Höhere Analysis

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Mittwoch 09.06. 2010**

(1) Sei $[a, b]$ ein beschränktes Intervall in $\mathbb{R}$ und Λ das Netz endlicher Teilmengen $\lambda = \{x_0, \ldots, x_n\}$ von $\mathbb{R}$, so dass $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, halbgeordnet bzgl. der Inklusion. Zu gegebenen $\lambda \in \Lambda$ und einer beschränkten Funktion f auf $[a, b]$ definiere

$$(Sf)_k := \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \quad (If)_k := \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

sowie

$$\Sigma^*_\lambda f := \sum_{k=1}^{n} (Sf)_k (x_k - x_{k-1})$$

$$\Sigma_{*\lambda} f := \sum_{k=1}^{n} (If)_k (x_k - x_{k-1}).$$

Zeigen Sie, dass die beiden Netze $(\Sigma^*_\lambda f)_{\lambda\in\Lambda}$ und $(\Sigma_{*\lambda} f)_{\lambda\in\Lambda}$ in $\mathbb{R}$. Was bedeutet es, wenn beide Grenzwerte übereinstimmen?

(2) Sei $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ein Netz in X. Sei $\mathcal{F}$ das System der Mengen $A \subset X$, mit der Eigenschaft, dass $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ schließlich in A ist. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ ein Filter ist.
Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt konvergent gegen $x \in X$, falls das Umgebungssystem $\mathcal{O}_x$ in $\mathcal{F}$ enthalten ist. Zeigen Sie, dass das Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ genau dann gegen einen Punkt $x \in X$ konvergiert, wenn der assozierte Filter gegen $x \in X$ konvergiert.

(3) Sei $\mathcal{F}$ ein Filter in X und Λ die Menge aller Paare (x, A) in $X \times \mathcal{F}$, so dass $x \in A$. Zeigen Sie, dass durch

$$(x, A) \preceq (y, B) :\Leftrightarrow B \subset A$$

eine aufwärtsfiltrierende Halbordung auf Λ gegeben ist.
Zeigen Sie desweitern, dass der Filter $\mathcal{F}$ genau dann gegen $x \in X$ konvergiert, wenn das Netz $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ gegen $x \in X$ konvergiert.

(4) Zeigen Sie, dass zwei Topologien auf einer Menge X genau dann gleich sind, falls sie die selben konvergenten Netze (bzw. Filter) besitzen. Weshalb genügt es dafür nicht, nur Folgen zu betrachten?

Zusatzaufgabe Konstruieren Sie zu einer gegebenen Folge $x = (x_n)$ ein Teilnetz, welches keine Teilfolge ist!