ω_n mit

$$\omega_n|_{[-l_n, l_n]} = v_n.$$

Da Ω kompakt ist, hat die Folge (ω_n) eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschraenkung gelte fuer die Folge selber $\omega_n \to \omega$. Da die v_n keine Kopien von w enthalten, enthaelt ω_n keine Kopien von w auf dem Intervall $[-l_n, l_n]$. Damit enthaelt dann wegen $l_n \to \infty$ und $\omega_n \to \omega$ also ω ueberhaupt keine Kopie von w. Andererseits existiert ein $\rho \in \Omega \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$, das eine Kopie von w enthaelt (da w ein assoziiertes Wort ist). Nach der Voraussetzung (i) (Minimalitaet) hat $T^n\omega$ eine Teilfolge, die gegen ρ konvergiert. Da ω und damit auch $T^n\omega$ keine Kopie von w enthaelt, kann dann auch ρ keine Kopie von w enthalten. Das ist ein Widerspruch.

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Das ist klar (da jedes ω beliebig lange Wörter enthaelt).

(iii)$\Longrightarrow$ (i): Seinen ω und ρ aus Ω beliebig gewaehlt. Zu zeigen: Es existiert (n_k) in $\mathbb{Z}$ mit

$$\lim_{k\to\infty} T^{n_k}\omega = \rho.$$

Dazu reicht es zu zeigen: Fuer jedes $l > 0$ tritt $\rho|_{[-l,l]}$ in ω auf. Das folgt aber sofort aus (iii). $\square$

3. Eindeutige Ergodizität

Wir kommen nun zur Charakterisierung von eindeutiger Ergodizitaet. Dazu brauchen wir noch etwas Vorbereitung. Sei (Ω, T) ein subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$. Zu $v \in \mathcal{W}$ und $l \in \mathbb{Z}$ definiert man die *Zylindermenge*

$$U_{v;l} := \{\omega \in \Omega : \omega(l) \dots \omega(l + |v| - 1) = v\} = \{\omega \in \Omega : v \text{ tritt in } \omega \text{ in } l \text{ auf}\}.$$

Offenbar ist jedes $U_{v;l}$ offen *und* abgeschlossen. (Offen: Gehoert ω zu $U_{v;l}$ und ist ρ genuegend nahe and ω so stimmt es mit ω auf dem Stueck der Laenge $|v|$ ab l ueberein. Abgeschlossen: Ist (ω_n) eine Folge in $U_{v;l}$ die gegen ω konvergiert, so tritt v in allen ω_n an der Stelle l auf, also auch in ω.) Tatsaechlich gilt offenbar fuer jedes feste $l \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\Omega = \bigcup_{x \in \mathcal{A}^n \cap \mathcal{W}} U_{x;l},$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist und jedes $U_{x;l}$ offen. (Dabei werden also die Elemente von Ω danach 'sortiert' welches der moeglichen Wörter der Laenge n an der Stelle l auftritt. (*Zeichnung*) Das zeigt, dass der Raum Ω stark unzusammenhaengend ist. Tatsächlich kann man zeigen (Uebung), dass die $U_{x;l}$, $x \in \mathcal{W}$, $l \in \mathbb{Z}$, eine Basis der Topologie bilden (d.h., dass jede offene Menge als Vereinigung von solchen $U's$ dargestellt werden kann).
Die charakteristische Funktion von $U_{v;l}$ wird dann mit $1_{v;l}$ bezeichnet d.h. es gilt

$$1_{v;l} : \Omega \longrightarrow \{0, 1\}$$

mit $1_{v;l}(\omega) = 1$ falls v in ω an der Stelle l auftritt und $1_{v;l}(\omega) = 0$ sonst.

Bemerkung. Ein topologischer Raum mit einer Basis aus Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind, wird (oft) als Cantormenge bezeichnet. Die obigen Betrachtungen zeigen also, dass die Subshifts zugrundeliegenden Mengen Cantormengen sind. (Manchmal wird bei Cantormenge auch noch gefordert, dass der Raum keine isolierten Punkte enthaelt).

LEMMA. *(Dichtheit) Sei (Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$. Dann ist fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ und $l \in \mathbb{Z}$ die Funktion $1_{v;l}$ stetig. Die lineare Huelle der Funktionen $1_{v,l}$, $v \in \mathcal{W}$, $l \in \mathbb{Z}$, ist dicht in $C(\Omega)$.*

Beweis. Die Stetigkeit von $1_{v,l}$ folgt leicht aus Betrachtungen zur Konvergenz (und ist aber auch sofort klar, da $U_{v;l}$ offen und abgeschlossen ist).
Nun zur Dichtheit: Sei $f \in C(\Omega)$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Ziel: Finde Linearkombination der $1_{v;l}$, deren Abstand zu f hoechstens ε betraegt.
Aufgrund der Kompaktheit von Ω ist f gleichmaessig stetig. Damit existiert also ein $\delta > 0$ mit $|f(\omega) - f(\rho)| \leq \varepsilon$ falls $d(\omega, \rho) \leq \delta$. Waehlt man nun ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{|n|>l} \frac{1}{2^{|n|}} \leq \delta$, so gilt also

$$|f(\omega) - f(\rho)| \leq \varepsilon$$

wenn ω und ρ auf $[-l, l]$ uebereinstimmen (da fuer solche ω, ρ offenbar $d(\omega, \rho) \leq \delta$ gilt). Fuer $x \in \mathcal{A}^{2l+1} \cap \mathcal{W}$ kann also f auf $U_{x;l}$ hoechstens um ε schwanken d.h. es gilt

$$|f(\omega) - f(\rho)| \leq \varepsilon$$

fuer $\omega, \rho \in U_{x;l}$. Da $U_{x;l}$, $x \in \mathcal{A}^{2l+1} \cap \mathcal{W}$, paarweise disjunkt sind, gilt dann also fuer

$$g := \sum_{x \in \mathcal{A}^{2l+1} \cap \mathcal{W}} c_x 1_{x;l}$$

mit (zum Beispiel)

$$c_x := \text{ Maximum von } f \text{ auf } U_{x;l}$$

die Abschaetzung

$$\|f - g\| \leq \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Nun noch etwas *Notation*: Sei $\mathcal{W}$ die Menge der endliche Wörter, die zu einem Subshift assoziiert sind, und ist $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann definiert man

$$C = \lim_{|w| \to \infty} F(w)$$

falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$|F(w) - C| \leq \varepsilon$$

fuer alle $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq l_\varepsilon$. In diesem Fall sagt man, dass der Grenzwert $\lim_{|w| \to \infty} F(w)$ existiert. Weiterhin definiert man

$$\liminf_{|w| \to \infty} F(w) \geq C$$

falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$F(w) \geq C - \varepsilon$$

fuer alle $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq l_\varepsilon$. Schliesslich definiert man

$$\limsup_{|w| \to \infty} F(w) \geq C$$

falls gilt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$$F(w) \leq C + \varepsilon$$

fuer alle $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq l_\varepsilon$. Offenbar gilt dann $\lim F(w) = C$ genau dann, wenn gilt $\limsup F(w) \leq C$ und $C \leq \liminf F(w)$.

Lemma. *Sei (Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$. Dann sind fuer $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es existiert* $\lim_{|w| \to \infty} F(w)$.
(ii) *Fuer jede jede Folge (w_n) in $\mathcal{W}$ mit $|w_n| \to \infty$ existiert der Grenzwert* $\lim_{n \to \infty} F(w_n)$.

Beweis. Offenbar gilt (i)$\Longrightarrow$ (ii). Um (ii)$\Longrightarrow$ (i) zu beweisen, mache man sich zunaechst klar, dass der Grenzwert in (ii) nicht von der Folge (w_n) abhaengt ('Folgenmischung'). Anschliessend folgt dann (i) einfach mit einem Widerspruchsbeweis. □

Damit koennen wir nun eindeutige Ergodizitaet charakterisieren.

Ende der 5. Vorlesung

THEOREM. *(Eindeutige Ergodizitaet) Sei (Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist (Ω, T) eindeutig ergodisch.*
(ii) *Fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ und jede Folge (w_n) in $\mathcal{W}$ mit $|w_n| \to \infty$ existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_v w_n}{|w_n|}$.*
(iii) *Fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ existiert $\lim_{|w|\to\infty} \frac{\sharp_v w}{|w|}$.*

In diesem Fall gilt

$$\lim_{|w|\to\infty} \frac{\sharp_v w}{|w|} = L(1_{v,l})$$

fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ und $l \in \mathbb{Z}$, wobei L das eindeutige invariante Wahrscheinlichkeitsmass auf (Ω, T) ist.

Beweis. Die Aequivalenz von (iii) und (ii) folgt sofort aus dem vorangehenden Lemma. Weiterhin ist nach der abstrakten Charakterisierung der Eindeutigen Ergodizitaet und dem Lemma zur Dichtheit der char. Funktionen von Zylindermengen die Aussage (i) aequivalent zu folgender Aussage:

($*$) Die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} 1_{v;l}(T^j\omega)$ existieren gleichmaessig (in $\omega \in \Omega$) fuer alle $l \in \mathbb{Z}$ und $v \in \mathcal{W}$.

Es reicht also zu zeigen, dass ($*$) aequivalent zu (iii) ist.
Die Gleichmaessigkeit in ω in ($*$) bedeutet, dass man $l = 1$ setzen kann (ersetze ω durhc $T^l\omega$ und 'kuerze' l). Damit ist ($*$) also equivalent zu ($**$):

($**$) Die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} 1_{v;1}(T^j\omega)$ existieren gleichmaessig (in $\omega \in \Omega$) fuer alle $v \in \mathcal{W}$.

Offenbar gilt

$$\sum_{j=0}^{n} 1_{v;1}(T^j\omega) = \sharp_v(\omega(1)\ldots\omega(n+|v|-1).$$

Damit ist ($**$) also aequivalent zu ($***$):

($***$) Die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sharp_v(\omega(1)\ldots\omega(n+|v|-1)$ existieren gleichmaessig (in $\omega \in \Omega$) fuer alle $v \in \mathcal{W}$.

Es ist aber ($***$) ist offenbar equivalent zu (iii).
Zur letzten Aussage: Das folgt sofort aus der obigen Gleichung

$$\sum_{j=0}^{n} 1_{v;1}(T^j\omega) = \sharp_v(\omega(1)\ldots\omega(n+|v|-1)$$

und dem Theorem zur Charakterisierung der eindeutigen Ergodizitaet. □

DEFINITION. *Sei (Ω, T) ein eindeutig ergodischer Subshift über dem Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$ und eindeutigem invarianten Wahrscheinlichkeitsmass L. Dann heisst*

$$f_v := \lim_{|w|\to\infty} \frac{\sharp_v w}{|w|} = L(1_{v,0})$$

die Frequenz von $v \in \mathcal{W}$.

FOLGERUNG. *(Charakterisierung Mimialitaet eindeutig ergodischer Systeme) Sei (Ω, T) ein eindeutig ergodischer Subshift über dem Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$. Dann sind die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist* (Ω, T) *minimal.*
(ii) *Fuer jedes* $v \in \mathcal{W}$ *ist* f_v *positiv.*

Beweis. Da (Ω, T) eindeutig ergodisch ist, existieren die Frequenzen f_v gleichmaessig. Dann sieht man leicht, dass Positivitaet der f_v gerade aequivalent zu beschraenkter Lueckenlange des Auftretens von v ist. Diese beschraenkte Lueckenlaenge ist aber nach dem Theorem zur Charakterisierung der Minimalitaet gerade aequivalent zu Minimalitaet. □

4. Aperiodizität

Nach diesen Untersuchungen zu Minimalitaet und Eindeutiger Ergodizitaet kommen wir nun zu Aperiodizitaet.

Definition. *Sei* $\mathcal{A}$ *eine endliche Menge. Es heisst* $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *periodisch mit Periode* $p \in \mathbb{Z}$, *wenn gilt*

$$\omega_n = \omega_{n+p} \text{ fuer alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Ein $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ *heisst nicht-periodisch, wenn es fuer kein* $p \in \mathbb{Z}$ *mit* $p \neq 0$ *periodisch ist.*

Grundlegend ist folgendes Resultat.

Theorem. *(Charakterisierung von Aperiodizitaet) Sei* (Ω, T) *ein Subshift ueber der endlichen Menge* $\mathcal{A}$. *Dann sind äquivalent:*

(i) *Es gibt ein nicht periodisches* $\omega \in \Omega$ *(d.h. ein* ω *mit* $T^n\omega \neq \omega$ *fuer alle* $n \in \mathbb{Z}$ *mit* $n \neq 0$*).*
(ii) *Es gibt* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ *mit* $\omega_1 \neq \omega_2$ *und* $\omega_1 = \omega_2$ *auf* $-\mathbb{N}$.
(iii) *Es gibt* $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ *mit* $\omega_1 \neq \omega_2$ *und* $\omega_1 = \omega_2$ *auf* $\mathbb{N}$.

Bemerkung. (Uebung)

- Auch in einem (Ω, T), das die Bedingungen des Theorems erfuellt, kann durchaus $T^n\rho = \rho$ fuer einzelne $\omega \in \Omega$ und $n \neq 0$ gelten (wie man an Beispielen leicht sieht).
- Ist (Ω, T) minimal und gilt $T^n\omega = \omega$ fuer ein $\omega \in \Omega$ so folgt $T^n\varrho = \varrho$ für alle $\varrho \in \Omega$.

Beweis. Wir zeigen die Aequivalenz von (i) und (ii). Die Äquivalenz von (i) und (iii) kann analog behandelt werden.

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Wir zeigen durch einen Widerspruchsbeweis, dass mindestens eines der beiden Elemente ω_1 und ω_2 nichtperiodisch ist: Dazu nehmen wir an, dass ω_1 und ω_2 beide periodisch sind mit den Perioden p_1 bzw. p_2. Dann ist $p := p_1 p_2$ eine gemeinsame Periode von ω_1 und ω_2. Es gilt also sowohl $T^p\omega_1 = \omega_1$ als auch $T^p\omega_2 = \omega_2$. Da ω_1 und ω_2 auf $-\mathbb{N}$ uebereinstimmen, stimmen sie dann auf ganz $\mathbb{Z}$ ueberein. Das ist ein Widerspruch zu $\omega_1 \neq \omega_2$.

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Seien die Abbildungen $P_\pm$ definiert durch

$$P_+ : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{N}_0}, \omega \mapsto \omega|_{\mathbb{N}_0}$$

und

$$P_- : \Omega \longrightarrow \mathcal{A}^{-\mathbb{N}}, \omega \mapsto \omega|_{-\mathbb{N}}.$$

Dann sind P_+ und P_- (offenbar) stetig. Damit sind dann die Bilder

$$\Omega_- := P_-(\Omega) \;\; \Omega_+ := P_+(\Omega)$$

kompakt.
Angenommen:

(A) Es gilt (ii) nicht!

Aus (A) folgt sofort, dass P_- injektiv ist. Damit ist

$$P_- : \Omega \longrightarrow P_-(\Omega)$$

also bijektiv. Eine stetige bijektive Abbildung zwischen kompakten Raeumen hat aber eine stetige Inverse (nach allgemeinen Prinzipien). Damit folgt also die Stetigkeit der Inversen Abbildung

$$(P_-)^{-1} : \Omega_- \longrightarrow \Omega.$$

Damit ist dann die Abbildung

$$R : \Omega_- \longrightarrow \Omega_+, \rho \mapsto P_+(P_-)^{-1}\rho$$

stetig. Es legen also die Werte von ω auf der linken 'Halbachse' die Werte auf der rechten 'Halbachse' in stetiger Weise fest. Da $\mathcal{A}$ endlich ist, bedeutet die Stetigkeit von R gerade, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $\omega(-N)\ldots\omega(-1)$ schon $\omega(0)$ festlegt. Daraus folgt (Wie? Zunaechst Periodizitaet nach links ab jedem Punkt....) die Periodizitaet jedes einzelnen $\omega \in \Omega$. Das ist ein Widerspruch zu (i). Damit ist (A) widerlegt. □

Definition. *Ein Subshift (Ω, T) heisst nicht periodisch, wenn er ein nichtperiodisches Element enthaelt. Er heisst aperiodisch, wenn keines seiner Elemente periodisch ist. Eine zweiseitig unendliche Folge heisst aperiodisch, wenn der assoziierte Subshift aperiodisch ist.*

Bemerkungen.

- Eine zweiseitig unendliche Folge ist genau dann nicht periodisch, wenn der zugehoerige Subshift nichtperiodisch ist (wie man leicht sieht). In diesem Sinne passen also die Definition von nicht periodisch und von aperiodisch fuer Subshifts und Folgen gut zusammen.
- Ist ein Subshift minimal, so ist Aperiodizitaet aequivalent zu Nichtperiodizitaet.
- Es gibt Subshifts, die nichtperiodisch sind aber nicht aperiodisch. (Z.B. der von ...010... erzeugte Subshift).
- (Uebung): Sei $\mathcal{A}$ endlich und $\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{A}$ gegeben. Sei $P(\omega) := \{p \in \mathbb{N}_0 : T^p\omega = \omega\}$ die Menge der Perioden von ω. Dann gilt $P(\omega) = c\mathbb{N}$ mit der kleinsten Periode c von ω.

Bisher sind wir von Subshifts ausgegangen und haben dazu Wörter assoziiert. Man kann auch umgekehrt zu einer geeigneten Menge von Wörtern einen Subshift assoziieren. Das ist nuetzlich, wenn es darum geht aus einem einzelnen einseitig- oder zweiseitig unendlichen Wort einen Subshift zu erzeugen. Das werden wir nun untersuchen.

Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Zu einer Menge $\mathcal{W}$ von Woertern ueber $\mathcal{A}$ mit den beiden Eigenschaften

- gehoert w zu $\mathcal{W}$ und tritt v in w auf, so gehoert auch v zu $\mathcal{W}$,
- $\mathcal{W}$ enthaelt Woerter beliebiger Laenge,

assoziieren wir den Subshift

$$\Omega(\mathcal{W}) := \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{W}\}.$$

Dann ist Ω nichtleer (Warum?) und es gilt offenbar

$$\mathcal{W}(\Omega(\mathcal{W})) \subset \mathcal{W}.$$

Im allgemeinen ist diese Inklusion strikt (Beispiel: Wörter der Form 0...0 bzw. 10...0...) . Wir untersuchen nun, was die Mengen der Wörter, die zu einem Subshift assoziert sind, wirklich charakterisiert.

PROPOSITION. *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Sei $\mathcal{W}$ eine Menge von Wörtern über $\mathcal{A}$. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es gibt einen Subshift (Ω, T) mit $\mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{W}$.*
(ii) *Die Menge $\mathcal{W}$ hat die folgenden beiden Eigenschaften:*
 - *Gehoert w zu $\mathcal{W}$ und tritt v in w auf, so gehoert auch v zu $\mathcal{W}$,*
 - *Zu jedem $w \in \mathcal{W}$ und jedem $N \in \mathbb{N}$ existieren Wörter x, y der Laenge N in $\mathcal{W}$, so dass xwy auch zu $\mathcal{W}$ gehoert.*

In diesem Fall ist Ω eindeutig bestimmt, und es gilt

$$\Omega = \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{W}\}$$

sowie

$$\mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{W}.$$

Beweis. Die Implikation (i)$\Longrightarrow$ (ii) ist klar. Wir zeigen nun (ii)$\Longrightarrow$ (i): Zu einer Menge $\mathcal{W}$ mit den beiden in (ii) angegebenen Eigenschaften assozieren wir

$$\Omega = \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{W}\}.$$

Dann gilt nach den beiden Eigenschaften

$$\mathcal{W}(\Omega) = \mathcal{W}.$$

Das zeigt (i).

Es bleibt die letzte Aussage zu zeigen: Es wurde schon gezeigt, dass das angegebene Ω die gewuenschten Eigenschaften hat. Es bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Das ist einfach. □

Nach diesen Vorbereitungen untersuchen wir nun, wie Subshifts durch eine ein- oder zweiseitig unendliche Folge erzeugt werden. Sei dazu $\mathcal{A}$ eine endliche Menge.

Sei $\varrho \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ gegeben. Dann hat offenbar $\mathcal{W}_\rho$ die beiden in (ii) der vorigen Proposition geforderten Eigenschaften. Damit kann man dann die *Hülle von ϱ* definieren als

$$\Omega(\varrho) = \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{W}_\rho\}$$

und es gilt nach der Proposition

$$\mathcal{W}(\Omega(\varrho)) = \mathcal{W}_\rho.$$

Offenbar (Uebung) gilt dann weiterhin

$$\Omega(\varrho) := \overline{\{T^n \varrho : n \in \mathbb{Z}\}} \subset \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}.$$

Es heisst $(\Omega(\varrho), T)$ der von ϱ *induzierte Subshift.*

Sei $\varrho_+ \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ gegeben. Dann hat $\mathcal{W}_{\varrho_+}$ die beiden vor der Proposition diskutieren Eigenschaften. Entsprechend kann man die *Huelle von* ϱ_+ definieren als

$$\Omega(\varrho_+) := \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{W}_{\rho_+}\}$$

und es gilt

$$\mathcal{W}(\Omega(\varrho_+)) \subset \mathcal{W}_{\varrho_+}.$$

Die Frage, ob $\mathcal{W}_{\varrho_+}$ die beiden in (ii) der vorigen Proposition gegebenen Eigenschaftern erfuellt ist gerade die Frage, ob ϱ_+ die Eigenschaft hat, dass jedes Wort aus $\mathcal{W}_{\varrho_+}$ unendlich oft in ϱ_+ vorkommt (Uebung). In diesem Fall gilt (Uebung)

$$\Omega(\varrho_+) = \text{ Häufungspunkte von } (T^n \varrho)_{n \in \mathbb{N}}$$

fuer jedes beliebige $\varrho \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ mit $\varrho|_{\mathbb{N}} = \varrho_+$. Es heisst $(\Omega(\varrho_+), T)$ der von ϱ_+ *induzierte Subshift.*

Beispiel. Sei $\varrho := 10 \ldots 0 \ldots$. Dann gilt $\Omega(\varrho_+) := \{\overline{0}\}$.

Ende der Vorlesung

Definition. *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Sei ϱ aus $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ oder $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}_\varrho$ gegeben.*

(a) *Es heisst ϱ repetitiv, wenn zu jedem $v \in \mathcal{W}$ ein $l_v \in \mathbb{N}$ existiert, sodass jedes $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq l_v$ eine Kopie von v enthaelt.*
(b) *Es hat ϱ gleichmäßige Frequenzen, wenn fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ der Grenzwert $\lim_{|w| \to \infty} \frac{\sharp_v w}{|w|}$ existiert.*

Bemerkung. Ist ϱ eine einseitig unendliche Folge und kommt das Wort u nur endlich oft in ϱ vor, so existiert natuerlich die Frequenz von u gleichmaessig in ϱ (und ist Null).

Theorem. *(Charakterisierung Minimalitaet und eindeutige Ergodizitaet von induzierten Subshifts) Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Sei ϱ aus $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ oder $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}_\varrho$ gegeben und (Ω, T) der assoziierte Subshift. Dann gilt:*

(a) *Es ist (Ω, T) minimal genau dann, wenn ϱ repetitiv ist.*
(b) *Es ist (Ω, T) eindeutig ergodisch genau dann, wenn ϱ gleichmäßige Frequenzen hat.*

Beweis. Das folgt sofort aus den Definitionen und den Charakterisierungen von Minimalitaet bzw. eindeutiger Ergodizitaeet mittels der assoziierten Wortmengen. □

Zum Abschluss des Kapitels gehen wir noch etwas auf Komplexitaet ein. Ist ω eine zweiseitig unendliche Folge ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}_\omega$, so ist die Komplexitaet von ω die Funktion

$$P_\omega : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, p_\omega(n) := \sharp\, \mathcal{W}_\omega \cap \mathcal{A}^n = \sharp\{\text{Zu } \omega \text{ assoziierte Wörter der Laenge n}\}.$$

Offenbar ist P_ω eine nichtfallende Funktion.
Offenbar gilt fuer ein mit Periode p periodisches ω die Abschaetzung

$$P_\omega(n) \leq p$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Fuer nichtperiodische Folgen gibt es eine untere Schranke an die Komplexitaet:

THEOREM. *(Morse/Hedlund) Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Dann sind fuer $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ die folgenden Aussagen aequivalent:*

(i) *Es ist ω nicht periodisch.*
(ii) *Es gilt $P_\omega(n+1) \geq P_\omega(n) + 1$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.*
(iii) *Es gilt*
$$P_\omega(n) \geq n + \sharp\mathcal{A} - 1$$
fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere gilt fuer nichtperiodische Folgen ω ueber dem Alphabet $\{0,1\}$ also $P_\omega(n) \geq n+1$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung.

- Das Theorem ist aeusserst bemerkenswert. Es besagt, dass es - was Komplexitaet betrifft - eine echte 'Luecke' gibt zwischen der periodischen Welt und er nichtperiodischen Welt. *Zeichnung* Insbesondere kommt gar nicht jede wachsende Funktion als Komplexitaet in Frage.
- Es gibt tatsaechlich Worte mit minimaler Komplexitaet. Ueber dem Alphabet $\{0,1\}$ lassen sich die (minimalen) Wörter minimaler Komplexitaet charakterisieren. Es sind genau die Sturmschen Wörter.

Beweis. Die Implikationen (ii)$\Longrightarrow$ (iii) und (iii)$\Longrightarrow$ (i) sind klar. Wir zeigen nun (i)$\Longrightarrow$ (ii): Gilt fuer ein $n \in \mathbb{N}$ nicht $P_\omega(n+1) \geq P_\omega(n) + 1$, so muss offenbar gelten
$$P_\omega(n+1) = P_\omega(n)$$
(da die Komplexitaet nicht fallen kann). Damit gibt es also genausoviele Woerter der Laenge n wie Woerter der Laenge $n+1$. Dann hat also jedes Wort der Laenge n genau eine Fortsetzung nach links / rechts zu einem Wort der Laenge $n+1$. Damit muss die Folge ω periodisch sein. $\square$

Aus dem Theorem ergibt sich eine Folgerung ueber Abstaende von Worten. Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Sei $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ repetitiv und $\mathcal{W}$ die assoziierte Wortmenge. Dann definiert man die *Repetitivitaetsfunktion*
$$R : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
durch
$$R_n := \max\{l : \text{jedes Wort der Laenge } l \text{ in } \mathcal{W} \text{ enthaelt jedes Wort der Laenge } n\}.$$
Aufgrund der Repetitivitaet ist $R(n)$ in der Tat fuer jedes n endlich. Offenbar gilt fuer ein p-periodisches Wort $R_n \leq p + n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

FOLGERUNG. *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Sei $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ repetitiv und nicht periodisch und $\mathcal{W}$ die assoziierte Wortmenge. Dann gilt fuer die Repetitivitaetsfunktion R die Ungleichung $R_n \geq 2n$ fuer jedes $n \in \mathbb{N}$.*

Beweis. Gaelte fuer ein $N \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $R_N < 2N$, so wuerde ein (jedes) Wort der Laenge $2N-1$ jedes Wort der Laenge N enthalten. Da es hoechstens N Worter der Laenge N in einem Wort der Laenge $2N-1$ gibt, folgte die Periodizitaet von ω aus dem vorangehenden Theorem. Das ist ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung.

- Es gibt unendliche Wörter mit $R_n \leq Cn$. Diese heissen *linear repetitiv*. Sie wurden in den letzten Jahren sehr stark untersucht (s.u.).
- Die Folgerung befasst sich mit einer oberen Schranke an die Lueckenlaenge zwischen aufeinanderfolgenden Auftreten desselben Wortes. Man kann ebenfalls nach unteren Schranken fragen. Es laesst sich charakterisieren, wann fuer jedes einzelne Wort v die Lueckenlaenge zwischen zwei Auftreten mindestens $c|v|$ ist. Genauer sind fuer einen Subshift (Ω, T) mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$ die folgenden Aussagen aequivalent:
  - Es gibt ein $h \in \mathbb{N}$, so dass $m \leq h$ gilt, falls $v \cdot v$ (m mal) in $\mathcal{W}$ auftritt. ('Es gibt hoechste Potenz')
  - Es gibt eine $c > 0$, so dass der Abstand zwischen zwei Auftreten des Wortes v in einem Wort w mindestens $c|v|$ betraegt. ('Repulsivitaet')

KAPITEL 3

Primitive Substitutionen

In diesem Abschnitt untersuchen wir eine sehr wichtige Klasse von Beispielen von Subshifts ueber endlichen Alphabeten, naemlich primitive Substitutionen.

1. Grundlegendes

DEFINITION. *(Substitution) Eine Substitution auf der endlichen Mengen $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung*

$$S:\mathcal{A}\longrightarrow\mathcal{A}_+^* := \textit{Endliche nichtleere Woerter ueber } \mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}^n.$$

Beispiel - Fibonacci Substitution: In diesem Fall ist $\mathcal{A}=\{0,1\}$ und S gegeben durch

$$S(0)=0,\ \ S(1)=01.$$

Beispiel - Thue-Morse Substitution: In diesem Fall ist $\mathcal{A}=\{0,1\}$ und S gegeben durch

$$S(0)=01,\ \ S(1)=10.$$

Beispiel - Period Doubling Substitution: In diesem Fall ist $\mathcal{A}=\{0,1\}$ und S gegeben durch

$$S(0)=01,\ \ S(1)=00.$$

Beispiel - Rudin Shapiro Substitution: In diesem Fall ist $\mathcal{A}=\{0,1,2,3\}$ und S gegeben durch

$$S(0)=01,\ \ S(1)=02,\ \ S(2)=31,\ \ S(3)=32.$$

Die *Grundidee* der folgenden Untersuchungen ist nun die folgende: Durch wiederholtes Anwenden einer Substitution S entsteht aus dem Buchstaben a die Folge der Woerter $S^n(a):=S(S^n(a))$, $n\in\mathbb{N}$. Aus solchen Wortern (und ihren Teilwoertern) kann man dann einen Subshift erzeugten. Die so erzeugten Subshifts sind das Objekt unseres Interesses. Ihre Eigenschaften sind komplett durch Eigenschaften von S bestimmt. Das werden wir nun genauer untersuchen.

Ende der Vorlesung

DEFINITION. *(Woerter und Subshift einer Substitution) Sei S eine Substitution ueber der endlichen Menge $\mathcal{A}$. Ein $x\in\mathcal{A}^*$ heisst dann zulaessig (oder legal) bzgl. S, wenn es ein $a\in\mathcal{A}$ und ein $n\in\mathbb{N}$ gibt, so dass x in $S^n(a)$*

vorkommt. Die Menge der bzgl. S zulaessigen Woerter wird mit $\mathcal{W}(S)$ bezeichnet. Enthaelt $\mathcal{W}(S)$ beliebig lange Woerter, so heisst

$$\Omega(S) := \{\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}} : \mathcal{W}_\omega \subset \mathcal{W}(S)\}$$

der zu S assoziierte Subshift.

Wesentliche Informationen ueber die Substitution S erhaelt man aus der Substitutionsmatrix.

Definition. *(Substitutionsmatrix) Sei S eine Substitution ueber der endlichen Menge $\mathcal{A}$. Dann heisst die Abbildung*

$$M := M_S : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}_0, \ \ M(a,b) := \sharp_a S(b)$$

die Substitutionsmatrix.

Bemerkung. (Uebung) Ein etwas abstrakterer Zugang definiert eine Substitution ueber $\mathcal{A}$ als einen Endomorphismus der freien Gruppe $F_{\mathcal{A}}$ ueber den Buchstaben aus $\mathcal{A}$. Solch ein Endomorphismus ist dann eindeutig durch seine Wirkung auf den Buchstaben festgelegt. Dann gibt es einen eindeutigen Gruppenhomomorphismus

$$A : F_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \text{ mit } A(x) = 1_x$$

fuer alle $x \in \mathcal{A}$. Dieser Gruppenhomomorphismus heisst Abelisierung der freien Gruppe. Mittels A induziert die Substitution dann eine Abbildung $S_{abelsch}$ auf $\mathbb{Z}^{\mathcal{A}}$ mit

$$S_{abelsch} \circ A = A \circ S.$$

(Zeichnung). Die Abbildung $S_{abelsch}$ ist gerade gegeben durch $M(S)$, d.h. es gilt

$$S_{abelsch} : \mathbb{Z}^{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathbb{Z}^{\mathcal{A}}, \ \ S_{abelsch}(v)(x) = \sum_{c \in \mathcal{A}} M_S(x,c) v(c).$$

Die von uns untersuchten Substitutionen haben dann alle die Besonderheit, dass M_S nur nichtnegative Eintraege hat. Diese Betrachtungen klaeren die algebraische Struktur, die einer Substitution zugrundeliegt (und von uns bisher nicht beachtet wurde):

- Es gibt eine natuerliche Multiplikation auf den Woertern.
- Es gibt eine Inversenbildung auf den Woertern.

Sie suggerieren auch, dass denjenigen Substitutionen einen besondere Bedeutung zukommt, die Automorphismen der freien Gruppe induzieren.

Proposition. *Sind S und T Substitutionen ueber der endlichen Menge $\mathcal{A}$, so ist auch $S \circ T$ eine Substitution ueber $\mathcal{A}$ und fuer die Substitutionsmatrix $M_{S \circ T}$ von $S \circ T$ gilt*

$$M_{S \circ T} = M_S \cdot M_T$$

mit $M_S \cdot M_T(a,b) := \sum_{c \in \mathcal{A}} M_S(a,c) M_T(c,b)$.

Beweis. Fuer $b \in \mathcal{A}$ mit $T(b) = x_1 \ldots x_m$ mit $x_j \in \mathcal{A}$ gilt

$$S \circ T(b) = S(T(b)) = S(x_1 \ldots x_m) = S(x_1) \ldots S(x_m)$$

und damit

$$\sharp_a (S \circ T)(b) = \sharp_a S(x_1) \ldots S(x_m) = \sum_{j=1}^{m} \sharp_a S(x_j) = \sum_{c \in \mathcal{A}} \sharp_a S(c) \, \sharp_c T(b) = M_S(a,c) M_T(c,b).$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Das Resultat ist offensichtlich in der Betrachtung via Abelisierung. (Zeichnung)

FOLGERUNG. *Ist S eine Substitution auf der endlichen Menge $\mathcal{A}$, so ist auch das induktiv (via $S^0 := Id$, $S^{n+1} := S \circ S^n$) definierte S^m eine Substitution fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ und die Substitutionsmatrix von S^m ist gegeben durch $M_{S^m} = (M_S)^m$ (wobei auch $(M_S)^m$ induktiv definiert ist).*

Uns wird es um eine spezielle Klasse von Substitutionen gehen.

DEFINITION. *Eine Substitution S auf der endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit Substitutionsmatrix M heisst primitiv, wenn eine natuerliche Zahl N existiert, so dass alle Eintraege von M^N positiv sind.*

PROPOSITION. *Sei S eine primitive Substitution auf der endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit Substitutionsmatrix M und M^N habe strikt positive Einträge. Dann hat auch M^n strikt positiv Einträge fuer alle $n \geq N$. Gilt $\sharp\mathcal{A} \geq 2$, so folgt weiterhin $M^n(a,b) \to \infty$ fuer alle $a, b \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Die erste Aussage kann leicht mittels Induktion bewiesen werden. (Dabei nutzt man bei der Analyse von $M^{n+1} = M^n M$, dass die Eintraege von M nichtnegativ sind und jede Spalte mindestens einen nichtverschwindenden Eintrag hat.)
Zum Beweis der zweiten Aussagen nutzt man, dass $m_n := \inf M^n(a,b)$ monoton wachsend in n ist und $m_{kn} \geq k m_n$ erfuellt. □

Bemerkung. Zu einer Substitution S ueber $\mathcal{A}$ laesst sich der Graph der Substitution $(V, E) = (V_S, E_S)$ assoziieren. Dabei ist $V = \mathcal{A}$ und zwischen zwei Vertices $a, b \in \mathcal{A}$ gibt es genau dann eine Kante von a nach b, wenn a in $S(b)$ auftritt. Dann gilt:

- Es gibt einen Pfad der Laenge k von a nach b genau dann, wenn gilt $M^k(a,b) > 0$.

(Bew. Es gilt

$$M^k(a,b) = \sum_{i_1,\ldots,i_{k-1} \in \mathcal{A}} M(a,i_1) M(i_1,i_2) \ldots M(i_{k-1},b)$$

mit nichtnegativen Eintraegen. Weiterhin gilt nach Definition $M(c,d) > 0$ genau dann, wenn es eine Kante von c nach d gibt. Damit folgt die Aussage leicht.)

Die Aussage • liefert dass eine Substititution genau dann primitiv ist, wenn es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass jeder Vertex von jedem Vertex aus mit einem Pfad der Laenge N erreicht werden kann. Damit folgt dann die Aussage der vorigen Propostion sofort.

Wir halten nun einige Eigenschaften primitiver Substitutionen fest.

PROPOSITION. *Sei S eine primitive Substitution auf einer endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit mehr als einem Buchstaben und sei $\mathcal{W}$ die Menge der assozierten Woerter. Dann gilt:*

(a) $|S^n(a)| \to \infty$ *fuer jedes $a \in \mathcal{A}$.*

(b) *Fuer jedes $x \in \mathcal{W}$ existiert eine natuerliche Zahl n_x mit $x \in S^n(a)$ fuer alle $n \geq n_x$ und $a \in \mathcal{A}$.*

Beweis. (a) Es gilt $|S^n(a)| \geq \sharp_b S^n(a) = M^n(b,a) \to \infty$ (nach voriger Proposition).

(b) Sei $v \in \mathcal{W}$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $b \in \mathcal{A}$ mit

$$\sharp_v S^m(b) \geq 1.$$

Es enthaelt $S^{n-m}(a)$ eine Kopie von b fuer alle grossen n unabhaengig von a nach der vorangehenden Proposition. Damit folgt also, dass fuer grosse n und beliebige a also

$$S^n(a) = S^m S^{n-m}(a) = S^m(...b....) = ...S^m(b)...$$

eine Kopie von v enthaelt. □

Folgerung. *Sei S eine primitive Substitution auf einer endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit mehr als einem Buchstaben und sei $\mathcal{W}$ die Menge der assozierten Woerter. Dann existiert zu jedem $l \in \mathbb{N}$ eine $n \in \mathbb{N}$ so dass jedes Wort der Laenge l in $S^n(b)$ auftritt fuer jedes $b \in \mathcal{A}$.*

Beweis. Es gibt nur endlich viele Wörter der Laenge l. Damit folgt die Aussage aus der vorigen Proposition.

□

Ende der Vorlesung

Folgerung. *Sei S eine primitive Substitution auf einer endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit mehr als einem Buchstaben und sei $\mathcal{W}$ die Menge der assozierten Woerter. Dann gibt es zu jedem $v \in \mathcal{W}$ ein $l \in \mathbb{N}$, so dass jedes Wort aus $\mathcal{W}$ der Lange l eine Kopie von v enthaelt. Insbesondere ist $(\Omega(S), T)$ minimal.*

Beweis. Sei v ein beliebiges Wort aus $\mathcal{W}$. Dann gibt es nach der vorigen Folgerung ein $n \in \mathbb{N}$, so dass v in $S^n(b)$ auftritt fuer jedes $b \in \mathcal{A}$. Sei $w \in \mathcal{W}$ ein beliebiges Wort der Laenge mindestens $3\|M\|_1^n$. (Dabei bezeichnet $\|M\|_1$ die Norm von M als Abbildung von ℓ^1 nach ℓ^1.) Dann ist w in einem $S^k(a)$ enthalten. Nach Vorausetzung ist $k \geq n$ und

$$S^k(a) = S^n(x_1 \dots x_l) = S^n(x_1) \dots S^n(x_l)$$

mit $x = S^{k-n}(a)$. Tatsaechlich muss nach Voraussetzung dann w ein $S^n(x_j)$ enthaelten. Dieses $S^n(x_j)$ enthaelt aber nach dem am Anfang des Beweises diskutierten eine Kopie von v. Also enthaelt w eine Kopie von v. □

Der Subshift, der zu einer primitiven Substitution assoziiert ist, kann schon durch Iteration der Substitution auf einem einzigen Buchstaben beschrieben werden:

Folgerung. *Sei S eine primitive Substitution auf einer endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit mehr als einem Buchstaben und sei $\mathcal{W}$ die Menge der assozierten Woerter. Sei (a_n) eine beliebige Folge in $\mathcal{A}$ und $\omega_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit $\omega_n = S^n(a_n)$ auf $[1, |S^n(a_n)|]$ beliebig und $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ ein Hauefungspunkt von (ω_n). Dann gilt $\mathcal{W}_\omega = \mathcal{W}$ und jedes Wort aus $\mathcal{W}_\omega$ kommt unendlich oft in $\mathcal{W}_\omega$ vor. Insbesondere gilt also $\Omega(S) = \Omega(\omega)$.*

Beweis. Wir zeigen: Ist $N \in \mathbb{N}$ beliebig, so gehoert die Einschraenkung von ω auf $[1, N]$ zu $\mathcal{W}$. (Dann folgt die Aussage aus der vorigen Proposition).

Sei also $N \in \mathcal{W}$ beliebig und $w = \omega(0) \ldots \omega(N)$. Dann existiert nach Voraussetzung eine natuerliche Zahl n, so dass $S^n(a_n)$ mit w beginnt. Damit gehoert also w zu $\mathcal{W}$. □

2. Das Theorem von Perron / Frobenius

Zur Untersuchung der Substitutionsmatrizen dient das folgende (allgemeine) Resultat, das auch in anderen Zusammenhaengen nuetzlich ist.

THEOREM. *(Perron/Frobenius) Sei M eine quadratische Matrix mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

- *Die Matrixelemenete von M sind nichtnegativ (d.h. $Mf \geq 0$ fuer $f \geq 0$.*
- *Es gibt eine natuerliche Zahl N, sodass alle Matrixelemente von M^N strikt positiv sind.*

Dann gelten die folgenden Aussagen.
(a) Es gibt einen positiven Eigenwert θ mit $\theta > |\lambda|$ fuer alle anderen Eigenwerte λ von M.
(b) Es gibt einen strikt positiven Eigenvektor zu θ.
(c) Der Eigenwert θ hat die algebraische Vielfachheit eins.

Bemerkung. Eine Matrix M mit den beiden Eigenschaften des Theorems heisst *primitiv*. Eine Matrix M mit nichtnegativen Eintraegen heisst *irreduzibel*, wenn es zu jedem i, j ein $N = N(i, j)$ gibt mit $M^N(i, j) > 0$. Dann heisst der (nicht von i abhaengende) groesste gemeinsame Teiler von

$$\{k : M^k(i, i) > 0\}$$

die Periode p von M. ist $p = 1$, so heisst M *aperiodisch*. Es gilt:

- M primitiv $\Longleftrightarrow$ M ist irreduzibel und aperiodisch.

Fuer irreduzible Matrizen gibt es eine eindeutigen Eigenwert $\theta > 0$ mit $\theta \geq |\lambda|$ fuer alle Eigenwerte λ von M. Fuer dieses θ gelten (b) und (c). Weiterhin gibt es genau p Eigenwerte von M mit Norm θ. Dieses sind gegeben durch

$$\lambda = \theta e^{2\pi i \frac{k}{p}}, \;\; k = 0, \ldots, p - 1.$$

Ein Beispiel einer Substitution mit irrduzibler nicht aperiodischer Matrix ist gegeben durch $S(a) = b$, $S(b) = a$. Zeichnung....

Beweis. In diesem Beweis schreiben wir fuer Vektoren x, y im Euklidischen Raum $x \leq y$ falls jede einzelne Komponente von x kleiner oder gleich der entsprechenden Komponente von y ist und wir schreiben $x < y$, falls jede Komponente von x echt kleiner als die entsprechende Komponente von y ist.

Wir betrachten die Menge (der 'Eigenwerte' zu subharmonischen Funktionen)

$$\mathcal{S} := \{s \geq 0 : sf \leq Mf \text{ fuer ein } f \geq 0 \text{ mit } f \neq 0\} \subset [0, \infty).$$

Offenbar ist S ein Intervall. Die Menge S ist beschraenkt (z.B. durch $\|M\|$). Die Menge S ist abgeschlossen. (Betrachte s_n mit $s_n \to s$ und $s_n f_n \leq M f_n$;

o.E. koennen wir annehmen, dass $\|f_n\| \leq 1$ fuer alle n, also o.E. $f_n \to f...$). Damit ist S also kompakt. Da S also kompakt ist, existiert $\theta = maxS$. Die Menge S enthaelt ein $s > 0$. (Es hat M keine Nullzeile. Damit kann man $s := \min\{(M1)_j\}$ waehlen, wobei 1 die Konstante Funktion 1 ist.) Damit folgt

$$\theta > 0.$$

Wir zeigen nun, dass θ die gewünschten Eigenschaften hat.

Behauptung. Gilt $\theta|g| \leq M|g|$ fuer ein $g \neq 0$ so folgt $\theta|g| = M|g|$ und alle Eintraege von $|g|$ sind strikt positiv.
Bew. Nach Voraussetzung gilt $M|g| - \theta|g| \geq 0$. Waere $M|g| - \theta|g| \neq 0$, so folgte $0 < M^N(M|g| - \theta|g|) = M(M^N|g|) - \theta M^N|g| = My - \theta y$ mit $y = M^N|g|$. Das ist ein Wiederspruch zur Maximalitaet von θ. Dann gilt aber auch $\theta^N|g| = M^N|g|$. Hier ist die rechte Seite nach Voraussetzung strikt positiv, also auch die linke Seite, also auch $|g|$.

Behauptung. Sei f zu θ gewaehlt. Dann gilt $\theta f = Mf$. Insbesondere ist f strikt positiv und θ ist ein positiver Eigenwert.
Bew. Nach Voraussetzung gilt $Mf - \theta f \geq 0$ und $f = |f|$. Nun folgt alles aus der ersten Behauptung.

Behauptung. Ist λ ein anderer Eigenwert, so gilt $|\lambda| < \theta$.
Bew. Ist g eine Eigenfunktion zu λ so gilt $|\lambda||g| = |\lambda g| = |Mg| \leq M|g|$. Damit folgt $|\lambda| \leq \theta$ aufgrund der Maximalitaet von θ. Sei nun $|\lambda| = \theta$. Dann muss gelten (vgl erste Behauptung)

$$\theta|g| = |\lambda||g| = M|g|.$$

Das impliziert

$$\theta^N|g| = |\lambda^N g| = |M^N g| \leq M^N|g| = \theta^N|g|.$$

Da alle Eintraege von M^N positiv sind, folgt also, dass g und $|g|$ bis auf einen Faktor uebereinstimmen. Damit ist g (wie auch $|g|$) eine Eigenfunktion zu θ und es folgt $\lambda = \theta$.

Behauptung. Die algebraische Vielfachheit von θ ist eins.
Bew. Die geometrische Vielfachheit ist eins: Sind g, f zwei Eigenfunktionen zu θ so auch $f - cg = h$. Waehle c so dass eine Komponente von h verschwindet. Es gilt

$$\theta|h| = |\theta h| = |Mh| \leq M|h|.$$

Dann muss gelten (vgl erste Behauptung), dass $|h|$ eine Eigenvektor von θ ist. Damit folgt dann aus der ersten Behauptung $h \equiv 0$.
Waere nun die algebraische Vielfachheit groesser als die geometrische Vielfachheit, so gaebe es ein 'Jordankaestchen'. Dann wuerde man also ein strikt positives w finden und ein $v \neq 0$ mit

$$Mv = w + \theta v.$$

Induktiv ergibt sich dann

$$M^n v = n\theta^{n-1}x + \theta^n w$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$M^n|v| \geq |M^n v| \geq \theta^n n \left|\frac{1}{\theta}v + \frac{1}{n}w\right|.$$

Damit folgt fuer ein genuegend grosses N also

$$M^N|v| > 2\theta^N|v|.$$

Wendet man nun auf M^N das (fuer M) oben gezeigt an, so schliesst man, dass der (betrags)groesste Eigenwert von M^N mindestens $2\theta^N$ ist. Andererseits ist der (betrags)groesste Eigenwert von M^N natuerlich gerade die N-te Potenz des (betrags)groessten Eigenwertes von M d.h. θ^N. Das ist ein Widerspruch. □

FOLGERUNG. *Die quadratische Matrix M habe nichtnegative Einträge und es habe M^N strikt positive Eintraege fuer ein $N \in \mathcal{N}$. Sei $\theta > 0$ der betragsgroesste Eigenwert von M und von M^T und seien v bzw. w zugehoerige strikt positive Eigenvektoren mit $\langle v, w\rangle = 1$. Sei $P = P_\theta$ die Abbildung mit $Px = \langle w, x\rangle v$ und $N = M - \theta P$. Dann gilt:*

- $M = \theta P + N$.
- *Es ist P eine Projektion (d.h. es gilt $P^2 = P$).*
- *Die Betraege der Eigenwerte von N sind alle kleiner als θ.*
- *Es gilt $PN = NP = 0$.*

Bemerkung. Es ist P im allgemeinen keine orthogonale Projektion (d.h. es gilt nicht $P^* = P$).

Beweis. Sei U eine invertierbare Matrix, die M diagonalisiert, so dass gilt

$$M = U(\theta, J)U^{-1}$$

und $Ue_1 = v$ und $U^{-1}v = e_1$. Sei $\widetilde{P} := U(10)U^{-1}$ und $\widetilde{N} := U(0J)U^{-1}$. Dann gilt:

- $M = \theta\widetilde{P} + \widetilde{N}$.
- Es ist $\widetilde{P}$ eine Projektion.
- Die Betraege der Eigenwerte von $\widetilde{N}$ sind alle kleiner als θ.
- Es gilt $\widetilde{P}\widetilde{N} = \widetilde{N}\widetilde{P} = 0$.

Es reicht also nun $P = \widetilde{P}$ zu zeigen. (Dann folgt aus $M = \theta\widetilde{P} + \widetilde{N} = \theta P + N$ auch $N = \widetilde{N}$ und die uebrigen Aussagen folgen sofort.)

Ende der Vorlesung.

Nun zum Beweis von $P = \widetilde{P}$: Sei $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$.
Es gilt

$$M^t = (U^{-1})^*(\theta, J^t)U^*.$$

Die erste Spalte u von $(U^*)^{-1}$ ist dann also ein Eigenvektor von M^t zum Eigenwert θ ($U^*u = e_1$, $(U^*)^{-1}e_1 = u$...) Weiterhin gilt fuer diesen Eigenvektor

$$1 = \langle e_1, e_1\rangle = \langle U^*e_1, (U^*)^{-1}e_1\rangle = \langle v, u\rangle.$$

Damit folgt

$$u = w$$

(da u und w beide Eigenwerte von M_t zu θ sind mit der gleichen Normierung).

Wir berechnen nun Px zu

$$Px = U(10)U^{-1}x = U((U^{-1}x)_1 e_1) = (U^{-1}x)_1 v.$$

Es bleibt $U^{-1}x$ zu bestimmen. Unter Nutzen von $u = w$ folgt

$$(U^{-1}x)_1 = \langle e_1, U^{-1}x\rangle = \langle (U^{-1})^* e_1, x\rangle = \langle u, x\rangle = \langle w, x\rangle.$$

Nimmt man die letzten beiden Zeilen zusammen so folgt die Aussage. □

3. Eindeutige Ergodizitaet

Das Ziel ist es nun eindeutige Ergodizitaet der zu primitiven Substitutionen zugehoerigen Subshifts zu beweisen. Dazu gehen wir in mehreren Schritten vor.

Notation. Fuer $w \in \mathcal{A}^*$ sei $L_w : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}_0$ definiert durch $L_w(a) := \sharp_a(w)$. (Diese Funktion hat schon eine Rolle gespielt als Abelisierung in einer obigen Bemerkung.)

PROPOSITION. *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge und S eine primitive Substitution ueber $\mathcal{A}$ mit zugehoerigem Perron-Frobenius Eigenwert θ und entsprechender Projektion P. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\theta^n} L(S^n(a)) = P1_a$$

mit der charakteristischen Funktion 1_a von a.

Beweis. Wir zeigen zunaechst

$$L(S^n(a)) = M^n 1_a.$$

Das folgt durch Induktion. Der Induktionsschritt wird mit folgender Rechnung gezeigt (mit $S(a) = x_1 \dots x_k$, $x_j \in \mathcal{A}$)

$$\begin{aligned}
L(S^{n+1}a) &= L(S^n(Sa))\\
&= S(S^n(x_1\dots x_k))\\
&= L(S^n x_1 \dots S^n x_k)\\
&= \sum_{j=1}^{k} LS^n x_j\\
&= \sum_{b\in\mathcal{A}} \sharp_b S(a) LS^n(b)\\
\text{(Aussage fuer } n \text{ wahr)} \quad &= \sum_{b\in\mathcal{A}} \sharp_b S(a) M^n 1_b\\
&= \sum_{b\in\mathcal{A}} M(b,a) M^n 1_b\\
&= M^{n+1} 1_a.
\end{aligned}$$

Damit gilt nach einer Folgerung

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\theta^n} LS^n(a) = \frac{1}{\theta^n} M^n 1_a &= \frac{1}{\theta^n} (\theta P + N)^n 1_1\\
\text{(Folg.)} \quad &= P1_a + \frac{1}{\theta^n} N^n 1_a\\
\text{(Folg.)} \quad &\to P1_a.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt benutzt, dass (nach der Folgerung) die Eigenwerte von N dem Betrag nach alle kleiner als θ sind.) Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Die Geschwindigkeit der Konvergenz in der vorigen Proposition haengt von der spektralen Luecke d.h. dem Abstand von θ zum naechstkleineren Eigenwert ab.

FOLGERUNG. *(Existenz der Frequenzen von Buchstaben) Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge und S eine primitive Substitution ueber $\mathcal{A}$ mit zugehoerigem Perron-Frobenius Eigenwert θ. Sei v der eindeutige (positive) Eigenvektor zu θ mit $\sum_{a\in\mathcal{A}} v_a = 1$. DAnn gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S^n(a)|} L(S^n(a)) = v$$

fuer alle $a \in \mathcal{A}$.

Bemerkung.

- Frequenzen von Buchstaben existieren gleichmaessig in $a \in \mathcal{A}$.
- Frequenzen sind explizit gegeben durch Komponenten eines kanonischen Eigenvektors.

Beweis. Sei $v_a := P1_a$. Dann gilt nach der vorangehenden Proposition:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\theta^n} L(S^n(a)) = v_a$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|S^n(a)|}{\theta^n} = \sum_{b\in\mathcal{A}} v_a(b) =: |v_a|.$$

Damit folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{|S^n(a)|} LS^n(a) = \frac{1}{|S^n(a)|/\theta^n} \frac{LS^n(a)}{\theta^n} = \frac{1}{|v_a|} v_a.$$

Das liefert sofort die Behauptung. □

THEOREM. *(Eindeutige Ergodizitaet primitiver Substitutionen) Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge und S eine primitive Substitution ueber $\mathcal{A}$. Dann ist das assoziierte dynamische System $(\Omega(S), T)$ eindeutig ergodisch.*

Beweis. Es geht darum, die Existenz der Frequenzen jedes beliebigen festen Wortes in beliebigen Langen Woertern zu zeigen. Bisher haben wir nur die Existenz von Buchstaben in bestimmten langen Woertern gezeigt. Wir muessen also an zwei Stellen verallgemeinern. Entsprechend besteht der Beweis im wesentlichen aus zwei Schritten. Die Verallgemeinerung zur Existenz der Frequenzen beliebiger Worte geschieht durch Einfuehren eines neuen Alphabetes. Die Verallgemeinerung auf beliebige lange Woerter erweist sich als relativ einfach moeglich durch geeignetes Zusammensetzen. Hier sind die Details:

Behauptung. Sei $v \in \mathcal{W}(S)$ beliebig. Dann existiert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_v S^n(a)}{|S^n(a)|}$$

fuer alle $a \in \mathcal{A}$ und haengt nicht von $a \in \mathcal{A}$ ab.
Bew. Sei $l := |v|$. Sei

$$\mathcal{A}_l := \mathcal{A}^l \cap \mathcal{W}(S)$$

und
$$S_l : \mathcal{A}_l \longrightarrow \mathcal{A}_{l,+}^*$$
definiert durch

$S_l(u) :=$ geordnete Auflistung der ersten $|S(u_0)|$ Woerter der Laenge l in $S(u)$.

Konkret: Sei $u = u_0 \dots u_{l-1}$ und
$$S(u) = S(u_0)S(u_1)\dots S(u_{l-1}) = y_0 y_1 \dots y_{|S(u)|-1}.$$
Dann definiert man
$$S_l(u) := (y_0 \dots y_{l-1})(y_1 \dots y_l)\dots(y_{|S(u_0)|-1} \dots y_{|S(u_0)|+l-2}).$$
Damit gilt also nach Definition
$$|S_l(u)|_{\mathcal{A}_l} = |S(u_0)|_{\mathcal{A}}.$$
Weiterhin ist (Uebung) S_l primitiv, und es gilt
$$S_l^n(u) = (y_0 \dots y_{l-1})(y_1 \dots y_l)\dots(y_{|S^n(u_0)|-1}\alpha_0 \dots \alpha_{l-2})$$
fuer
$$S^n(u) = S^n(u_0 \dots u_{l-1}) = S^n(u_0)\dots S^n(u_{l-1}) = y_0 \dots y_{|S^n(u_0)|-1}\alpha_0\alpha_1 \dots$$
Damit folgt also auch
$$(*) \quad |S_l^n(u)| = |S^n(u_0)| \text{ und } \sharp_v^{(l)} S_l^n(u) = \sharp_v S^n(u_0) \pm l.$$
(Hier bedeutet $\pm l$, dass die Terme auf der linken und der rechten Seite sich um hoechstens l unterscheiden.) Weiterhin existiert da S_l primitiv ist nach einer vorangehenden Folgerung aber die Frequenz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_v^{(l)} S_l^n(u)}{|S_l^n(u)|}.$$
Kombiniert man diese Aussage mit $(*)$, so folgt die gewuenschte Behauptung.

Behauptung. Fuer alle $v \in \mathcal{W}(S)$ existiert $\lim_{|w|\to\infty} \frac{\sharp_v w}{|w|}$.
Bew. Nach der vorangehenden Behauptung existiert
$$f_v := \lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_v S^n(a)}{|S^n(a)|}$$
und haengt nicht von a ab. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert also ein n_0 mit
$$|f_v - \frac{\sharp_v S^n(a)}{|S^n(a)|}| \le \varepsilon$$
fuer alle $a \in \mathcal{A}$ und $n \ge n_0$. Waehle eine solches n. (Die genaue Bestimmung von n wird erst am ende vorgenommen.)
Sei
$$R := \max\{|S^n(a)| : a \in \mathcal{A}\} \ \ r := \min\{|S^n(a)| : a \in \mathcal{A}\}.$$
(Beachte, dass R und r von n abhaengen.)
Betrachte nun ein (langes) Wort w. Dann kann man w schreiben als
$$w = pS^n(x_i)\dots S^n(x_{i+h})q$$
mit
$$|p|, |q| \le R$$

und
$$h \le \frac{|w|}{r}.$$
Weiterhin gelten offenbar die beiden Ungleichungen
$$\sharp_v p + \sum_{j=0}^{h} \sharp_v S^n(x_{i+j}) + \sharp_v q \le \sharp_v w$$
und
$$\sharp_v w \le \sharp_v p + \sum_{j=0} h \sharp_v S^n(x_{i+j}) + \sharp vq + (h+2)|v|.$$
Damit folgt die Behauptung einfach nach Division durch $|w|$ und Bilden des Grenzwertes $|w| \to \infty$.

Offenbar liefert die zweite Behauptung gerade die eindeutige Ergodizitaet. □

Folgerung. *Sei S eine primitive Substitution. Dann ist $(\Omega(S), T)$ minimal und eindeutig ergodisch.*

Ende der Vorlesung

4. Beispiele

Beispiel - Fibonacci Substitution. $S : \{a,b\} \longrightarrow \{a,b\}^*$, $S(a) = ab$ $S(b) = a$. Dann gilt
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Zeichnung. Substitutionsgraph.. Es gilt
$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
Insbesondere ist S also primitiv. Wir bestimmen nun den PF Eigenvektor. Das charakteristische Polynom ist gegeben durch
$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1.$$
Die Eigenwerte sind also
$$\lambda_{pm} := \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$
Es ist $\lambda_+ =: \tau$ der *goldene Schnitt* Es gilt:
$$\lambda_+ \lambda_- = -1, \;\; \lambda_+ + \lambda_- = 1$$
sowie
$$\tau^2 - \tau - 1 = 0, \text{ also } \tau^2 = 1 + \tau.$$
Es ist $v = \frac{1}{1+\tau}(\tau, 1)$ der eindeutige (normierte) strikt positive Eigenvektor von τ. Insbesondere gilt also fuer die Frequenzen: Frequenz von $a = \frac{1}{\tau}$ und Frequenz von $b = 1/\tau^2$.
Insbesondere ist $\Omega(S)$ also aperiodisch (da die Frequenzen von a und b irrational sind).

Bevor wir weitere Beispiele betrachten, geben wir noch einmal einen strukturellen Zugang zu (primitiven) Substitutionen via Fixpunken: Sei dazu S

eine Substitution auf der endlichen Menge $\mathcal{A}$ und $S(a) = aw$ mit $w \neq \varnothing$ fuer ein $a \in \mathcal{A}$. Definiere

$$s_n := S^n(a).$$

Dann gilt (kleine Rechnung)

$$s_{n+1} = S^{n+1}(a) = S^n(Sa) = S^n(aw) = S^n(a)S^n(w) = s_n S^n(w).$$

Damit beginnt also s_{n+1} mit s_n und ist strikt laenger als s_n. Damit koennen wir den 'Grenzwert'

$$\omega := S^\infty(a) := \lim_{n\to\infty} s_n \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$$

bilden (d.h. $S^\infty(a)$ ist dasjenige Element von $\mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ das auf $[1, |s_n|]$ gerade mit s_n uebereinstimmt). Es gilt (kleine Rechnung)

$$\omega = S(\omega) := S(\omega_1)S(\omega_2).....$$

(Denn: Es beginnt ω mit s_n, also beginnt $S(\omega)$ mit $S(s_n) = s_{n+1}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Damit stimmt $S(\omega)$ mit ω ueberein.) Ein $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ mit

$$\omega = S(\omega_1)S(\omega_2)...$$

heisst (einseitig unendlicher) *Fixpunkt* von S.
Analog sieht man ebenfalls, dass fuer a, b mit $S(a) = aw$ und $S(b) = vb$ mit $w, v \neq \varnothing$ auch

$$\omega := S^\infty(b)|S^\infty(a)$$

existiert und

$$\omega = ...S(\omega_{-1})S(\omega_0)|S(\omega_1)S(\omega_2).... = \omega$$

erfuellt. (Hier und im folgenden wird der Uebergang vom 0-ten zum 1-ten Buchstaben eines zweiseitig unendlichen Wortes mit | makiert.) Ein $\omega \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ mit

$$\omega = ...S(\omega_{-1})S(\omega_0)|S(\omega_1\omega_2....)$$

heisst (zweiseitig unendlicher) Fixpunkt von S.

Proposition. *Sei S eine Substitution ueber der endlichen Menge $\mathcal{A}$. Dann gilt:*
(a) Es existiert ein $a \in \mathcal{A}$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $S^N(a)$ mit a beginnt.
(b) Enthaelt $W(S)$ ein Wort der Laenge 2 so gibt es ein Wort $ba \in W(S)$ und ein $N \in \mathbb{N}$, so dass sowohl $S^N(b)$ mit b aufhoert als auch $S^N(a)$ mit a anfaengt.
(c) Gilt $|S^n(a)| \to \infty$ fuer jedes $a \in \mathcal{A}$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und ein Wort $ba \in W(S)$, so dass $S^N(a) = aw$ und $S^N(b) = vb$ mit $w, v \neq \varnothing$.

Beweis. Wir zeigen nur die letzte Aussage. Die anderen Aussagen folgen aehnlich (und einfacher).
Sei x_0x_1 ein beliebiges Wort aus $W(S) \cap \mathcal{A}^2$. Betrachte nun $S^n(x_0)S^n(x_1)$. Setze

$$w_n := (\text{Letzter Buchstabe von } S^n(x_0))(\text{Erster Buchstabe von } S^n(x_1)).$$

Da $\mathcal{A}$ endlich ist, existieren $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k < l$ und

$$w_k = w_l.$$

Sind die Buchstaben b, a mit $ba = w_k$ gewaehlt so folgt mit $N := l - k$ die Behauptung. □

FOLGERUNG. *Ist S eine primitive Substitution ueber der endlichen Menge $\mathcal{A}$ mit $\sharp\mathcal{A} \geq 2$, so gibt es $a, b \in \mathcal{A}$ mit $ba \in W(S)$ unt $N \in \mathbb{N}$ mit*

$$S^N(a) = aw \;\; S^N(b) = vb$$

mit $w, v \neq \varnothing$. Insbesondere hat jede primitive Substitution also eine Potenz, die sowohl einen einseitigen als auch einen zweiseitigen Fixpunkt besitzt.

Beweis. Da S primitiv ist, gilt $|S^n(a)| \to \infty$ fuer jedes $a \in \mathcal{A}$ und die Aussage folgt aus der vorigen Proposition. □

Fixpunkte von primitiven Substitutionen sind besonders nutzlich, da mit ihrer Hilfe die komplette Wortinformation kodiert werden kann, wie die folgende Aussage zeigt.

PROPOSITION. *Sei S eine primitive Substition ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ und ω_+ ein einseitig unendlicher Fixpunkt von S^N und ω ein zweiseitig unendlicher Fixpunkt von S^N mit $\omega(0)\omega(1) \in \mathcal{W}$. Dann gilt*

$$\mathcal{W}(S) = \mathcal{W}(S^N) = \mathcal{W}(\omega_+) = \mathcal{W}(\omega).$$

Insbesondere gehoert also ω zu $\Omega(S)$.

Beweis. Hat $\mathcal{A}$ nur ein Element, so sind die Aussagen klar. Wir betrachten nun also den Fall, dass $\mathcal{A}$ mindesten zwei Elemente hat.
Offenbar gilt

$$\mathcal{W}(S^N) \subset \mathcal{W}(S).$$

Aufgrund der Fixpunkteigenschaft und der Tatache, dass (wegen der Primitivitaet) $|S^{kN}(\omega_+(1))| \to \infty$ gilt, folgt ausserdem

$$\mathcal{W}(\omega_+) \subset \mathcal{W}(S^N).$$

Da $\omega(0)\omega(1)$ zu $\mathcal{W}$ gehoert folgt analog auch

$$\mathcal{W}(\omega) \subset \mathcal{W}(S^N).$$

Wir zeigen noch $\mathcal{W}(S) \subset \mathcal{W}(\omega_+), \mathcal{W}(\omega)$: Wir betrachten nur ω_+. Es reicht zu zeigen, dass jedes Wort der Form $S^n(x)$ mit $x \in \mathcal{A}$ und $n \in \mathbb{N}$ in ω_+ auftaucht. Sei a der erste Buchstabe von ω_+. Es beginnt also ω_+ mit $S^{kN}(a)$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Primitivitaet von S gibt es ein $l \in \mathbb{N}$, so dass $S^l(a) = x_1 \ldots x_m$ alle Buchstaben aus $\mathcal{A}$ enthaelt. Fuer genuegend grosse $k \in \mathbb{N}$ gilt dann aber

$$kN = n + l + r$$

mit $r \in \mathbb{N}_0$. Wegen

$$S^{kN}(a) = S^n(S^l(S^r(a))) = S^n(S^l(a...)) = S^n(x_1 \ldots x_m)S^n(S^l(...))$$

enthaelt $S^{kN}(a)$ dann also $S^n(x)$. □

Beispiel - Thue-Morse Substitution. Sei $S : \{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}^*$, $S(a) = ab$ $S(b) = ba$. Dann gilt

$$S^2(a) = abba,\; S^2(b) = baab.$$

Damit ist S also primitiv und die Worte aa, ab, ba, ab gehoeren zu $\mathcal{W}$. Aus diesen Woertern entstehen dann 4 verschiedene zweiseitig unendliche Fixpunkte von S^2 naemlich

$$\omega_{aa} := (S^2)^\infty(a)|(S^2)^\infty(a)$$

$$\omega_{ab} := (S^2)^\infty(a)|(S^2)^\infty(b)$$
$$\omega_{bb} := (S^2)^\infty(b)|(S^2)^\infty(b)$$
$$\omega_{ba} := (S^2)^\infty(b)|(S^2)^\infty(a).$$

Diese gehoeren nach dem schon diskutieren alle zu $\Omega(S)$. Damit ist also nach dem Aperiodizitaetskriterium also $(\Omega(S), T)$ nichtperiodisch und damit (da minimal) auch aperiodisch.
Uebung:

- In $\mathcal{W}(S)$ kommt kein Wort der Form vvv_1 mit $v = v_1 \dots v_k \in \mathcal{A}^k$ vor.
- Bestimme den n-ten Buchstaben von $(S^2)^\infty(a)$.

Beispiel - Period Doubling Substitution. Sei $S : \{a, b\} \longrightarrow \{a, b\}^*$, $S(a) = ab$ $S(b) = ba$. Dann gilt

$$S^2(a) = abaa,\ S^2(b) = abab.$$

Damit ist S primitiv und die Woerter aa und ba sind legal. Aus diesen Woertern entstehen dann 2 verschiedene zweiseitig unendliche Fixpunkte von S^2 naemlich

$$\omega_{aa} := (S^2)^\infty(a)|(S^2)^\infty(a)$$
$$\omega_{ba} := (S^2)^\infty(b)|(S^2)^\infty(a).$$

Diese gehoeren nach dem schon diskutieren alle zu $\Omega(S)$. Damit ist also nach dem Aperiodizitaetskriterium also $(\Omega(S), T)$ nichtperiodisch und damit (da minimal) auch aperiodisch.
Uebung:

- Bestimme den n-ten Buchstaben von $(S^2)^\infty(a)$.

Ende der Vorlesung

KAPITEL 4

Linear repetitive Systeme

In diesem Abschnitt lernen wir eine wichtige Klasse von Systemen kennen, die primitive Substitutionen verallgemeinern. Diese Systeme sind an verschiedener Stelle aufgetaucht. Systematische Untersuchungen gehen unter anderem auf Durand '00 und (im hoeherdimensionalen Fall)) auf Lagarias / Pleasants '01 zurueck.

1. Grundlegendes

DEFINITION. *Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Menge. Sei ω eine unendliche Folge mit Werten in $\mathcal{A}$ bzw. (Ω, T) ein Subshift ueber $\mathcal{A}$. Dann heisst ω bzw. (Ω, T) linear repetitiv / linear reccurrent (LR), wenn fuer die assoziierte Wortmenge $\mathcal{W}$ gilt: Es gibt ein $C > 0$ (tatsaechlich $C \geq 1$) so dass jedes Wort v in $\mathcal{W}$ in jedem Wort $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq C|v|$ auftritt.*

Bemerkungen.

- Eine aequivalente Definition besagt, dass es ein $\widetilde{C}$ gibt, so dass fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ die Lueckenlaengen zwischen aufeinanderfolgenden Auftreten von v durch $\widetilde{C}|v|$ beschraenkt sind.
- Definiert man (s.o.) die Repetitivitaetsfunktion R auf $\mathbb{N}$ durch
  $R(n) := \min\{m : \text{ Jedes Wort der Laenge } m \text{ enthaelt jedes Wort der Laenge } n\}$
  so gilt: (LR)$\Longleftrightarrow$ Es gibt $C > 0$ mit $R(n) \leq Cn$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.
- Wir wissen schon, dass fuer nichtperiodisches repetitives ω gilt $R(n) \geq 2n$. In diesem Sinne ist (LR) das kleinstmoegliche Wachstum von R (unter den aperiodischen Modellen).

FOLGERUNG. *(a) Erfuellt ω (LR) so ist ω repetitiv.*
(b) Erfuellt (Ω, T) (LR), so ist (Ω, T) minimal.

Beispiel - Primitive Substitutionen. Ist S eine primitive Substitution, so erfuellt der zugehoerige Subshift (LR).
Bew. (Skizze). Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen: Sei $\mathcal{W}$ die assoziierte Wortmenge.

Sei M die zugehoerige Substitutionsmatrix und θ der Perron-Frobenius Eigenwert von M.

Beh. Es gibt ein $D > 0$ mit

$$(*) \quad \frac{\theta^n}{D} \leq |S^n(a)| \leq D\theta^n$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathcal{A}$.
Bew. Das folgt (mehr oder weniger) aus dem schon diskutierten Konsequenzen des Theorems von Perron-Frobenius.

Ohne Einschraenkung habe S einen einseitig unendlichen Fixpunkt

$$\omega = S^\infty(a)$$

mit

$$\mathcal{W}(S) = \mathcal{W}(\omega)$$

(andernfalls, kann man S durch S^N ersetzen.)

Es ist ω repetitiv (da S primitiv ist) und daher gibt es ein $K \in \mathbb{N}$, so dass jedes Teilwort aus $\mathcal{W}$ der Laenge K jedes Element aus $\mathcal{W} \cap \mathcal{A}^2$ enthaelt.

Wir kommen nun zum eigentlichen Schluss im Beweis: Sei $v \in \mathcal{W}$ ein beliebiges Wort der Laenge mindestens 3. Sei $n \in \mathbb{N}$ minimal, so dass ein zweibuchstabiges Wort $w = x_1 x_2 \in \mathcal{W}$ existiert, so dass v in $S^n(w)$ auftritt. Dann gilt also

$$\frac{\theta^{n-1}}{D} \le |v| \le 2D\theta^n.$$

(Die beiden Ungleichungen folgen aus $(*)$, wobei in die erste noch die Minimalitaet von n eingeht.) Wir untersuchen nun die Abstaende zwischen zwei aufeinanderfolgenden Auftreten von $S^n(x_1)S^n(x_2)$ in ω. Die Abstaende zwischen zwei aufeinderfolgenden Auftreten von x_1x_2 sind durch K beschraenkt (nach Konstruktion von K). Damit sind die Abstaende zwischen zwei aufeinanderfolgenden Auftreten von $S^n(x_1)S^n(x_2)$ beschraenkt durch $KD\theta^n$ (nach $(*)$). Damit gilt fuer den Abstand L_v zwischen zwei aufeinanderfolgenden Auftreten von v in $S^n(x_1)S^n(x_2)$ also nach $(*)$

$$L_v \le KD\theta^n + 2D\theta^n \le (K+2)D^2\theta\frac{\theta^{n-1}}{D} = C|v|$$

mit

$$C := (K+2)\theta D^2.$$

Bemerkung. Es gilt eine gewisse Umkehrung des obigen Resultates. Genauer charakterisiert Durand '00 (und Durand '04) die Systeme mit (LR) mittels primitiver S-adischer Systeme.

2. Charakterisierungen von (LR)-Systemen

Wir kommen nun zu weiteren Charakterisierungen von (LR)-Systemen.

DEFINITION. *Sei (Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$ mit assoziierter Woertermenge $\mathcal{W}$. Dann erfuellt (Ω, T) Positivitaet der Gewichte (PW), wenn ein $c > 0$ existiert mit*

$$\liminf_{|w|\to\infty} \frac{\sharp_v x}{|x|}|v| \ge c$$

fuer alle $v \in \mathcal{W}$.

Bemerkung. Zeichnerische Interpretation als Bruchteil des durch v 'ueberdeckten Raumes'.

THEOREM. *(M. Boshernitzan, ca '99 - unpubliziert) Sei (Ω, T) ein minimaler Subshift. Dann sind aequivalent:*

(i) *(Ω, T) erfuellt (LR).*
(ii) *(Ω, T) erfuellt (PW).*

Bemerkung. Es handelt sich bei (LR) um eine 'lokale' Eigenschaft und bei (PW) um eine 'statistische' Eigenschaft. Daher ist die behauptete Aequivalenz sehr bemerkenswert.

Beweis. Die Implikation (i)$\Longrightarrow$ (ii) ist klar. (Wenn jedes Wort der Lange $C|v|$ eine Kopie von v enthaelt, so muss gelten $\frac{\sharp_v x}{|x|}|v| \geq \frac{1}{C}$ fuer alle genuegend langen x.)

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Sei v ein beliebiges Wort aus $\mathcal{W}$. Es geht darum eine von v unabhaengige Schranke an die Abstaende zwischen zwei aufeinanderfolgenden Auftreten von v zu geben. Betrachte dazu zwei aufeinanderfolgende Auftreten von v in einem (langen) Wort. Wir nehmen an, dass diese Auftreten disjunkt sind (sonst ist ihr Abstand sowieso durch $|v|$ beschaenkt.) Es geht also um ein Wort der Form vzv mit $z \in \mathcal{W}$. Setze $m := |z|$. (Zu zeigen: $m \leq C|v|$ mit von v unabhaengigem C.)

Betrachte nun die Woerter $p_m, p_{m-1}, ..., p_0$ die aus vzv durch Abschneiden von Anfangsstuecken der Laenge $|v|$, $|v|+1$, $|v|+2$, ... $|v|+m$ entstehen. Dann hat also p_k die Laenge $k + |v|$.

Nach Konstruktion sind die Auftreten dieser p_j paarweise disjunkt. (Das ist der Knackpunkt!). Damit gilt also

$$\sum_{k=0}^{m} \sharp_{p_k}(w) \leq |w|.$$

Daraus folgt:

$$1 \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{\sharp_{p_k}(w)}{|w|} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\sharp_{p_k}(w)}{|w|}(|v| + k)\frac{1}{|v| + k}.$$

Bildet man nun den $\liminf$ fuer $|w| \to \infty$ und nutzt (PW) so folgt

$$1 \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{c}{|v| + k} \geq c \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{|v| + k} \geq c \ln\left(\frac{m + |v| + 1}{|v|}\right).$$

Daraus folgt

$$e^{1/c}|v| \geq m + |v| + 1.$$

Das liefert die Behauptung. □

Ende der Vorlesung

DEFINITION. *Sei (Ω, T) ein Subshift mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$. Eine Funktion $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst subadditiv, wenn fuer alle $x, y \in \mathcal{W}$ mit $xy \in \mathcal{W}$ gilt*

$$F(xy) \leq F(x) + F(y).$$

Der Subshift erfuellt (SET), wenn fuer jede subadditive Funktion F der Grenzwert $\lim_{|x|\to\infty} \frac{F(x)}{|x|}$ existiert.

Bemerkung.

- Eine Funktion G mit $G(xy) \geq G(x) + G(y)$ heisst superadditiv. Offenbar ist F subadditiv genau dann, wenn $-F$ superadditiv ist.
- Die Existenz des Grenzwertes $\lim_{|x|\to\infty} \frac{F(x)}{|x|}$ fuer alle subadditiven F ist natuerlich aequivalent zur Existenz des Grenzwertes $\lim_{|x|\to\infty} \frac{G(x)}{|x|}$ fuer alle superadditiven G.

Eine kleine Beobachtung zeigt, dass (SET) die eindeutige Ergodizitaet impliziert:

PROPOSITION. *Erfuellt (Ω, T) die Bedingung (SET), so ist (Ω, T) eindeutig ergodisch.*

Beweis. Fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ ist die Funktion $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = -\sharp_v(x)$ subadditiv. Damit existiert fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ die Frequenz. Also ist der Subshift eindeutig ergodisch. □

THEOREM. *Sei (Ω, T) ein minimaler Subshift. Dann sind aequivalent:*

(i) *Es erfuellt (Ω, T) die Bedingung (LR).*
(ii) *Es erfuellt (Ω, T) die Bedingung (SET).*

Bemerkung. Die Implikation (i)$\Longrightarrow$ (ii) findet sich (im Kontext von Delone Mengen) in einer Arbeit von Damanik / Lenz '01. Die Aequivalenz (SET)$\Longleftrightarrow$ (PW) findet sich bei Lenz '01. Aus dieser Aquivalenz und dem vorangegangenen Theorem folgt sofort das obige Theorem. Der unten gegebene Beweis folgt Damanik / Lenz '01 bzw. Lenz '01.
Bemerkung. Da Theorem (und die schon bewiesene) Lineare Repetitivitaet von Subshifts, die zu primitiven Substitutionen gehoeren, liefert einen weiteren Beweis der eindeutigen Ergodizitaet der Subshifts von primitiven Substitutionen.

Beweis. (LR)$\Longrightarrow$ (SET): Fuer eine subadditive Funktion $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ and $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$\overline{F}_n := \max\{\frac{F(x)}{|x|} : x \in \mathcal{W}, n \leq |x| \leq 2n\}.$$

Dann ist (Uebung) $(\overline{F}_n)$ fallend und daher existiert

$$\overline{F} := \lim_{n\to\infty} \overline{F}_n.$$

Offenbar gilt

$$\limsup_{|x|\to\infty} \frac{F(x)}{|x|} \leq \overline{F}. \quad (*)$$

Es bleibt zu zeigen:

$$\overline{F} \leq \liminf_{|x|\to\infty} \frac{F(x)}{|x|}.$$

Wir nehmen das Gegenteil an, also

$$\liminf_{|x|\to\infty} \frac{F(x)}{|x|} < \overline{F}.$$

Dann gilt also inbesondere $\overline{F} > -\infty$. Weiterhin existiert dann eine Folge (v_n) in $\mathcal{W}$ und $\delta > 0$ mit

- $|v_n| \to \infty$ fuer $n \to \infty$,
- $\frac{F(v_n)}{|v_n|} \leq \overline{F} - \delta$ fuer jedes $n \in \mathbb{N}$.

Weiterhin existiert nach $(*)$ also ein $L_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$\frac{F(w)}{|w|} \leq \overline{F} + \frac{\delta}{C8} \tag{1}$$

fuer alle $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq L_0$, wobei C die Konstante in der Definition von (LR) ist.

Betrachte $m \in \mathbb{N}$ mit $|v_m| \geq L_0$. Wegen (LR) kann man nun ein $L_1 \in \mathbb{R}$ finden, so dass jedes $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq L_1$ geschrieben werden kann als

$$w = x_1 v_m x_2 v_m \ldots x_l v_m x_{l+1}$$

mit

$$l \geq \frac{|x|}{4C|v_m|} \tag{2}$$

und

$$|x_j| \geq |v_m| \geq L_0.$$

(Zerlege dazu w in Stuecke der Lange $C|v_m|$. Waehle in jedem zweiten solchen Stueck eine Kopie von v_m...) Dann koennen wir nun abschaetzen

$$\begin{aligned}
\frac{F(w)}{|w|} &\leq \sum_{j=1}^{l+1} \frac{F(y_j)}{|y_j|}\frac{|y_j|}{|w|} + \frac{F(v_m)}{|v_m|}\frac{l|v_m|}{|w|} \\
&\leq \sum_{j=1}^{l+1} (\overline{F} + \frac{1}{8C}\delta)\frac{|y_j|}{|w|} + (\overline{F} - \delta)\frac{r|v_m|}{|w|} \\
&\leq \overline{F} + \frac{1}{8C}\delta - \frac{1}{4C}\frac{|w|}{|v_m|}\frac{|v_m|}{|w|}\delta \\
&\leq \overline{F} - \frac{1}{8C}\delta.
\end{aligned}$$

Da dies fuer beliebige $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq L_1$ gilt, erhaelt man den Widerspruch

$$\overline{F} = \lim_{n\to\infty} \overline{F}_n \leq \overline{F} - \frac{1}{8C}\delta < \overline{F}.$$

(SET)$\Longrightarrow$ (LR): Wir zeigen (SET)$\Longrightarrow$ (PW). Damit folgt dann aus dem Theorem von Boshernitzan die Aussage.

Offenbar ist fuer jedes $v \in \mathcal{W}$ die Funktion $-l_v$ subadditiv, wenn $l_v : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $l_v(w) = \sharp_v(w)|v|$. Daher existiert aufgrund von (SET) also

$$\nu(v) \equiv \liminf_{|w|\to\infty} \frac{l_v(w)}{|w|} = \lim_{|w|\to\infty} \frac{l_v(w)}{|w|}.$$

Wir zeigen nun die Aussage mit einem Widerspruchsbeweis. Wir nehmen also an, dass die Werte $\nu(v)$, $v \in \mathcal{W}$, nicht gleichmaessig groesser als Null sind. Da das System minimal ist, gilt aber $\nu(w) > 0$ fuer jedes $w \in \mathcal{W}$. Daher existiert also eine Folge (v_n) in $\mathcal{W}$ mit

$$\nu(v_n) > 0, \text{ and } \nu(v_n) \longrightarrow 0, \quad n \to \infty.$$

Da das Alphabet endlich ist, gibt es nur endlich viele Woerter einer festen Laenge. Daher folgt dann

$$|v_n| \longrightarrow \infty, \quad n \to \infty.$$

Ohne Einschraenkung (sonst Teilfolge) koennen wir annehmen, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu(v_n) < \frac{1}{2}$$

gilt. Setze

$$l_n \equiv l_{v(n)}$$

fuer $n \in \mathbb{N}$. Dann koennen wir induktiv fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Zahl $n(k)$ waehlen mit

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{l_{n(j)}(w)}{|w|} < \frac{1}{2}$$

fuer jedes $w \in \mathcal{W}$ mit $|w| \geq \frac{|v_{n(k+1)}|}{2}$.
Definiere nun die Funktion $l : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ mittels

$$l(w) \equiv \sum_{j=1}^{\infty} l_{n(j)}(w).$$

(Die Summe hat fuer festes $w \in \mathcal{W}$ nur endlich viele nichtverschwindende Terme.)
Dann ist $(-l)$ subadditiv und daher existiert nach Voraussetzung

$$\bar{l} := \lim_{|w| \to \infty} \frac{l(w)}{|w|}.$$

Offenbar gilt fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ dann

$$\frac{l(v_{n(k)})}{|v_{n(k)}|} \geq \frac{l_{n(k)}(v_{n(k)})}{|v_{n(k)}|} \geq 1$$

und damit

$$\bar{l} \geq 1.$$

Andererseits gilt nach Konstruktion

$$\frac{l(w)}{|w|} = \sum_{j=1}^{k} \frac{l_{n(j)}(w)}{|w|} < \frac{1}{2}$$

fuer $w \in \mathcal{W}$ mit $\frac{|v_{n(k+1)}|}{2} \leq |w| < |v_{n(k+1)}|$. Das liefert

$$\bar{l} \leq \frac{1}{2}.$$

Das liefert einen Widerspruch. □

Bemerkung. (Uebung) Sei (Ω, T) ein minimaler Subshift mit assoziierter Wortmenge $\mathcal{W}$.

- Eine Funktion $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst schwach subadditiv, wenn $F(xy) \leq F(x) + F(y) + b(x) + b(y)$ mit einer Funktion $b : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
$$\frac{b(x)}{|x|} \to 0, |x| \to \infty.$$
Dann laesst sich das Theorem verschaerfen zu der Aussage: (LR) ist aequivalent zur Existenz der Mittel fuer alle schwach subadditiven Funktionen.
- Eine Funktion $F : \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst additiv, wenn F und $-F$ schwach subadditiv sind. Dann gilt: Eindeutige Ergodizitaet ist aequivalent zur Existenz der Mittel fuer alle additiven Funktionen.

$\longleftrightarrow$
Ende der Vorlesung.

KAPITEL 5

Sturmsche Systeme

Es geht um Folgen der Form

$$V_{\alpha,\theta} : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}, W_{\alpha,\theta} : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}$$

mit

$$V_{\alpha,\theta}(n) = 1_{[1-\alpha,1)}(n\alpha + \theta \mod 1),\ W_{\alpha,\theta}(n) = 1_{(1-\alpha,1]}(n\alpha + \theta \mod 1)$$

mit $\alpha \in (0,1)$ irrational (und $\theta \in [0,1]$ beliebig. Zu einem irrationalen $\alpha \in (0,1)$ ordnet man dann den Sturmschen Subshift mit Rotationszahl α zu, der gegeben ist durch

$$\Omega_\alpha := \{V_{\alpha,\theta} : \theta \in [0,1]\} \cup \{W_{\alpha,\theta} : \theta \in [0,1]\}.$$

Dann ist (Ω_α, T) eindeutig ergodisch und minimal. Diese Sturmschen Subshifts gehoeren zu den meistuntersuchten Objekten im Feld der aperiodischen Ordnung (in einer Dimension).

1. Kettenbruchentwicklung und Gaussabbildung

Es geht um Approximation (irrationaler) Zahlen durch rationale Zahlen. Bei gegebenem $q \in \mathbb{N}$ kann man jedes $\alpha \in [0,1]$ durch einen Bruch der Form p/q mit $p \in \mathbb{N}_0$ approximieren, so dass gilt

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}.$$

Im allgemeinen wird auch keine bessere Abschaetzung gelten. Hier geht es darum (bei festem α) solche q zu finden, dass $|\alpha - p/q| \leq 1/q^2$ gilt. Die Idee ist im wesentlichen folgende:

- Betrachte zu $y > 0$ die Zahl $1/y$ und approximieren durch die naechste kleinere ganze Zahl a.
- Berechne den Fehler $1/y - a$.
- Iteriere.

Um das praezise zu fassen, fuehren wir zwei Definitionen ein: Zu $y \in \mathbb{R}$ definieren wir die Gaussklammer von y durch

$$[y] := \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq y\}.$$

Weiterhin wird die Gaussabbildung $G : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definiert durch

$$G(y) = \frac{1}{y} - \left[\frac{1}{y}\right]$$

fuer $y \neq 0$ und $G(0) = 0$. Dann gilt also fuer jedes $y \in (0,1]$

$$y = \frac{1}{[\frac{1}{y}] + G(y)}. \quad (*)$$

Damit koennen wir fuer ein beliebiges $x \in (0,1)$ obige Idee wie folgt umsetzen: Sei fuer $n \in \mathbb{N}$ mit $G_n(x) \neq 0$ der Koeffizient $a_n = a_n(x)$ definiert durch

$$a_n := \left[\frac{1}{G^n(x)} \right].$$

Dann gilt (solange $G^n(x)$ nicht verschwindet)

$$\begin{array}{rcl} x & = & G^0(x) \\ ((*) \text{ mit } y = G^0(x)) & = & \dfrac{1}{a_0 + G^1(x)} \\ ((*) \text{ mit } y = G^1(x)) & = & \dfrac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + G^2(x)}} \\ ((*) \text{ mit } y = G^2(x)) & = & \dfrac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + G^3(x)}}}. \\ & = & \ldots \end{array}$$

Das Verfahren kann beliebig fortgesetzt werden (solange $G^n(x)$ nicht verschwindet). Um das auch formal richtig durchzufuehren, definieren wir fuer $b_0, b_1, \ldots, b_n > 0$ induktiv

$$[b_0] := \frac{1}{b_0} \text{ und } [b_0, \ldots, b_n, b_{n+1}] := [b_0, \ldots, b_{n-1}, b_n + 1/b_{n+1}].$$

Diese Ausdruecke werden *Kettenbrueche* genannt.
Eine einfache Induktion und $(*)$ liefern dann sofort die folgende praezise Fassung obiger Rechnung

Proposition. *Sei $x \in [0,1]$ mit $G^n(x) \neq 0$ fuer alle $n = 0, \ldots, k$ und $a_n = [1/G^n(x)]$. Dann gilt*

$$x = [a_0, \ldots, a_n + G^{n+1}(x)]$$

fuer alle $n = 0, \ldots, k$.

Bemerkung.

- Sind $a_0, \ldots, a_n$ natuerlich Zahlen, so ist $[a_0, \ldots, a_n]$ eine rationale Zahl.
- In der Proposition wird nicht benoetigt, dass $G^{k+1}(x)$ nicht verschwidet.

Auf obige Art erhaelt man zu jedem x eine Folge von rationalen Zahlen. Diese konvergieren gegen x, wie folgendes Theorem zeigt.

Theorem. *Sei $\alpha \in [0,1]$ irrational. Dann gilt $G^j(\alpha) \neq 0$ fuer alle $j = 0, 1, \ldots$ und mit $a_j := [1/G^j(x)]$, $j = 0, 1, \ldots$ und $s, t \in [0,1]$ gilt*

$$|[a_0, \ldots, a_n + s] - [a_0, \ldots, a_n + t]| \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}.$$

Insbesondere folgt

$$|[a_0, \ldots, a_n] - \alpha| \leq \frac{1}{(\sqrt{2})^{n+1}}.$$

Beweis. Nach vorangehender Proposition gilt

$$(*) \quad \alpha = [a_0, \ldots, a_n + G^{n+1}(\alpha)]$$

solange $G^n(\alpha)$ nicht verschwindet. Da α irrational ist, kann dann aber $G^{n+1}(\alpha)$ weder 0 noch 1 sein. Das zeigt (induktiv), dass $G^n(\alpha) \neq 0$ fuer alle $n = 0, \ldots$.
Aus der Formel $(*)$ und der ersten Aussage des Theorem folgt dann sofort die letzte Aussage (wegen $G^n(x) \in (0,1)$.)

Zur ersten Aussage des Theorems: Das wird mit Induktion bewiesen. Wir betrachten zunaechst den Fall $n = 0$ und $n = 1$.

$n = 0$: Es gilt mit (o.e. $t \geq s$) und $r := t - s$

$$|1/(a_0 + s) - 1/(a_0 + t)| = \frac{r}{(a_0 + r)(a_0 + s + r)} \leq \frac{r}{1 + r} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Das liefert die Behauptung. (Die letzte Ungleichung folgt einfach, da $\sqrt{2} \leq 1 + \frac{1}{r}$ fuer $r \leq 1$).

$n = 1$: Es gilt nach kleiner Rechnung

$$(*) \quad \left| \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + s}} - \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + s}} \right| = \left| \frac{s - t}{(a_1 + s)(a_1 + t)(a_0 + \frac{1}{a_1 + s})(a_0 + \frac{1}{a_1 + t})} \right|.$$

Offenbar gilt $|s - t| \leq 1$. Damit geht es nun darum den Term

$$(**) \quad \left| \frac{1}{(a_1 + s)(a_1 + t)(a_0 + \frac{1}{a_1 + s})(a_0 + \frac{1}{a_1 + t})} \right|.$$

abzuschaetzen. Gilt $a_1 \geq 2$ oder $a_0 \geq 2$, so ist der Nenner mindestens 2 und die Aussage folgt. Gilt $a_0 = a_1 = 1$, so koennen wir den Nenner abschaetzen mit

$$Nenner \geq (1 + 1/2)(1 + 1/2) \geq 2$$

und die Aussage folgt ebenfalls.
Wir schliessen nun von n auf $n + 1$ (wobei n mindestens 1 ist): Es gilt fuer die Differenz

$$D := |[a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} + s] - [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} + t]| = \left|\frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \widetilde{s}}} - \frac{1}{a_0 + \frac{1}{a_1 + \widetilde{t}}}\right|$$

mit

$$\widetilde{s} := [a_2, \ldots, a_{n+1} + s], \ \widetilde{t} := [a_2, \ldots, a_{n+1} + t].$$

Anwenden der bei der Betrachtung von $n = 1$ hergeleiteten Gleichung $(*)$ liefert

$$D \leq \left| \frac{\widetilde{s} - \widetilde{t}}{(a_1 + \widetilde{s})(a_1 + \widetilde{t})(a_0 + \frac{1}{a_1 + \widetilde{s}})(a_0 + \frac{1}{a_1 + \widetilde{t}})} \right|.$$

Auf $\widetilde{s} - \widetilde{t}$ koennen wir nun die Induktionsannahme anwenden und erhalten

$$D \leq (\sqrt{2})^n \left| \frac{1}{(a_1 + \widetilde{s})(a_1 + \widetilde{t})(a_0 + \frac{1}{a_1 + \widetilde{s}})(a_0 + \frac{1}{a_1 + \widetilde{t}})} \right|.$$

Dies koennen wir nun wie $(**)$ oben abschaetzen und erhalten

$$D \leq (\sqrt{2})^n \cdot 2 = (\sqrt{2})^{n+2}.$$

Das ist gerade die gewuenschte Behauptung. □

Als naechstes leiten wir eine Rekursion fuer die Kettenbrueche her.

PROPOSITION. *Zu* $b_0, \ldots, b_k > 0$ *definiert man induktiv*

$$p_0 = 0, p_{-1} = 1, \;\; q_0 = 1, q_{-1} = 0$$

und

$$p_n = b_{n-1}p_{n-1} + p_{n-2}, \;\; q_n = b_{n-1}q_{n-1} + q_{n-2}$$

fuer $n = 1, \ldots, k+1$. *Dann gilt*

$$[b_0, b_1, \ldots, b_l] = \frac{p_{l+1}}{q_{l+1}}$$

fuer $l = 0, 1, \ldots, k$.

Beweis. Das folgt mit Induktion nach k und direkter Rechnung:

$k = 0$*:* Das ist einfach.

$k \Longrightarrow k+1$*:* Die Situation fuer $l = 0, \ldots, k$ ist schon geklaert. Wir muessen nur noch den Fall $l = k+1$ behandeln: Es gilt

$$\begin{aligned}
[b_0, b_1, \ldots, b_{k+1}] &= [b_0, \ldots, b_k + \frac{1}{b_{k+1}}] \\
(\text{Aussage fuer } k) &= \frac{\left(b_k + \frac{1}{b_{k+1}}\right)p_k + p_{k-1}}{\left(b_k + \frac{1}{b_{k+1}}\right)q_k + q_{k-1}} \\
(\text{Erweitern mit } b_{k+1}) &= \frac{b_{k+1}(b_k p_k + p_{k-1}) + p_k}{b_{k+1}(b_k q_k + q_{k-1}) + q_{k-1}} \\
&= \frac{b_{k+1}p_{k+1} + p_k}{b_{k+1}q_{k+1} + q_k}.
\end{aligned}$$

Das liefert die Aussage fuer $l = k+1$. □

Notation. Ist $b_0, b_1 \ldots$ eine Folge positiver Zahlen, so heissen $[b_0, \ldots, b_l]$ *Approximierende* oder *Konvergenten* und die oben gegebenen p_l, q_l mit $p_{l+1}/q_{l+1} = [b_0, \ldots, b_l]$ die kanonischen Zaehler bzw. Nenner der Approximierenden.

Bemerkung. Die Indizes an den p_n q_n sind so gewahlt, dass es sich bei p_n/q_n um den n-ten Approximierenden handelt.

Bemerkung Offenbar sind die p_n und q_n durch eine lineare Rekursion gegeben. Mit $\underline{p}_n := (p_n, p_{n-1})^t$ und $\underline{q}_n := (q_n, q_{n-1})^t$ gilt offenbar

$$\underline{p}_{n+1} = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{p}_n \text{ und } \underline{q}_{n+1} = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{q}_n.$$

Damit folgt iterativ (und unter Nutzen von $Id = (\underline{q}_0 \underline{p}_0)$ dann

$$(\underline{q}_{n+1}\underline{p}_{n+1}) = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (\underline{q}_n \underline{p}_n) = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} b_0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind die Determinanten der auftretenden Matrizen alle -1. Damit folgt

$$\det(\underline{q_n p}_n = (-1)^n.$$

Das werden wir auch gleich mit einem etwas anderen Beweis zeigen.

Wir kommen nun zu einer sehr nuetzlichen Aussage fuer die kanonischen Approximierenden.

LEMMA. *Seien $b_0, b_1, \ldots, b_n > 0$ gegeben und q_k, p_k wie oben. Dann gilt*

$$q_k p_{k-1} - q_{k-1} p_k = (-1)^k.$$

Beweis. Das folgt leicht durch Induktion: Der Fall $n = 0$ ist einfach. Der Schluss von n auf $n+1$ kann wie folgt gefuehrt werden:

$$\begin{aligned} q_{n+1} p_n - q_n p_{n+1} &= (b_n q_n + q_{n-1}) p_n - q_n (b_n p_n + p_{n-1}) \\ &= -(q_n p_{n-1} - q_{n-1} p_n) \\ &= (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. *Seien $b_0, b_1, \ldots, b_n > 0$ gegeben und q_k, p_k wie oben. Dann sind q_k, p_k teilerfremd fuer alle $k = 0, \ldots, n+1$ (die Brueche p_l/q_l sind also schon gekuerzt).*

Beweis. Es gilt $q_l q_{l-1} - q_l p_{l-1} = \pm 1$. Damit folgt sofort die Aussage. □

Ende der Vorlesung

FOLGERUNG. *Seien $b_0, b_1, \ldots, b_n > 0$ gegeben und p_k/q_k die zugehoerigen Konvergenten. Dann gilt*

$$\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{1}{q_k q_{k-1}}$$

sowie

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = (-1)^{k-1} \frac{b_k}{q_{k-1} q_{k+1}}.$$

Beweis. Die erste Aussage folgt mit direkter Rechnung aus der vorangehenden Folgerung. Die zweite Gleichung folgt dann durch Bilden der Differenz nach einer direkten Rechnung. □

Damit kommen wir nun zur grundlegenden Aussage ueber die Konvergenz unendlicher Kettenbrueche.

THEOREM. *(Konvergenz unendlicher Kettenbrueche) Seien $b_0, b_1, \ldots$ positive reelle Zahlen und $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [b_0, \ldots, b_n]$ die zugehoerigen Konvergenten. Dann bilden die Konvergenten mit ungradem Index p_{2k+1}/q_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}_0$ eine monoton fallende Folge und die Konvergenten mit gradem Index p_{2k}/q_{2k}, $k \in \mathbb{N}_0$, eine monoton wachsende Folge und es gilt*

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{1}{q_{2k+1} q_{2k}}$$

sowie

$$\inf\{p_{2k+1}/q_{2k+1} : k \in \mathbb{N}_0\} \geq \sup\{\frac{2k}{q_{2k}} : k \in \mathbb{N}_0\}.$$

Insbesondere konvergiert $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ genau dann, wenn gilt

$$\sum b_n = \infty.$$

Bemerkung. Es gilt $p_0/q_0 = 0/1 = 0 < [b_0, ..., b_n] < \frac{1}{b_0} = p_1/q_1$. Zeichnung. Die 'geraden' Konvergenten konvergieren wachsend von unten und die 'ungeraden' Konvergent konvergieren fallend von oben.

Beweis. Die Aussagen zu Monotonie folgen sofort aus der zweiten Formel der vorangehenden Folgerung. Die angegebene Formel folgt aus der ersten Folgerung der vorangehenden Folgerung. Mit dieser Formel und der Monotonie folgt angegebene Ungleichung.

Zum 'Insbesondere': (Nur Skizze). Nach dem schon Gezeigten konvergiert $[b_0, b_1, \ldots, b_n]$ genau dann, wenn gilt

$$\frac{1}{q_n q_{n+1}} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Mittels der Rekursion fuer die q_n laesst sich zeigen, dass dies aequivalent zur Divergenz der Summe $\sum b_n$ ist. Wir verzichten auf die Details (und werden die entsprechende Aussage in der Vorlesung auch nicht verwenden). □

Nach dem Theorem zur Konvergenz unendlicher Kettenbrueche kommen wir nun zur Aussage ueber die Kettenbruchentwicklung einer (irrationalen) Zahl.

THEOREM. *Sei* $\alpha \in [0,1]$ *irrational und* $a_j := \left[\frac{1}{G^j(\alpha)}\right]$, $j = 0, 1\ldots$ *und* p_n/q_n *die zugehoerigen Konvergenten. Dann bilden konvergieren die Konvergenten mit ungradem Index* p_{2k+1}/q_{2k+1}, $k \in \mathbb{N}_0$ *monoton fallend gegen* α *und die Konvergenten mit geradem Index* p_{2k}/q_{2k}, $k \in \mathbb{N}$, *monoton wachsend gegen* α, *und es gilt*

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{1}{q_{2k+1}q_{2k}} \le \frac{1}{2^{2k}}.$$

Beweis. Die Aussagen ueber die Monotonie der Folgen und die angegebene Formel fuer die Differenz ergeben sich direkt aus dem vorigen Theorem bzw. der entsprechenden Folgerung. Weiterhin gilt (s.o.)

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_n + G^{n+1}(\alpha)].$$

Damit folgt (nach Induktion und unter Nutzen von $G^{n+1}(\alpha) > 0$) dann

$$\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} \ge \alpha \ge \frac{p_{2k}}{q_{2k}}.$$

Um den Beweis abzuschliessen, reicht es also die Ungleichung

$$q_n q_{n+1} \ge 2^n$$

zu beweisen. Das folgt leicht durch Induktion. ($n = 0$: $q_0 q_1 = q_1 = a_0 \ge 1 = 2^0$. $n \Longrightarrow (n+1)$: $q_{n+1}q_{n+2} = q_{n+1}(a_{n+1}q_{n+1} + q_n) \ge q_{n+1}(q_{n+1} + q_n) \ge q_{n+1}2q_n \ge 22^n$.) □

Bemerkung. Die Zahl $\tau = \lim[1, 1, \ldots]$ spielt eine besondere Rolle, in dem Sinne, dass die entsprechenden p_n und q_n das schwaechstmoegliche Wachstum haben (und mehr oder weniger die Optimalitaet der Abschaetzung zeigen). Eine kleine Rechnung zeigt, dass

$$\frac{1}{\tau} = 1 + \tau$$

gilt und τ also der uns schon bekannte goldene Schnitt ist.

Es lassen sich nicht nur Kettenbruchentwicklungen fuer irrationale Zahlen angeben, sondern auch Kettenbruchentwicklungen fuer rationale Zahlen. Es stellt sich heraus, dass die Kettenbruchentwicklung fuer rationale Zahlen abbrechen d.h. fuer rationales $\alpha > 0$ ein n existiert mit $G^n(\alpha) = 0$. Fuer das kleinste solche n gilt dann

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_{n-1}].$$

PROPOSITION. *Sei* $\alpha \in [0,1]$ *rational. Dann existiert ein* $n \in \mathbb{N}_0$ *mit* $G^n(\alpha) = 0$.

Beweis. Ist $\alpha = 0$, so kann $n = 0$ gewaehlt werden. Sei also nun $\alpha > 0$. Sei fuer $n \in \mathbb{N}$ mit $G^{(n)}(x) \neq 0$ r_n definiert durch $r_n := \frac{1}{G^n(x)}$. Fuer ein solches n gilt, wie oben gezeigt wurde, dann

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_{n-1} + G^n] = [a_0, \ldots, a_{n-1}, r_n].$$

Da α rational ist, ist weiterhin r_n ebenfalls rational. Gehoert r_n zu $\mathbb{N}$, so sind wir fertig. Andernfalls koennen wir das Verfahren noch einmal itererieren, und es folgt $\alpha = [a_0, \ldots, a_{n-1}, r_n] = [a_0, \ldots, a_n, r_{n+1}]$ also

$$(*) \;\; r_n = a_n + \frac{1}{r_{n+1}}$$

Weiterhin gilt mit $r_n = a/b$ also

$$r_{n+1} = \frac{1}{r_n - a_n} = \frac{b}{a - a_n b} = \frac{b}{c}$$

mit $c = a - a_n b < b$ (da $r_n - a_n < 1$). Die ganzzahligen Nenner der r_n werden also immer kleiner, und muessen schliesslich 1 erreichen. In diesem Fall ist das entsprechende r dann eine ganze Zahl und die Kettenbruchentwicklung bricht ab. $\square$

Bemerkung. Eine weitere besondere Klassse von Kettenbruechen sind die periodischen Kettenbrueche. Es laesst sich zeigen, dass diese genau zu quadratischen Irrationalzahlen gehoeren (d.h. zu irrationalen Wurzeln von quadratischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten). Im Falle des goldenen Schnittes hatten wir das explizit gesehen.

Wir fassen nun Teile der obigen Aussagen noch einmal mittels des dynamischen Systems $([0,1], G)$ zusammen. Dazu erinnern wir noch einmal an die Definition der Gaussabildung $G : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ mit $G(0) = 0$ und $G(x) = \frac{1}{x} - [1/x]$ fuer $x \neq 0$. Weiterhin zerlegen wir $[0,1]$ in P_n definiert durch $P_0 := \{0\}$ bzw.

$$P_n := (1/(n+1), 1/n]$$

$n \in \mathbb{N}$. Dann gilt also $[0,1] = \cup_{n=0}^{\infty} P_n$. *Zeichnung - Partition und Gaussabbildung.*

THEOREM. *(Kettenbruchentwicklung als Kodierung des Orbits) Sei G die Gaussabildung und* $([0,1], G)$ *das zugehoerige dynamische System. Sei zu* $\alpha \in [0,1]$ *die Folge* a_j, $j = 0, 1, \ldots$ *in* $\mathbb{N}_0$ *mit* $G^j(\alpha) \in P_{a_n}$. *Dann gilt:*
(a) Ist α *irrational so konvergiert* $p_{n+1}/q_{n+1} := [a_0, \ldots, a_n]$ *gegen* α.
(b) Ist α *rational, so gibt es ein* $n \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n = 0$ *und fuer das kleinste solche* n *gilt* $\alpha = [a_0, \ldots, a_{n-1}]$.

Ist $\alpha \in [0,1]$ durch die Folge $(a_j)_{j\geq 0}$ kodiert, so ist $G(\alpha)$ durch die Folge $(a_j)_{j\geq 1}$ kodiert.

Beweis. Zu Teil (a): Es reicht, zu zeigen, dass die im Theorem definierten a_j mit den oben definieren a_j uebereinstimmen. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n = k &\iff G^n(x) \in (1/(k+1), 1/k] \\ &\iff \frac{1}{k+1} < G^n(x) \leq \frac{1}{k} \\ &\iff k \leq \frac{1}{G^n(x)} < k+1 \\ &\iff k = \left[\frac{1}{G^n(x)}\right]. \end{aligned}$$

Damit folgt Teil (a) direkt aus dem vorigen Theorem.
Es folgt Teil (b) in analoger Weise mit hilfe der Bemerkung. □

Bemerkung. Das obige Theorem ist der Grund, fuer unsere Wahl den ersten Koeffizienten der Kettenbruchentwicklung mit a_0 zu bezeichnen: Die Koeffizienten enssprechen gerade dem Orbit d.h. den Potenzen von G von x.

Wir diskutieren nun noch ohne Beweis eine wichtige Eigenschaft des dynamischen System $([0,1], G)$ samt einigen Konsequenzen. Sei das Wahrscheinlichkeitsmass m auf $[0,1]$ gegeben durch

$$m(\varphi) = \frac{1}{\ln 2} \int_0^1 \varphi(t) \frac{1}{1+t} dt.$$

THEOREM. *Es ist m ein ergodisches Mass von $([0,1], G)$ (d.h. m ist invariant unter G und jede unter G invariante messbare Menge A erfuellt $m(A) \in \{0,1\}$).*

Ende der Vorlesung

FOLGERUNG. *Fuer Lebesgue-fast alle $\alpha \in [0,1]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp\{0 \leq k \leq n : a_k = N\}}{n} = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{N(N+2)}\right)}{\ln 2} = \frac{\ln\left(\frac{(N+1)^2}{N(N+2)}\right)}{\ln 2}.$$

fuer jedes $N \in \mathbb{N}$. Insbesondere kommt also in 'typischen' α jedes natuerliche Zahl N in der Kettenbruchentwicklung vor.

Beweis. Nach dem vorigen Theorem und Birkhoff's Ergodensatz existiert der angegebene Limes m fast sicher und ist gleich

$$\frac{1}{\ln 2} \int_{1/(N+1)}^{1/N} \frac{1}{t+1} dt = \frac{\ln\left(\frac{(N+1)^2}{N(N+2)}\right)}{\ln 2}.$$

Offenbar gilt das dann auch Lebesgue-fast sicher. □

FOLGERUNG. *Fuer Lebesgue-fast alle $\alpha \in [0,1]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \ln a_k = \sum_{N=1}^{\infty} \ln N \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{N(N+1)}\right)}{\ln 2} =: C < \infty.$$

Beweis. (Uebung) □

Bemerkung. Die Durchschnitte $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} a_k$ werden im allgemeinen divergieren.

2. Kettenbrüche und beste Approximationen

In diesem Abschnitt geht es darum, dass die Kettenbruchentwicklung die (in gewisser Weise) besten Approximierenden liefert.

LEMMA. *(Untere Schranke) Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| > \frac{1}{q_n(q_n + q_{n+1})}.$$

Beweis. Es gilt mit $s := G^{n+1}(\alpha) \le 1$

$$\alpha = [a_0, \dots, a_n + s] = \frac{a_n p_n + s p_n + p_{n-1}}{a_n q_n + s q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1} + s p_n}{q_{n+1} + s q_n}.$$

Damit folgt nach kurzer Rechnung unter Nutzen von $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$ dann

$$\left|\alpha - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{s}{q_{n+1}(q_{n+1} + s q_n)} = \frac{1}{q_{n+1}(\frac{1}{s} q_{n+1} + q_n)}.$$

Weiterhin gilt natuerlich

$$\frac{1}{s} = a_{n+1} + G^{(n+2)}(\alpha) < a_{n+1} + 1.$$

Damit folgt

$$\frac{1}{q_{n+1}(\frac{1}{s} q_{n+1} + q_n)} > \frac{1}{q_{n+1}(a_{n+1} q_{n+1} + q_n + q_{n+1})} = \frac{1}{q_{n+1}(q_{n+2} + q_{n+1})}.$$

Das zeigt die Aussage. □

DEFINITION. *(Beste Approximation zweiter Art) Eine rationale Zahl a/b mit $a \in \mathbb{N}_0$ und $b \in \mathbb{N}$ heisst beste Approximation (zweiter Art) zu $\alpha > 0$, wenn die Ungleichungen $0 < d \le b$ und $c/d \ne a/b$ die Ungleichung*

$$|d\alpha - c| > |b\alpha - a|$$

implizieren.

Bemerkung. Die rationale Zahl a/b ist eine beste Approximation erster Art zu α, wenn aus $d \le b$ folgt

$$|\alpha - c/d| > |\alpha - a/b|$$

fuer alle $c \in \mathbb{N}$ mit $c/d \ne a/b$. Dann ist jede beste Approximation zweiter Arte auch eine beste Approximation erster Art. Die Umkehrung gilt aber nicht. (Bew. Erste Aussage: Angenommen a/b ist beste Approximation zweiter Art aber nicht erster Art. Dann gibt es also $c/d \ne a/b$ mit

$$|\alpha - c/d| \le |\alpha - a/b| \text{ und } d \le b.$$

Multiplizieren der beiden Ungleichungen ergibt

$$|\alpha d - c| \le |\alpha b - a|$$

und $d \le b$. Das ist ein Widerspruch.

Zweite Aussage: Es ist 1/3 eine beste Approximation erster Art zu 1/5 (da

$$2/15 = |1/5 - 1/3| < |1/5 - a/b|$$

gilt fuer alle $b \leq 3$ und $a \in \mathbb{N}$ mit $a/b \neq 1/3$). Aber es ist 1/3 keine beste Approximation zweiter Art zu 1/5 da

$$|1/5 \cdot 1 - 0| < |1/5 \cdot 3 - 1|$$

und $1 \leq 3$.)

THEOREM. *Sei $\alpha \in (0,1)$ geben. Jede beste Approximation zweiter Art ist eine Konvergente. Ist umgekehrt $\alpha \neq 1/2$, so ist jede Konvergente auch eine beste Approximation zweiter Art.*

Bemerkung.

- Fuer $\alpha = 1/2$ ist $0/1 = p_0/q_0$ keine beste Approximation zweiter Art, denn es gilt
$$|\alpha 1 - 0| = |\alpha 1 - 1|.$$
- Fuer beste Approximierende erster Art ist die Lage komplizierter (und das macht einen Teil der Relevanz der Approximierenden zweiter Art aus): Die Approximierenden erster Art sind Konvergente bzw. Zwischenbrueche. Aber es sind nicht alle Konvergente und Zwischenbrueche auch beste Approximierende.

Beweis. Es muessen zwei Aussagen gezeigt werden. Die Aussagen werden unter Nutzen der schon bewiesenen unteren und oberen Schranken an die Kettenbruchentwicklung gezeigt. Weiterhin verwenden wir verschiedentlich, dass fuer ganzzahlige a, b, c, d mit $a/b \neq c/d$ offenbar gilt

$$|a/b - c/d| = |(ad - bc)/bd| \geq 1/bd.$$

Sei a/b eine beste Approximation von $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$. Zu zeigen: Es ist a/b eine Konvergente. Seien p_k/q_k die Konvergenten von α. Wir nehmen an, dass a/b keine dieser Konvergenten ist. Insbesondere ist dann also $\alpha \neq a/b$. (Ist α irrational gilt sowieso $\alpha \neq a/b$. Ist α rational, so folgt $\alpha \neq a/b$, da α dann eine Konvergente ist.) Wir unterscheiden zwei Falle.

Ende der Vorlesung

Es ist $a/b > p_1/q_1$. Dann gilt (wegen $p_1/q_1 > \alpha$)

$$|\alpha - a/b| > |p_1/q_1 - a/b| \geq \frac{1}{bq_1}.$$

Damit folgt nach Multiplikation mit b also

$$|b\alpha - a| > \frac{1}{q_1} = \frac{1}{a_0}.$$

Andererseits gilt natuerlich

$$|1\alpha - 0| = \alpha \leq \frac{1}{a_0}.$$

Nimmt man die beiden vorangehenden Ungleichungen zusammen, so folgt

$$|b\alpha - a| > |1\alpha - 0|$$

(mit $1 \leq b$) und a/b ist keine beste Approximation. Widerspruch.

Es gibt ein $k \in \mathbb{N}$, so dass a/b zwischen p_{k-1}/q_{k-1} und p_{k+1}/q_{k+1} liegt. Dann gilt also (wegen $a/b \neq p_{k-1}/q_{k-1}$)

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| \geq \frac{1}{q_{k-1}b}$$

und (wegen der Lage zwischen den Approximierenden und einer schon bewiesenen Formel)

$$|a/b - p_{k-1}/q_{k-1}| < |p_k/q_k - p_{k-1}/q_{k-1}| = \frac{1}{q_k q_{k-1}}.$$

Nimmt man das zusammen, so folgt

$$b > q_k. \quad (*)$$

Andererseits gilt (Zeichnung)

$$|\alpha - a/b| \geq |p_{k+1}/q_{k+1} - a/b| \geq \frac{1}{bq_{k+1}}$$

also

$$|b\alpha - a| \geq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

sowie (s.o.)

$$|q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Nimmt man die beiden vorangehenden Ungleichungen zusammen so folgt

$$|q_k\alpha - p_k| \leq |b\alpha - a| \quad (**)$$

Die Gleichungen $(*)$ und $(**)$ zusammen zeigen, dass a/b keine beste Approximation ist. Widerspruch.

Wegen $p_0/q_0 = 0$ und $a/b \neq \alpha$ und der schon bewiesenen monotonen Konvergenz der Konvergenten mit geraden und ungeraden Index sind mit diesen beiden Faellen alle Moeglichkeiten abgedeckt. *Zeichnung.*

Sei nun eine Konvergente p_k/q_k zu α gegeben. Wir betrachten den Ausdruck

$$A(y,x)) := |\alpha y - x|$$

fuer $y = 1, 2, \ldots, q_k$ und $x \in \mathbb{Z}$. Sei (y_0, x_0) so gewaehlt, dass der Ausdruck A dort minimal ist und y_0 kleinstmoeglich ist. Dann ist x_0 eindeutig bestimmt. (Uebung! Hier geht $\alpha \neq 1/2$ ein.) Nach Konstruktion ist x_0/y_0 eine beste Approximation zweiter Art zu α. (Denn: Erfuellt b, a

$$|b\alpha - a| \leq |y_0\alpha - x_0| \text{ und } b \leq y_0,\ a/b \neq x_0/y_0$$

so folgt $A(b,a) \leq A(y_0, x_0)$ also aufgrund der Minimalitaeten $b = y_0$ und dann aufgrund der Eindeutigkeit von x_0 auch $a = x_0$ und das ist ein Widerspruch.) Damit folgt nach dem schon gezeigten Teil des Theorems also

$$x_0/y_0 = p_s/q_s$$

fuer ein s. Wegen $y_0 \leq q_k$ und da die Konvergenten gekuerzt sind, muss weiterhin gelten $s \leq k$. nach Voraussetzung. Daher kommen nur Konvergenten mit Index hoechsten k in Frage.) Gilt $s = k$, so sind wir fertig. Wir betrachten nun den Fall $s < k$: Dann gilt aufgrund der unteren Schranke

$$|q_s\alpha - p_s| > \frac{1}{q_s + q_{s+1}} \geq \frac{1}{q_{k-1} + q_k}.$$

(Hier wird im letzten Schritt $s < k$ und das daraus folgende $q_s \leq q_{k-1}$ und $q_{s+1} \leq q_k$ genutzt.) Weiterhin gilt natuerlich aufgrund der oberen Schranke

$$|q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{q_{k+1}}.$$

Schliesslich folgt nach Konstruktion von $p_s = x_0$ und $q_s = y_0$ dann auch noch

$$|q_s\alpha - p_s| \leq |q_k\alpha - p_k|.$$

Nimmt man die drei voranstehenden Ungleichungen zusammen, so folgt

$$\frac{1}{q_{k-1} + q_k} < \frac{1}{q_{k+1}}$$

also

$$q_{k+1} < q_{k-1} + q_k.$$

Das ist aber ein Widerspruch. □

Die p_n/q_n sind nicht nur 'bis q_n' sondern sogar bis '$q_{n+1} - 1$' die besten Approximierenden. Um das zu zeigen, nutzen wir den Abstand zu $\mathbb{Z}$ gegeben durch

$$\|\alpha\| := \inf\{|\alpha - n| : n \in \mathbb{Z}\}.$$

Theorem. *(Approximation bis $q_{n+1} - 1$) Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und seien p_n/q_n die zugehoerigen Konvergenten. Dann gilt*

$$\|k\alpha\| \geq \|q_n\alpha\|$$

fuer alle $k = 1, \ldots, q_{n+1} - 1$.

Beweis. Fuer $k < q_n$ folgt die Aussage sofort aus dem vorangegangenen Theorem. Angenommen es gibt ein $q_n < k < q_{n+1}$ mit

$$\|k\alpha\| < \|q_n\alpha\|.$$

Sei k die kleinste solche Zahl. Dann gehoert k aber zu einer besten Approximation zweiter Art. (Denn: Fuer $l < q_n$ gilt $\|k\alpha\| < \|q_n\alpha\| < \|l\alpha\|$ und fuer $q_n < l < k$ gilt nach Minimalitaet von k natuerlich

$$\|k\alpha\| < \|q_n\alpha\| \leq |l\alpha\|.)$$

Damit muss also nach dem vorigen Theorem k eines der q_m sein. Das ist ein Widerspruch. □

Bemerkung. Ist $\alpha \in (0,1)$ irrationals, so kann fuer $k,l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ nicht gelten $\|k\alpha\| = \|l\alpha\|$. Insbesondere muss also die Ungleichung in obigem Theorem fuer $k \neq q_n$ strikt sein.
(Bew. Angenommen $\|k\alpha\| = \|l\alpha\|$. Dann existieren also $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $|k\alpha - a| = |l\alpha - b|$. Dann gilt also $(k\alpha - a) = (l\alpha - b)$ oder $(k\alpha - a) = -(l\alpha - b)$. Im ersten Fall folgt $(k - l)\alpha = (a - b)$. Im zweiten Fall folgt $(k + l)\alpha = (a + b)$. In beiden Faellen ergibt sich ein Widerspruch zur Irrationalitaet von α.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer weiteren 'Charakterisierung' von Konvergenten als 'beste' Approximierende in einem gewissen Sinne.

Theorem. *Sei $\alpha \in (0,1)$ gegeben.*

(a) *Gilt $|\alpha - a/b| < \frac{1}{2b^2}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, so ist a/b eine Konvergente von α.*

(b) *Hat α eine k-te Konvergente, so gilt eine der beiden Ungleichungen*

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| < \frac{1}{2q_k^2} \quad bzw. \quad \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| < \frac{1}{2q_{k-1}^2}.$$

Beweis. (a) Nach der schon bekannten Charakterisierung reicht es zu zeigen, dass a/b eine beste Approximation (zweiter Art) ist. Seien also natuerliche Zahlen d, c mit

$$|d\alpha - c| \leq |b\alpha - a| < \frac{1}{2b}$$

und $c/d \neq a/b$ gegeben. (Zu zeigen: $d > b$.) Es folgt

$$|\alpha - c/d| < 1/(2bd).$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| &\leq \left|\alpha - \frac{c}{d}\right| + \left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \\ &< \frac{1}{2bd} + \frac{1}{2b^2} \\ &= \frac{b+d}{2b^2 d}.\end{aligned}$$

Weiterhin gilt (wegen $a/b \neq c/d$) natuerlich

$$\left|\frac{c}{d} - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{bd}.$$

Nimmt man die beiden vorangehenden Ungleichungen zusammen, so folgt

$$\frac{1}{bd} < \frac{b+d}{2b^2 d}$$

und damit

$$d > b.$$

Das beendet den Beweis von (a).

(b) Nach den schon gezeigten Eigenschaften der Konvergenten, liegt α zwischen p_{k-1}/q_{k-1} und p_k/q_k. Daher gilt

$$\left|\alpha - \frac{p_k}{q_k}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \left|\frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}\right| = \frac{1}{q_k q_{k-1}}.$$

(Hier folgt die letzte Gleichung aus $(-1)^n = p_k q_{k-1} - q_k p_{k-1}$.) Fuer beliebige positive s, t mit $s \neq t$ gilt $st < \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}s^2$ (wegen $0 < (t-s)^2$). Wegen $q_{k-1} < q_k$ also $q_k \neq q_{k-1}$ gilt daher

$$\frac{1}{q_k q_{k-1}} < \frac{1}{2}\frac{1}{q_k^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{q_{k-1}^2}.$$

Nimmt man die beiden vorangehenden Ungleichunge zusammen, so folgt die Aussage von Teil (b). □

3. Sturmsche Folgen

In diesem Abschnitt werden wir Sturmsche Folgen einfuehren und einige einfache Eigenschaften diskutieren. Im kommenden Abschnitt werden wir dann eine weitere Darstellung (die auf Kettenbruchentwicklung basiert) geben.

Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational gegeben. Sei (fuer $\theta \in [0,1]$)

$$V_{\alpha,\theta} : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}, W_{\alpha,\theta} : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}$$

mit

$$V_{\alpha,\theta}(n) = 1_{[1-\alpha,1)}(n\alpha + \theta \mod 1),\ W_{\alpha,\theta}(n) = 1_{(1-\alpha,1]}(n\alpha + \theta \mod 1)$$

sowie

$$\Omega_\alpha := \{V_{\alpha,\theta} : \theta \in [0,1]\} \cup \{W_{\alpha,\theta} : \theta \in [0,1]\} \subset \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$$

und

$$\mathcal{W}_\alpha := \mathcal{W}(\Omega(\alpha)).$$

Notation. Bei gegebenem $\alpha \in (0,1)$ irrational, schreiben wir oft U_θ fuer $V_{\alpha,\theta}$ oder $W_{\alpha,\theta}$.

Wir beginnen mit einer einfachen (aber wichtigen) Beobachtung zu Stetigkeitseigenschaften der V bzw. W unter Konvergenz von rechts bzw. links.

Proposition. *Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational.*
(a) Gilt $\theta_n \to \theta+$ (d.h. $\theta_n > \theta$ fuer alle n sowie $\theta_n \to \theta$), so gilt $U_{\theta_n}(k) \to V_{\alpha,\theta}(k)$ fuer jedes $k \in \mathbb{Z}$.
(b) Gilt $\theta_n \to \theta-$ (d.h. $\theta_n < \theta$ fuer alle n sowie $\theta_n \to \theta$), so gilt $U_{\theta_n}(k) \to W_{\alpha,\theta}(k)$ fuer jedes $k \in \mathbb{Z}$.

Beweis. (a) Es gilt fuer $\theta_n \to \theta+$ offenbar

$$V_{\alpha,\theta_n}(k) = 1_{[1-\alpha,1)}(\theta_n + k\alpha) \to 1_{[1-\alpha,1)}(\theta + k\alpha) = V_{\alpha,\theta}(k)$$

sowie

$$U_{\alpha,\theta_n}(k) = 1_{(1-\alpha,1]}(\theta_n + k\alpha) \to 1_{[1-\alpha,1)}(\theta + k\alpha) = V_{\alpha,\theta}(k).$$

(b) Das folgt analog. □

Als erst Folgerung aus der Proposition erhalten wir das folgende Lemma.

Lemma. *Es ist Ω_α invariant unter dem Shift T auf $\{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ und abgeschlossen.*

Beweis. Invarianz: Offenbar gilt

$$TU_\theta = U_{\theta+\alpha \mod 1}.$$

Damit folgt sofort die Invarianz.

Wir zeigen nun die Abgeschlossenheit: Sei (U_{θ_n}) eine Folge in Ω_α, die gegen ein $\omega \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ konvergiert. Ohne Einschraenkung (sonst Teilfolge) sei (θ_n) selber konvergent gegen θ. Ist θ_n schliesslich konstant, so folgt die Aussage einfach. Andernfalls koennen wir ohne Einschraenkung annehmen $\theta_n \to \theta+$. Nun folgt aus der vorigen Proposition sofort

$$U_{\theta_n} \to V_{\alpha,\theta}.$$

Das beendet den Beweis. □

.

DEFINITION. *Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational. Dann heisst (Ω_α, T) das Sturmsche dynamische System zur Rotationszahl α.*

Das naechste Ziel ist es, einige Eigenschaften wie Minimalitaet und Eindeutige Ergodizitaet der Sturmschen Systeme zu zeigen. Dazu erinnern wir zunaechst noch an Eigenschaften der irrationalen Rotation auf dem Torus.

Erinnerung. Sei $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Dann kann man also Funktionen auf $\mathbb{T}$ mit den 1-periodischen Funktionen auf $\mathbb{R}$ identifizieren. Das werden wir im folgenden (oft) stillschweigend machen. Zu $\alpha \in (0,1)$ definiert man die Rotation

$$R = R_\alpha : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}, \ R([x]) := x + \alpha \mod 1\pi.$$

Fuer irrationale α ist $(\mathbb{T}, R)$ dann minimal und eindeutig ergodisch (siehe Kapitel 1). Wir werden den Ausdruck ' mod 1' in der Notation (oft) unterdruecken.

THEOREM. *(Minimalitaet Sturmscher Systeme) Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational. Dann ist (Ω_α, T) minimal.*

Beweis. Offenbar gilt fuer jedes $n \in \mathbb{Z}$

$$(T^n U_\theta)(\cdot) = U_\theta(\alpha n + \cdot) = U_{R^n(\theta)}(\cdot).$$

mit der irrationalen Rotation $R = R_\alpha$ auf $\mathbb{T}$. Da die irrationale Rotation minimal ist, sind die $R^n(\theta), n \in \mathbb{Z}$, also dicht in $\mathbb{T}$. Damit folgt aus der obigen Proposition die gewuenschte Minimalitat. □

Fuer die weiteren Untersuchungen erweist es sich als praktisch, noch die folgenden Intervalle

$$I_1 := [1-\alpha, 1), \ I_0 := [0, 1-\alpha)$$

und

$$J_1 := (1-\alpha, 1], \ J_0 := (0, 1-\alpha]$$

einzufuehren. Diese Intervalle werden wir meist als Teilmengen von $\mathbb{T}$ ansehen. Weiterhin definieren wir fuer jedes Wort $x = x_0 \ldots x_{n-1}$ mit $x_j \in \{0,1\}$ noch

$$I_x := \bigcap_{j=0}^{n-1} R^{-j} I_{x_j}$$

sowie

$$J_x := \bigcap_{j=0}^{n-1} R^{-j} J_{x_j}.$$

Die Relevanz dieser Intervalle kommt von folgender Proposition.

PROPOSITION. *(Relevanz der I_x , J_x) (a) Es tritt das Wort x in $V_{\alpha,\theta}$ an der Stelle 0 genau dann auf, wenn θ zu I_x gehoert.*
(b) Es tritt das Wort x in $W_{\alpha,\theta}$ an der Stelle 0 genau dann auf, wenn θ zu J_x gehoert.

Beweis. (a) Es gilt nach Konstruktion

$$x_j = V_{\alpha,\theta}(j) \Longleftrightarrow \theta + \alpha j \in I_{x_j} \Longleftrightarrow \theta \in R^{-j}(I_{x_j}).$$

Damit folgt (a) sofort. Der Beweis von (b) verlaeuft analog. □

Theorem. *(Morse/Hedlund '40) Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und $\mathcal{W}_\alpha$ die Wortmenge des assoziierten Sturmschen Systems mit Rotationszahl α. Fuer die Komplexitaet*

$$p : \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{N}_0,\ p(n) := \sharp\, \mathcal{W}_\alpha \cap \mathcal{A}^n$$

gilt $p(n) = n+1$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Aufgrund der Minimalitaet und der vorigen Proposition gilt

$$p(n) := \sharp\{x \in \mathcal{A}^n : I_x \neq \varnothing\}.$$

Offenbar (Induktion) ist aber I_x (wenn es nicht leer ist) ein Intervall in $\mathbb{T}$, dessen Randpunkte, zwei benachbarte Punkte aus der Vereinigung der beiden Mengen

$$0, -\alpha, \ldots, -(n-1)\alpha$$

(Bild des rechten Randpunktes von $(1-\alpha, 1])$ und

$$-\alpha, -\alpha - 1\alpha, ... - \alpha - (n-1)\alpha$$

(Bild des linken Randpunktes von $(1-\alpha, 1]$ sind. Es gibt genau $n+1$ solcher Intervalle (Induktion). Damit folgt die Aussage. □

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung: Ein minimales System mit Komplexitaet $p(n) = n+1$ ist genau ein Sturmsches System (Coven/Hedlund '73).

Theorem. *(Balanciertheit Sturmscher Syteme Morse/Hedlund '40) Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und $\mathcal{W}_\alpha$ die Wortmenge des assoziierten Sturmschen Systems mit Rotationszahl α. Dann gilt fuer alle v_1, v_2 in $\mathcal{W}_\alpha$, deren Laenge uebereinstimmt*

$$|\sharp_a v_1 - \sharp_a v_2| \leq 1$$

fuer $a \in \{0,1\}$.

Beweis. Es reicht die Aussage fuer $a = 1$ zu zeigen. Aufgrund der schon bewiesenen Minimalitat, reicht es Woerter zu untersuchen, die in einem $V_{\alpha,\theta}$ an der Stelle 0 auftreten. Diese Woerter entstehen aus den Punkten

$$\theta, \theta + \alpha, \ldots, \theta + (n-1)\alpha$$

durch folgende Kodierung: Faellt der k-te Punkt in ein Intervall der Form $l + [1-\alpha, 1)$, so erhaelt man eine 1 und sonst eine 0. Damit erhaelt man also eine Eins im k-ten Schritt genau dann, wenn man im $k+1$-ten Schritt eine ganze Zahl ueberspringt. Daher folgt fuer das entsprechende Wort v also

$$\sharp_1 v = \sharp\, \mathbb{Z} \cap (\theta, \theta + n\alpha).$$

Es ist nun nicht schwer zu zeigen (Uebung), dass fuer zwei Intervalle J_1 und J_2 gleicher Laenge in $\mathbb{R}$ gilt

$$|\sharp\, \mathbb{Z} \cap J_1 - \sharp\, \mathbb{Z} \cap J_2| \leq 1.$$

Damit folgt die Aussage. □

Bemerkung. Es gilt auch die Umkehrung. Ein minimales System mit der angegebenen Balanciertheitseigenschaft ist ein Sturmsches System (Morse/Hedlund '40).

Unser naechstes Ziel ist es, die eindeutige Ergodizitaet Sturmscher Systeme zu zeigen. Wir beginnen mit einer (leichten) Verschaerfung eines schon bekannten Sachverhaltes.

Lemma. *Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und $(\mathbb{T}, R)$ das zugehoerige dynamische System. Ist $f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, so existiert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(R^k x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx$$

gleichmaessig in $x \in \mathbb{T}$.

Beweis. Wir wissen schon aus Kapitel 1, dass $(\mathbb{T}, R)$ eindeutig ergodisch ist. Daher gilt fuer jedes stetige f die angegebene Aussage. Ist nun f Riemann-integrierbar, so koennen wir zu gegebenem $\varepsilon > 0$ stetige g, h finden mit

$$g \le f \le h$$

sowie

$$\int (h-g)dx \le \varepsilon.$$

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} g(R^k x) \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f(R^k x) \\ &\le \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} h(R^k x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x)dx \end{aligned}$$

gleichmaessig in $x \in \mathbb{T}$. Wegen $\int (h-g)dx \le \varepsilon$ folgt dann die Aussage (da $\varepsilon > 0$ beliebig war). □

Ende der Vorlesung

Theorem. *Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational. Dann ist (Ω_α, T) eindeutig ergodisch und es gilt fuer die Frequenz ν_x eines Wort $x \in \mathcal{W}_\alpha$*

$$\nu_x = |I_x| = |J_x|.$$

Beweis. Nach der abstrakten Charakterisierung eindeutiger Ergodizitaet, reicht es zu zeigen, dass fuer jedes $x \in \mathcal{W}_\alpha$ die Frequenz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_x \omega(0)\ldots\omega(n-1)}{n}$$

gleichmaessig in $\omega \in \Omega_\alpha$ existiert. Offenbar kann stattdessen auch die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_x \omega(0)\ldots\omega(n-1+|x|-1)}{n}$$

gleichmaessig in $\omega \in \Omega_\alpha$ gezeigt werden. Nach der Definition Sturmscher System, reicht es fuer $U_\theta = V_{\alpha,\theta}$ und $U_\theta = W_{\alpha,\theta}$ die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sharp_x U_\theta(0)\ldots U_\theta(n-1+|x|-1)}{n}$$

gleichmaessig in $\theta \in [0,1]$ zu zeigen. Das werden wir als naechstes zeigen. Wir untersuchen nur den Fall $U_\theta = V_{\alpha,\theta}$. Der andere Fall kann analog behandelt werden. Sei $f : \mathbb{T} \longrightarrow \{0,1\}$, $f = 1_{I_x}$, die charakteristische Funktion von I_x. Dann zeigt die obige Proposition zur Relevanz der I_x und J_x

$$f(\theta) = 1 \Longleftrightarrow \theta \in I_x \Longleftrightarrow U_\theta(0)\ldots U_\theta(n-1) = x.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(R^j\theta) &= \frac{\sharp\{0 \le k \le n-1 : x \text{ tritt in } U_\theta \text{ an der Stelle } k \text{ auf}\}}{n}\\ &= \frac{\sharp_x U_\theta(0)\ldots U_\theta(n-1+|x|-1)}{n}.\end{aligned}$$

Da f offenbar Riemann-integrierbar ist, existiert aber nach dem vorigen Lemma der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(R^j\theta)$$

gleichmaessig in θ und die gewuenschte Behauptung folgt. □

4. Die Faktorabbildung

Im vorigen Abschnitt haben wir wesentliche Eigenschaften des Sturmschen Systems zur Rotationszahl α aus Eigenschaften der entsprechenden Rotation auf $\mathbb{T}$ erhalten. Das ist kein Zufall, wie wir in diesem Abschnitt zeigen.

Proposition. *Sei $\omega : \mathbb{Z} \longrightarrow \{0,1\}$ eine Funktion der Form $\omega = U_{\alpha,\theta}$ mit $\alpha \in (0,1)$ irrational und $\theta \in [0,1)$ und $U \in \{V, W\}$. Dann sind α und θ eindeutig bestimmt.*

Beweis. Eindeutigkeit von α: Aufgrund des Theorems zur eindeutigen Ergodizitaet gilt

$$\alpha = \text{Frequenz von 1 in } \omega = \lim_{n\to\infty}\frac{\sharp_1\omega(0)\ldots\omega(n-1)}{n}.$$

Damit ist also α eindeutig bestimmt.

Eindeutigkeit von θ: Fuer $n \in \mathbb{N}$ sei

$$w_n := \omega(0)\ldots\omega(n-1).$$

Dann gilt

$$\theta \in I_{w_n} \cup J_{w_n}$$

fuer jedes $n \in \mathbb{N}$. Es unterscheiden sich I_{w_n} und J_{w_n} nur durch Randpunkte. Weiterhin gilt aufgrund der Dichtheit von αk, $k \in \mathbb{Z}$, in $\mathbb{T}$, dass die Laenge von I_{w_n} und J_{w_n} gegen Null konvergiert. Damit ist θ eindeutig bestimmt. □

Aufgrund der vorangehendene Proposition koennen wir jedem $\omega \in \Omega_\alpha$ ein eindeutiges θ zuordnen mit $\omega = U_\theta$ fuer ein $U \in \{V, W\}$.

Theorem. *(Die Faktorabbildung) Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und (Ω_α, T) das zugehoerige Sturmsche System und $(\mathbb{T}, R)$ die zugehoerige Rotation. Dann ist die (nach vorangegangener Proposition wohldefinierte) Abbildung*

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{T}, \Phi(U_\theta) = \theta,$$

stetig und surjektiv mit

$$\Phi(T\omega) = R\Phi(\omega). \text{ (Faktorabbildung)}$$

Weiterhin gilt $\sharp\,\Phi^{-1}(\theta) = 1$ *falls* $\theta \neq k\alpha$ *fuer ein* $k \in \mathbb{Z}$ *und* $\sharp\,\Phi^{-1}(\theta) = 2$ *sonst.*

Beweis. Ausser der Stetigkeit ist alles schon gezeigt bzw. klar. Wir beweisen nun die Stetigkeit: Sei $\omega_n \to \omega$. Es gilt $\omega_n = U_{\theta_n}$ und $\omega = U_\theta$ mit geeigenten θ_n und θ. Zu zeigen $\theta_n \to \theta$: Da $\mathbb{T}$ kompakt ist, reicht es zu zeigen, dass jede konvergente Teilfolge von θ_n gegen θ konvergiert. Sei also eine konvergente Teilfolge $(\theta_{n_k})_k$ gegeben und sei $\widetilde{\theta}$ ihr Grenzwert. Zu zeigen $\widetilde{\theta} = \theta$.
Ohne Einschraenkung sei $\theta_{n_k} \to \widetilde{\theta}+$ (Sonst zu Teilfolge uebergehen bzw. mit schliesslicher Konstanz der Folge argumentieren). Dann gilt (s.o.) aber

$$U_{\theta_{n_k}} \to V_{\alpha,\widetilde{\theta}}.$$

Weiterhin gilt aber natuerlich

$$U_{\theta_{n_k}} = \omega_{n_k} \to U_\theta.$$

Damit folgt $V_{\alpha,\widetilde{\theta}} = U_\theta$ und damit aufgrund der Eindeutigkeitsaussage der vorigen Proposition also $\widetilde{\theta} = \theta$. □

Bemerkung.

- Man sagt: Es ist $(\mathbb{T}, R)$ ein Faktor von (Ω_α, T) und die Faktorabbildung ist $1:1$ ausser auf dem Urbild des Orbits von 0. Dort ist sie $2:1$.
- Man kann auch aus der Tatsache, dass $(\mathbb{T}, R)$ eindeutig ergodisch ist und die Faktorabbildung (ausser in abzaehlbar vielen Punkten) $1:1$ ist, schliessen, dass (Ω_α, T) eindeutig ergodisch ist.

5. Ein anderer Zugang

In diesem Abschnitt diskutieren wir einen alternativen Zugang zu Sturmschen Systemen via Kettenbruchentwicklung. Das wird eine Aehnlichkeit zu Substitutionssystemen zeigen.

Sei α eine irrationale Zahl in $(0,1)$ mit Kettenbruchentwicklung gegeben durch

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots] = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}}.$$

Die zugehörigen kanonischen Approximanden $\frac{p_n}{q_n}$ erfüllen

$$p_0 = 0, \quad p_1 = 1, \quad p_n = a_{n-1}p_{n-1} + p_{n-2},$$

$$q_0 = 1, \quad q_1 = a_0, \quad q_n = a_{n-1}q_{n-1} + q_{n-2}.$$

Rekursiv werden nun die Wörter s_n, $n \in \mathbb{N}_0$ über dem Alphabet $A = \{0, 1\}$ definiert durch

$$s_{-1} \equiv 1, \qquad s_0 \equiv 0, \qquad s_1 \equiv s_0^{a_0-1}s_{-1}, \qquad s_n \equiv s_{n-1}^{a_{n-1}}s_{n-2}, \quad n \geq 2.$$

Nach Konstruktion gilt folgendes:

- Es ist die Länge von s_n gleich q_n, $n \geq 0$.

- Es ist $\sharp_1 s_n = p_n$, $n \geq 1$.

Das folgt leicht durch Induktion (da die in Frage stehenden Groessen, dieselben Rekursionen wie die p_n bzw. q_n erfuellen.

PROPOSITION. *Für $n \geq 3$ gilt $s_{n-1}s_n = s_n s_{n-2}^{a_{n-1}-1} s_{n-3}s_{n-2}$. Ist $a_1 \geq 2$, so gilt dies auch schon für $n \geq 2$. Insbesondere ist in diesen Fällen s_n ein Präfix von $s_{n-1}s_n$.*

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung. □

PROPOSITION. *Es existieren π_n, $n \geq 2$ mit*

$$s_{2n} = \pi_{2n}10, \tag{3}$$

$$s_{2n+1} = \pi_{2n+1}01. \tag{4}$$

Beweis. Das folgt leicht durch Induktion. □

Bemerkung. Tatsaechlich sind die π_n Palindrome.

Offenbar ist s_{n-1} für $n \geq 2$ ein Präfix von s_n. Daher existiert der in naheliegender Weise definierte „Rechtsgrenzwert“

$$c_\alpha \equiv \lim_{n\to\infty} s_n. \tag{5}$$

Analog ist für $n \geq 2$ auch s_{n-1} ein Suffix von s_{n+1}. Daher existieren die in naheliegender Weise definierten „Linksgrenzwerte“

$$d_\alpha \equiv \lim_{n\to\infty} s_{2n}, \qquad e_\alpha \equiv \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}. \tag{6}$$

Die Verbindung zum vorigen Abschnitt wird durch folgende Proposition gestifftet.

PROPOSITION. (a) $V_{\alpha,0}|_{\{1,2,\ldots\}} = W_{\alpha,0}|_{\{1,2,\ldots\}} = c_\alpha$.
(b) $W_{\alpha,}|_{\{\ldots,-2,-1,0\}} = e_\alpha$, $V_{\alpha,0}|_{\{\ldots,-2,-1,0\}} = d_\alpha$.

Beweis. Wir zeigen nur die Aussage (a). Der Beweis wird in mehreren Schritten gefuehrt.

□

Ende der Vorlesung

KAPITEL 6

Quasikristallschrödingeroperatoren

In diesem Abschnitt geben wir eine Einfuehrung in die Spektraltheorie von Schroedingeroperatoren,, die zu Quasikristallen assoziiert sind. Dabei werden wir einige Sachverhalten der Spektraltheorie benotigen. Diese Sachverhalten werden wir ohne Beweis diskutieren.

Wir beginnen mit einer kurzen Einfuehrung und Motivation.

1. Der Spektralsatz

Die Multiplikation mit M_{id} **auf** $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ *Erinnerung.* Ein Mass auf $\mathbb{R}$ ist eine lineare Abbildung $\varrho : C_c(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $\varrho(\varphi) \geq 0$ fuer alle $\varphi \geq 0$. Zu jedem Mass ϱ auf $\mathbb{R}$ definiert man den Traeger $\operatorname{supp}(\varrho)$ durch (vgl. oben)

$$\operatorname{supp}(\varrho) := \{E \in \mathbb{R} : \varrho(\varphi) > 0 \text{fuer alle } \varphi \geq 0 \text{ mit } \varphi(E) > 0\}.$$

Der Traeger ist eine abgeschlossene Menge.

Proposition. *(a) Der Traeger von ϱ ist das Spektrum von H_V.*
(b) Es ist ein $E \in \mathbb{R}$ genau dann ein Eigenwert von H_V, wenn das Mass ϱ einen Punktanteil bei E hat d.h. wenn ein $c > 0$ existiert mit $\varrho(\varphi) \geq c\phi(E)$ fuer alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ mit $\varphi \geq 0$.

Tatsaechlich interessiert man sich fuer noch feinere Eigenschaften des Masses ϱ. Dabei stehen die folgenden Eigenschaften eines Masses ϱ im Vordergrund:

- Es ist ϱ absolut stetig (bzgl. des Lebesguemasses), wenn eine Funktion h auf U existiert mit
$$\varrho(\varphi) = \int h(x)\varphi(x)dx$$
fuer alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. Es hat ϱ einen absolut stetigen Anteil, wenn es ein absolut stetiges (nichttriviales) Masse ν gibt mit $\varrho \geq \nu$.
- Es ist ϱ ein reines Punktmasse, wenn $x_n \in \mathbb{R}$ und $c_n \geq 0$ existieren mit
$$\varphi(\varphi) = \sum c_n \varphi(x_n)$$
fuer alle $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$. Es hat ϱ einen Punktanteil, wenn es ein (nichttriviales) Punktmasse ν gibt mit $\varrho \geq \nu$.
- Es ist ϱ singulaer stetig, wenn es weder Punktanteile besitzt noch einen absolut stetigen Anteil.

Ende der Vorlesung

PROPOSITION. *(Charakterisierung Distanz zum Spektrum) Sei A ein selbstadiungierter Operator im Hilbertraum und $E \in \mathbb{R}$. Dann sind aequivalent:*

(i) $dist(E, \sigma(A)) < \varepsilon$
(ii) *Es existiert ein normiertes f mit $\|(A - E)f\| < \varepsilon$.*

Beweis. Ohne Einschraenkung sei $A = M_{id}$ auf $L^2(\mathbb{R}, \mu)$.
(i)$\Longrightarrow$ (ii): Sei $\lambda \in \sigma(A) = supp(\mu)$ mit

$$|\lambda - E| \leq \widetilde{\varepsilon} < \varepsilon$$

gewaehlt. Sei $\delta > 0$ beliebig. Sei f eine (in $L^2(\mathbb{R}, \mu)$) normierte Funktion mit Traeger in einer δ- Umgebung von λ. (Eine solche Funktion existiert, da λ zum Traeger von μ gehoert). Dann gilt

$$\|(A - E)f\| \leq \|(A - \lambda)f\| + \|(\lambda - E)f\| \leq \delta + \widetilde{\varepsilon}.$$

Da $\delta > 0$ beliebig war, folgt (ii).

(ii)$\Longrightarrow$ (i): Wir nehmen an, dass $\mathrm{dist}(E, \sigma(A)) \geq \varepsilon$ gilt. Dann folgt

$$\|(M_{id} - \lambda)f\|^2 \geq \varepsilon^2 \|f\|^2$$

fuer alle f im Hilbertraum. Das ist ein Widerspruch zu (ii). □

Bemerkung. Ein normiertes f mit $\|(A-E)f\| \leq \varepsilon$ heisst auch ε-fast-Eigenfunktion zum Fast-Eigenwert E.

Aus der vorangehenden Proposition folgt eine Charakterisierung des Spektrum.

FOLGERUNG. *Sei A ein selbstadjungierter Operator um Hilbertraum. Dann gehoert E zu $\sigma(A)$ genau dann, wenn es eine Folge normierter Funktionen f_n gibt mit $\|(A - E)f_n\| \to 0$.*

Beweis. Das folgt direkt aus der vorangehenden Proposition. □

Aus der Proposition folgt auch eine Stabilitaetsaussage.

FOLGERUNG. *(Unterhalbstetigkeit des Spektrums) Sei A_n eine Folge von beschraenkten selbstadjungierten Operatoren in einem Hilbertraum, die gegen den beschraenkten selbstadjungierten Operator A konvergieren, in dem Sinne, dass fuer alle f aus dem Hilbertraum gilt*

$$A_n f \longrightarrow Af, \ n \to \infty.$$

Dann gilt

$$\sigma(A) \subset \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(A_n)}.$$

Beweis. Sei $E \in \sigma(A)$. Es reicht, $E_{n_k} \in \sigma(A_{n_k})$ zu finden mit $E_{n_k} \to E$. Wegen $E \in \sigma(A)$ existiert nach der vorangehenden Folgerung zu jedem $k \in \mathbb{N}$ eine normierte Funktion f_k mit $\|(A - E)f_k\| \leq 1/k$. Dann gilt aber nach der Voraussetzung

$$\|(A_n - E)f_k\| \leq 2/k$$

fuer alle genuegend grossen n. Damit existiert nach der Charakterisierung der Distanz zum Spektrum fuer alle genuegend grossen n also ein $E_{n,k} \in \sigma(A_n)$ mit

$$|E(n,k) - E| \leq 2/k.$$

Damit folgt die Behauptung leicht. □

Bemerkung.

- Im allgemeinen ist die Inklusion in der Folgerung strikt. Um das zu sehen, betrachtet man etwa den Hilbertraum $\ell^2(\mathbb{Z})$ und die Projekionen $P_n : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ mit $P_n f := 1_{[-n,n]} f$. Dann gilt offenber $P_n f \to If$, $n \to \infty$, fuer alle f. Aber es ist $\sigma(P_n) = \{0,1\}$ und $\sigma(I) = \{1\}$.
- Natuerlich kann man die Folge der A_n auch erst mit grossen Indices beginnen lassen. Damit ergibt sich aus der obigen Aussage sofort folgende Verschaerfung:

$$\sigma(A) \subset \bigcap_k \overline{\bigcup_{n\geq k} \sigma(A_n)}.$$

Zum Mass μ.

Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, dass das Studium selbstadjungierter Operatoren auf die Untersuchung von M_{id} auf $L^2(\mathbb{R},\mu)$ zurueckgefuehrt werden kann. Wir diskutieren nun noch wie die Masse μ entstehen.

THEOREM. *Sei A ein selbstadjungierter Operator im Hilbertraum. Dann existiert zu jedem f aus dem Hilbertraum ein eindeutiges Mass ϱ_f auf $\mathbb{R}$ mit*

$$\langle f, (A-z)^{-1} f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\varrho_f(t)$$

fuer alle $z \in \mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$. Es gilt

$$\varrho_f(\mathbb{R}) = \|f\|^2.$$

Beweis. Sei $R : \mathbb{C}^+ \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $R(z) = \langle f, (A-z)^{-1} f\rangle$. Dann gilt:

- R ist holomorph.
- $|R| \leq \frac{\|f\|^2}{|\Im z|}$.
- $\Im R > 0$.

Wir beweisen die Aussagen der drei Punkte: Die mittlere Aussage wurde schon bewiesen. Die beiden anderen Aussagen folgen aus der Resolventenformel

$$\begin{aligned}(A-z_2)^{-1} - (A-z_1)^{-1} &= (A-z_2)^{-1}((A-z_1) - (A-z_2))(A-z_1)^{-1} \\ &= (z_2 - z_1)(A-z_2)^{-1}(A-z_1)^{-1}.\end{aligned}$$

Damit folgt sofort

$$\frac{R(z) - R(z_0)}{z - z_0} = \langle f, (A-z)^{-1}(A-z_0)^{-1} f\rangle \to \langle f, (A-z_0)^{-2} f\rangle,\ z \to z_0.$$

Das liefert die Holomorphie. Weiterhin folgt aus der Resolventenformel (unter Beachtung von $((A-z)^{-1})^* = (A-\overline{z})^{-1}$) sofort

$$\begin{aligned} \Im R(z) &= \frac{1}{2i}(R(z) - R(\overline{z})) \\ (Resolventenformel) &= \frac{z-\overline{z}}{2i}\langle f, (A-z)^{-1}(A-\overline{z})^{-1} f\rangle \\ &= (\Im z)\|(A-\overline{z})^{-1} f\|^2 \\ &> 0. \end{aligned}$$

Das liefert die Ungleichung.

Nach einem Theorem von Bochner-Cauchy-Herglotz-... folgt aus den obigen drei Punkten, dass R die Form

$$R = \int \frac{1}{t-z} d\rho$$

mit einem eindeutigen ρ hat. Die letzte Aussage beweisen wir hier nicht. □

Bemerkung. Die Abbildung, die ein (beschraenktes) Mass μ auf $\mathbb{R}$ auf die Funktion $R_\mu(z) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} d\mu$ abbildet, heisst Borel-Transformation. Sie spielt zusammen mit Fouriertransformation und Laplacetransformation eine grosse Rolle in Spektraltheorie.

2. Diskrete Schroedingeroperatoren assoziiert zu Subshifts

Wir kehren nun zur Untersuchung eindimensionaler diskreter Schroedingeroperatoren zurueck. Sei $\ell^2(\mathbb{Z})$ der Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen f auf $\mathbb{Z}$, fuer die gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |f(n)|^2 < \infty$$

mit Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\mathbb{Z}} f(x)\overline{g(x)}.$$

Zu der beschraenkte Funktion

$$V : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

wird die die lineare Abbildung

$$H_V : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

definiert durch

$$(H_V u)(n) := u(n+1) + u(n-1) + V(n)u(n).$$

Es heisst H_V der zu V assoziierte eindimensionale diskrete Schrödingeroperator. Bei der Untersuchung von H_V erweist sich die Untersuchung von Loesungen des entsprechenden Differenzengleichung als sehr nuetzlich. Wir definieren den Operator $\tau = \tau_V$ durch

$$\tau : \text{Funktionen auf } \mathbb{Z} \longrightarrow \text{Funktionen auf } \mathbb{Z},$$

$$\tau u(n) := u_{n-1} + V(n)u_n + u_{n+1}.$$

Sei nun $E \in \mathbb{R}$ beliebig. Die Grundidee der folgenden Ueberlegungen ist es, dass die Loesung von $(\tau - E)u$ durch ihre Werte an zwei aufeinanderfolgenden

Stellen eindeutig bestimmt ist und alle ihre Werte dann rekursiv durch eine lineare Abbildung aus diesen Werten gewonnen werden koennen. Hier sind die Details: Mit den *Einschritttransfermatrizen*

$$T(V(n)) := T(V(n))_E := \begin{pmatrix} E - V(n) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und der Bezeichnung

$$\underline{u}(n) := \begin{pmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{pmatrix}$$

(fuer Funktionen u auf $\mathbb{Z}$) gilt dann, wie man leicht sieht:

$$u \text{ loest } (\tau - E)u = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$T(V(n))\underline{u}(n) = \underline{u}(n+1)$$

fuer alle $n \in \mathbb{Z}$. Iteration zeigt, dass dies wiederum aequivalent ist zu

$$\underline{u}(n+1) = M(1,n)\underline{u}(1)$$

fuer alle $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$M(1,n) := T(V(n))\cdots T(V(1))\underline{u}_1, \text{ fuer } n \geq 1$$

$$M(1,1) := I$$

$$M(1,n) := T(V(n))^{-1}\cdots T(V(0))^{-1} \text{ fuer } n \leq 0.$$

Man bezeichnet die $M's$ als *Transfermatrizen* (und die $T(V(n))$ als Einschritttransfermatrizen s.o.) Offenbar haben alle $T(\cdot)$ und damit auch alle $M.$ die Determinante 1.

Uns wird es uns nun um folgende **Situation** gehen: Sei (Ω, T) ein Subshift ueber einem endlichen Alphabet $\mathcal{A}$, das eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Damit kann man insbesondere jedes $\omega \in \Omega$ als Funktion $\omega : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ auffassen und den entsprechenden Operator H_ω assoziieren. Damit induziert jeder solche Subshift eine Familie $(H_\omega)_{\omega\in\Omega}$ von diskreten Schroedingeroperatoren

$$H_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$$

$\omega \in \Omega$. Eine solche Familie von Operatoren heisst zu dem Subshift assoziert.

Die Familie hat eine Stetigkeitseigenschaft und eine Invarianzeigenschaft. Das untersuchen wir als naechstes.

Proposition. *Sei (Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ und (H_ω) die assozierte Familie von Operatoren. Dann gilt fuer alle $f \in \ell^2(\mathbb{Z})$*

$$H_{\omega_n} f \to H_\omega f$$

falls $\omega_n \to \omega$, $n \to \infty$.

Beweis. Es gilt offenbar $(H_{\omega_n} - H_\omega) = (\omega_n - \omega)$. Damit folgt

$$\|H_{\omega_n} f - H_\omega f\| = \|(\omega - \omega_n) f\| \to 0, n \to \infty.$$

Zum letzten Schritt: Hat f endlichen Traeger, so folgt das sofort aus der punktweisen Konvergenz der ω_n gegen ω. Im allgemeinen Fall muss man noch zusaetzlich nutzen, dass alle ω_n und ω gleichmaessig beschraenkt sind und f zu ℓ^2 gehoert (Uebung; Dominierte Konvergenz). □

Sei $U : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ definiert durch $(Uf)(n) = f(n+1)$. Dann ist U unitaer (Nachrechnen).

PROPOSITION. *(Ω, T) ein Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ und (H_ω) die assozierte Familie von Operatoren. Dann gilt die folgende Equivarianzeigenschaft*

$$U H_\omega U^* = H_{T\omega}$$

fuer alle $\omega \in \Omega$. Insbesondere haben also H_ω und $H_{T\omega}$ die gleichen spektralen Eigenschaften.

Beweis. Die Equivarianzeigenschaft folgt direkt durch Nachrechnen. Da U unitaer ist, folgt die letzte Aussage sofort (da unitaere Abbildungen die spektralen Eigenschaften erhalten). □

Aus diesen strukturellen Eigenschaften ergibt sich sofort folgendes.

THEOREM. *Sei (Ω, T) ein minimaler Subshift ueber dem endlichen Alphabet $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ und (H_ω) die assozierte Familie von Operatoren. Dann existiert eine abgeschlossene Menge $\Sigma \subset \mathbb{R}$ mit*

$$\Sigma = \sigma(H_\omega)$$

fuer alle $\omega \in \Omega$.

Notation. Die Menge Σ aus dem Theorem, heisst dann das Spektrum der Familie.

Beweis. Das folgt aus Minimalitaet und der Stetigkeit. Seien $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ beliebig. Zu zeigen: $\sigma(H_{\omega_2}) \subset \sigma(H_{\omega_1})$.
Aufgrund der Minimalitaet gibt es eine Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit

$$\lim_{k \to \infty} T^{n_k} \omega_1 = \omega_2.$$

Damit folgt aus der Stetigkeit und der Folgerung zur Stabilitaet des Spektrums sofort:

$$(*) \quad \sigma(H_{\omega_2}) \subset \overline{\bigcup_k \sigma(H_{T^{n_k}\omega_1})}.$$

Aufgrund der Equivarianz sind aber $H_{T\omega}$ und H_ω und damit auch $H_{T^m\omega}$ und H_ω unitaer equivalent (fuer alle $m \in \mathbb{N}$). Insbesondere gilt also $\sigma(H_{T^m\omega}) = \sigma(H_\omega)$ fuer alle $m \in \mathbb{Z}$ und $\omega \in \Omega$. Damit folgt also aus $(*)$ dann

$$\sigma(H_{\omega_2}) \subset \sigma(H_{\omega_1}).$$

Das ist die gewuenschte Aussage. □

Bemerkung. Tatsaechlich ist in der Situation des Theorems auch das absolutstetige Spektrum konstant. Das ist ein sehr tiefes Resultat von Last/Simon

'00. Fuer das Punktspektrum ist ein solches Resultat nicht unbedingt zu erwarten, aber es gibt auch bisher kein Gegenbeispiel! Tatsaechlich hat das Problem der Konstanz des Punktspektrums fuer spezielle Subshifts beachtliches Interesse erregt.

Wir koennen noch etwas zur Struktur der Menge Σ aus dem vorigen Theorem sagen.

PROPOSITION. *Sei* (Ω, T) *ein minimaler Subshift ueber dem endlichen Alphabet* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ *und* (H_ω) *die assozierte Familie von Operatoren und* Σ *die Menge aus dem vorigen Theorem. Dann ist* Σ *abgeschlossen und hat keine isolierten Punkte.*

Beweis. Es ist Σ das Spektrum eines (jedes) H_ω mit $\omega \in \Omega$. Daher ist Σ abgeschlossen.

Wir zeigen nun, dass Σ keine isolierten Punkte hat: Angenommen E ist ein solcher isolierter Punkt. Dann folgt aus dem Spektralsatz, dass E ein Eigenwert ist. (Ein isolierter Punkt des Traegers eines Masses muss Punktmasse tragen.) Sei P_ω die orthogonale Projektion auf den Eigenraum zu E von H_ω. Nach unserer Annahme ist der Eigenraum mindestens eindimensional. Weiterhin kann seine Dimension nicht groesser als 2 sein, da es maximal zwei linear unabhaengige Loesungen von $(\tau_\omega - E)u = 0$ gibt (da es sich um einen Differenzenoperator zweiter Ordnung handelt...). (Tataechlich kann die Dimension sogar nicht groesser als Eins sein, aber das ist im Moment nicht von Belang.) Sei

$$g : \Omega \longrightarrow \{1, 2\},\; g(\omega) := \text{Dimension des Bildes von } P_\omega.$$

Sei nun μ ein beliebiges invariantes Wahrscheinlichkeitsmass auf Ω. (Die Existenz eines solchen Masses ist nicht trivial. Sie folgt aus einer gewissen Kompaktheit und ist als Satz von Bogoliubov bekannt.) Dann gilt also

$$1 \le \int_\Omega g(\omega) d\mu \le 2. \quad (*)$$

Es ist nun weiterhin

$$g(\omega) = \text{dimBild } P_\omega = \text{tr}(P_\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle \delta_n, P_\omega \delta_n \rangle.$$

(Fuer Projektionen in endlichdimensionalen Euklidischen Raeumen ist das aus Linearer Algebra bekannt. Der allgemeine Fall verlangt groessere Sorgfalt, kann aber aehnlich behandelt werden.) Da P_ω eine Projektion ist gilt $P_\omega = P_\omega^*$ und $P_\omega = P_\omega^2$ und damit folgt leicht

$$\langle \delta_n, P_\omega \delta_n \rangle = \|P_\omega \delta_n\|^2 \ge 0$$

Damit koennen wir $\int_\Omega g(\omega)d\mu$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega g(\omega)d\mu &= \int_\Omega \sum_n \langle \delta_n, P_\omega \delta_n\rangle d\mu \\
&= \sum_n \int_\Omega \langle \delta_n, P_\omega \delta_n\rangle d\mu \\
&= \sum_n \int_\Omega \langle U^{-n}\delta_0, P_\omega U^{-n}\delta_0\rangle d\mu \\
&= \sum_n \int_\Omega \langle \delta_0, U^n P_\omega U^{-n}\delta_0\rangle d\mu \\
(Equivarianz) \quad &= \sum_n \int_\Omega \langle \delta_0, P_{T^n\omega}\delta_0\rangle d\mu \\
(\mu \text{ invariant}) \quad &= \sum_n \int_\Omega \langle \delta_0, P_\omega \delta_0\rangle d\mu.
\end{aligned}$$

Im letzten Term sind alle Summanden gleich. Es gibt nun zwei Moeglichkeiten: Ist der Wert der aller Summanden Null, so ist die Summe Null; ist der Wert groesser als Null, so ist die Summe unendlich. Beides widerspricht aber $(*)$. □

Die vorangehenden Resultate geben recht grobe Informationen ueber das Spektrum von Subshift Operatoren. In den folgenden beiden Abschnitten werden wir Methoden kennen lernen, um speziellere Aussagen zu zeigen.

3. Abwesenheit von Punktspektrum - das Gordon-Argument

Hier lernen wir ein elementares aber fundamentales Kriterium zur Abwesenheit von Punktspektrum kennen.

LEMMA. *(Gordon '76). Sei $\mathcal{A}$ eine endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $V : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{A}$ gegeben. Es gebe Woerter $x^{(n)}$ ueber $\mathcal{A}$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:*
- $|x^{(n)}| \to \infty$.
- $V(-|x^{(n)}|+1)\dots V(0)|V(1)\dots V(|x^{(n)}|)V(|x^{(n)}|+1)\dots V(2|x^{(n)}|) = x^{(n)}|x^{(n)}x^{(n)}$ *fuer alle* $n \in \mathbb{N}$.

Dann hat H_V keine Eigenwerte.

Bemerkung.
- Fuer einen selbstadjungierten Operator in einem endlichdimensionalen Raum ist das natuerlich nicht moeglich.
- Das Originalresultat von Gordon ist etwas allgemeiner.

Beweis. Sei $E \in \mathbb{R}$ beliebig und u eine Loesung von $(\tau_V - E)u = 0$ mit $u \neq 0$. Wir muessen zeigen, dass u nicht zu ℓ^2 gehoeren kann.
Sei

$$M_n := T(V(|x_n|))\dots T(V(1)).$$

Dann ist aufgrund der zweiten Voraussetzung natuerlich

$$M_n = M(1, |x^{(n)}|)$$

gerade die lineare Abbildung, die $\underline{u}(1)$ auf $\underline{u}(|x^{(n)}|+1)$ abbildet. Weiterhin liefert die zweite Voraussetzung (Zeichnung) sofort die folgenden Formeln:

- $\underline{u}(2|x^{(n)}|+1) = M(1,2|x^{(n)}|)\underline{u}(1) = M_n M_n \underline{u}(1)$.
- $\underline{u}(|x^{(n)}|+1) = M(1,|x_n|)\underline{u}(1) = M_n \underline{u}(1)$.
- $\underline{u}(-|x^{(n)}|+1) = M(1,-|x^{(n)}|+1)\underline{u}(1) = M_n^{-1}\underline{u}(1)$.

Es gilt nun nach dem Satz von Cayley-Hamilton aber

$$M_n^2 - (\mathrm{tr} M_n)M_n + \det M_n = 0.$$

Da die Determinanten der $M's$ immer 1 ist, folgen sofort die beiden Gleichungen:

$$M_n^2 - (\mathrm{tr} M_n)M_n + 1 = 0$$

und

$$M_n - (\mathrm{tr} M_n) + M_n^{-1} = 0.$$

Anwenden dieser beiden Gleichungen auf $\underline{u}(1)$ und Nutzen der obigen Formeln liefert

$$\underline{u}(2|x^{(n)}|+1) - (\mathrm{tr} M_n)\underline{u}(|x^{(n)}|+1) + \underline{u}(1) = 0$$

und

$$\underline{u}(|x^{(n)}|+1) - (\mathrm{tr} M_n)\underline{u}(1) + \underline{u}(-|x^{(n)}|+1) = 0.$$

Wir unterscheiden nun zwei Faelle.

Fall 1 $|\mathrm{tr} M_n| \leq 1$: Dann folgt (aus der ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen)

$$\max\{\|\underline{u}(2|x^{(n)}|+1)\|, \|\underline{u}(|x^{(n)}|+1)\|\} \geq \frac{1}{2}\|\underline{u}(1)\|.$$

Fall 2 $|\mathrm{tr} M_n| > 1$: Dann folgt (aus der zweiten der beiden vorhergehenden Gleichungen)

$$\max\{\|\underline{u}(-|x^{(n)}|+1)\|, \|\underline{u}(|x^{(n)}|+1)\|\} \geq \frac{1}{2}\|\underline{u}(1)\|.$$

Insgesamt erhalten wir fuer jedes n also

$$\max\{\|\underline{u}(-|x^{(n)}|+1)\|, \|\underline{u}(|x^{(n)}|+1)\|, \|\underline{u}(2|x^{(n)}|+1)\|\} \geq \frac{1}{2}\|\underline{u}(1)\|.$$

Wegen $u \neq 0$ gilt $\underline{u}(1) \neq 0 \in \mathbb{C}^2$. Damit folgt aus der vorangehenden Ungleichung sofort, dass $|u(k)|$ fuer $|k| \to \infty$ keine Nullfolge ist. Das zeigt, dass u nicht zu ℓ^2 gehoert. □

Beispiel. Sei $\alpha \in (0,1)$ irrational und $V = V_\alpha$ das zugehoerige Sturmsche Potential. Dann hat H_V keine Eigenwerte. Eine analoge Aussage gilt fuer H_W mit $W = W_\alpha$.

Bew. Seien s_n zu α gegeben wie im Abschnitt zu Sturmschen Systemen diskutiert. Dann beginnt $c_\alpha = V(1)V(2)\cdot$ mit s_n fuer alle $n \geq 1$. Damit beginnt c_α mit $s_n s_n$ fuer alle $n \geq 3$. (Denn man kann c_α zerlegen in s_n und s_{n-1} und isoliert auftretenden s_{n-1}. Beginnt c_α in dieser Zerlegung mit $s_n s_n$ so sind wir fertig. Andernfalls beginnt c_α mit $s_n s_{n-1} s_n$ und nach einer Proposition wissen wir schon, dass $s_{n-1}s_n$ mit s_n beginnt (fuer $n \geq 3$)). Weiterhin endet $d_\alpha = ...V(-1)V(0)$ fuer jedes $n = 2k$ mit $k \geq 1$ mit s_n. Damit folgt die Aussage sofort aus dem vorangehenden Lemma.

4. Abwesenheit von absolut stetigem Spektrum und Kotani-Theorie

KAPITEL 7

Delone dynamische Systeme

KAPITEL 8

Diffraktionstheorie