

Höhere Analysis II - Notizen ¹

Jena - Wintersemester 2015 / 2016

Daniel Lenz

¹Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Invertierbare Operatoren	5
Kapitel 2. Etwas Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren	11
1. Grundlegende Konzepte und Eigenschaften	11
2. Exkurs Funktionentheorie	17
3. Beschränkte Operatoren	21
Kapitel 3. Adjungierte Operatoren	27
1. Adjungierte Operatoren in Banachräumen	27
2. Adjungierte Operatoren in Hilberträumen	32
3. Normale Operatoren im Hilbertraum	35
Kapitel 4. Etwas zum Laplaceoperator im \mathbb{R}^N	37
1. Exkurs: Falten, Glätten, Approximieren	37
2. Erinnerung: Die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum	42
3. Die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$	44
4. Der Laplaceoperator	44
Kapitel 5. Der Lebesguesche Differentiationssatz und Anwendungen	47
Kapitel 6. Einige Sätze zu $C(X)$.	63
1. Die Einpunkt-Kompaktifizierung	63
2. Der Satz von Stone-Weierstrass.	66
3. Der Rieszsche Darstellungssatz	71
Kapitel 7. Der Dualraum von $C(X)$	79
1. Der Vektorraum der regulären Borelmaße	79
2. Der Dualraum von $C(X)$	82
Kapitel 8. Netze, Filter und der Satz von Tychonoff	87
1. Netze	87

KAPITEL 1

Invertierbare Operatoren

In diesem Abschnitt untersuchen wir stetig invertierbare Operatoren. Es stellt sich heraus, dass Bijektivität und stetige Invertierbarkeit äquivalent sind (unter geeigneten Voraussetzungen) und dass stetige Invertierbarkeit stabil unter kleinen Störungen ist. Wir untersuchen zunächst den Fall beschränkter Operatoren und anschließend den allgemeineren Fall abgeschlossener Operatoren.

Sind E und F Vektorräume und $T : E \rightarrow F$ linear, so ist T genau dann bijektiv, wenn es einen linearen Operator $S : F \rightarrow E$ gibt mit

$$ST = I_E \text{ und } TS = I_F.$$

Ein solches S ist dann eindeutig und heißt der *Inverse* von T und wir schreiben $T^{-1} = S$.

Sind E und F normierte Räume, so bezeichnen wir mit $L(E, F)$ den Vektorraum der linearen beschränkten Operatoren von E nach F . Dieser Raum ist mit der Norm

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\| : \|x\| \leq 1\}$$

ausgestattet. Ein Operator $T \in L(E, F)$ heißt *stetig invertierbar*, wenn T bijektiv ist und der Inverse stetig ist, d.h. wenn ein $S \in L(F, E)$ existiert mit

$$ST = I_E \text{ und } TS = I_F.$$

Sind E und F Banachräume, so ist nach dem Satz von der stetigen Inversen der Operator T genau dann stetig invertierbar, wenn T bijektiv ist. (Die Stetigkeit der Inversen ist also automatisch erfüllt).

Von besonderem Interesse ist der Fall $E = F$. Dann schreiben wir $L(E) := L(E, E)$. Offenbar gilt dann:

- Die Identität I ist stetig invertierbar.
- Sind T_1 und T_2 stetig invertierbar, so ist auch $T_1 T_2$ stetig invertierbar mit $(T_1 T_2)^{-1} = T_2^{-1} T_1^{-1}$.
- Mit T ist auch T^{-1} stetig invertierbar.

Damit bilden die stetig invertierbaren Operatoren dann also eine Gruppe. Strukturell ist folgendes Resultat von großer Bedeutung.

PROPOSITION (Neumannsche Reihe). *Sei E ein Banachraum und $S \in L(E)$ mit $\limsup_{N \rightarrow \infty} \|S^N\|^{1/N} < 1$ gegeben. Dann ist $I - S$ stetig invertierbar mit*

$$(I - S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} S^n,$$

wobei die Summe absolut konvergiert.

Bemerkungen.

- Man kann das Resultat als ein Stueck Stoerungstheorie verstehen: Die stetig invertierbare Identitaet wird durch das 'kleine' S gestoert und das Ergebnis ist weiterhin stetig invertierbar.
- Der Spezialfall $E = F = \mathbb{C}$ liefert die geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n.$$

- Absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} S^n$ heisst gerade $\sum_{n=0}^{\infty} \|S^n\| < \infty$. Da E ein Banachraum ist, impliziert dies die Existenz von

$$\sum_{n=0}^{\infty} S^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N S^n.$$

(Tatsaechlich kann man das fuer beliebige Banachraeume E mit Norm $\|\cdot\|$ genauso beweisen, wie man es fuer $E = \mathbb{C}$ mit Norm $|\cdot|$ in Analysis I beweist.)

Beweis. Nach dem Wurzelkriterium gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|S^n\| < \infty.$$

Das liefert die absolute Konvergenz. Wie schon in der vorangehenden Bemerkung diskutiert liefert die absolute Konvergenz die Existenz von $T := \sum_{n=0}^{\infty} S^n$. Damit erhaelt man dann nach kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} (I - S)T &= (I - S) \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N S^n \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (I - S) \sum_{n=0}^N S^n \\ (\text{Teleskop-Summe}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (I - S^{N+1}) \\ &= I. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $\|S^{N+1}\| \rightarrow 0$ verwendet.

Analog zeigt man

$$T(I - S) = \dots = I.$$

Damit ist $(I - S)$ also stetig invertierbar mit dem angegebenen Inversen. \square

Bemerkung. Gilt $\|S\| < 1$, so ist $\limsup_N \|S^N\|^{1/N} < 1$ automatisch erfuellt. Dieser Fall spielt in den Anwendungen eine grosse Rolle.

FOLGERUNG. Sei E ein Banachraum und $T \in L(E)$ stetig invertierbar. Sei $S \in L(E)$ mit $\|ST^{-1}\| < 1$ gegeben. Dann ist $T + S$ stetig invertierbar mit

$$(T + S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n,$$

wobei die Summe absolut konvergiert.

Beweis. Es gilt

$$T + S = (I + ST^{-1})T = (I - (-ST^{-1}))T.$$

Nach Voraussetzung hat $-ST^{-1}$ die Norm kleiner als Eins. Damit ist es nach der Proposition ueber die Neumannsche Reihe invertierbar. Weiterhin ist T invertierbar. Nun folgt die gewuenscht Aussage einfach. \square

Bemerkungen.

- Auch dieses Resultat kann man als ein Stueck Stoerungstheorie verstehen: Die stetig invertierbare T wird durch das (bzgl. T) 'kleine' S gestoert und das Ergebnis ist weiterhin stetig invertierbar. Die Folgerung besagt gerade, dass um jedes stetig invertierbare T noch Platz ist.
- Die Gruppe der stetig invertierbaren Elemente in $L(E)$ wird auch mit $GL(E)$ bezeichnet. Dann besagt also die Folgerung, dass $GL(E)$ offen in $L(E)$ ist.
- Die Terme in der Summe moegen etwas unsymmetrisch aussehen. Tatsaechlich ist aber der Term an der Stelle n gegeben durch

$$T^{-1}ST^{-1} \dots T^{-1}ST^{-1},$$

wobei n -mal der Faktor S auftritt.

Wir wenden uns nun allgemeineren Operatoren zu: Seien E und F Vektorraeume. Eine lineare Abbildung $T : D(T) \rightarrow F$ von einem Unterraum $D(T)$ nach F heisst dann ein *linearer Operator von E nach F* . Ein linearer Operator T von E nach F ist genau dann bijektiv, wenn ein linearer Operator $S : F \rightarrow E$ existiert mit

$$ST = I_{D(T)} \text{ und } TS = I_F.$$

Es heisst dann S der *Inverse* von T und man schreibt $T^{-1} := S$. Es heisst T *stetig invertierbar*, wenn T bijektiv ist und T^{-1} stetig ist.

In den obigen Betrachtungen zu stetigen T haben wir gesehen, dass die Stetigkeit von T^{-1} automatisch folgt, wenn E und F Banachraeume sind. Eine aehnliche Aussage gilt auch hier. Dabei wird statt der Stetigkeit von T die Abgeschlossenheit von T benoetigt. Dabei heisst ein Operator T von E nach F abgeschlossen, wenn sein Graph

$$\{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F$$

abgeschlossen ist. Das ist aequivalent dazu, dass $D(T)$ mit der *Graphennorm*

$$\|x\|_T := \|x\| + \|Tx\|$$

vollstaendig ist.

Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ergibt sich folgende Aussage.

LEMMA. *Seien E und F Banachraeume und T ein abgeschlossener linearer Operator von E nach F . Ist T bijektiv, so ist T stetig invertierbar.*

Beweis. Da T bijektiv ist, existiert $S = T^{-1}$ und ist auf ganz F definiert. Weiterhin ist S abgeschlossen (da T abgeschlossen ist). Damit folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen, dass S stetig ist. \square

Bemerkung. Man mag sich fragen, ob man die Voraussetzung der Abgeschlossenheit an T abschwaechen kann. Das ist nicht der Fall. Das Konzept

der stetigen Invertierbarkeit ist eigentlich nur fuer abgeschlossene Operatoren sinnvoll. Denn ist T nicht abgeschlossen, so ist T auch nicht stetig invertierbar:

Fall 1: T ist nicht bijektiv. Dann ist T nicht einmal invertierbar.

Fall 2: T ist bijektiv. Dann existiert $S = T^{-1}$. Waere S stetig, so waere es abgeschlossen und damit waere auch T abgeschlossen. Widerspruch.

Wie auch schon im Falle beschraenkter Operatoren ist es nun unser naechstes Ziel, die Stabilitaet der stetigen Invertierbarkeit zu zeigen (d.h. zu zeigen, dass Operatoren nahe an stetig invertierbaren Operatoren auch stetig invertierbar sind). Dazu untersuchen wir zunaechst Stabilitaet von Abgeschlossenheit.

DEFINITION. Seien E, F normierte Raeeume und S, T lineare Operatoren von E nach F . Der Operator S heisst T -beschraenkt, wenn gilt

- $D(S) \supset D(T)$
- es gibt $a, b \geq 0$ mit

$$\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$$

fuer alle $x \in D(T)$.

Das Infimum aller dieser b heisst die T -Schranke von S .

Bemerkung.

- Im allgemeinen ist die T Schranke kein moegliches b .
- Der Operator S ist T -beschraenkt, wenn $\|x\|_S \leq C\|x\|_T$ gilt.
- Ist $S \in L(E, F)$, so gilt fuer jeden Operator T , dass S T -beschraenkt mit Schranke 0 ist. (Denn $\|Sx\| \leq C\|x\| + 0\|Tx\|$.)

← Ende der Vorlesung →

Fuer den naechsten Satz muessen wir die Summe von Operatoren von E nach F definieren. Sind T und S Operatoren von E nach F , so definiert man den Operator $T + S$ durch

$$D(T + S) := D(T) \cap D(S)$$

$$(T + S)x := Tx + Sx.$$

THEOREM (Stabilitaet der Abgeschlossenheit). Seien E, F Banachraeeume und S, T lineare Operatoren von E nach F . Sei S T -beschraenkt mit T -Schranke kleiner als Eins. Dann ist $T + S$ mit $D(T + S) = D(T)$ genau dann abgeschlossen, wenn T abgeschlossen ist.

Beweis. Da S die T -Schranke kleiner als Eins hat, gibt es b mit $0 \leq b < 1$ und $a \geq 0$ mit

$$\|Sx\| \leq a\|x\| + b\|Tx\|$$

fuer alle $x \in D(T)$. Wir zeigen nun, dass $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T+S}$ aequivalent sind. Es gilt fuer alle $x \in D(T)$ zweierlei:

Erstens:

$$\|Tx\| \leq \|(T + S)x\| + \|Sx\| \leq \|(T + S)x\| + a\|x\| + b\|Tx\|$$

also

$$(1 - b)\|Tx\| \leq a\|x\| + \|(T + S)x\|$$

also

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\| \leq C(\|x\| + \|(T+S)x\|) = C\|x\|_{T+S}.$$

Zweitens:

$$\begin{aligned} \|x\|_{T+S} &= \|x\| + \|(T+S)x\| \\ &\leq \|x\| + \|Tx\| + \|Sx\| \\ &\leq (1+a)\|x\| + (1+b)\|Tx\| \\ &= D\|x\|_T. \end{aligned}$$

Damit sind die Normen $\|\cdot\|_T$ und $\|\cdot\|_{T+S}$ auf $D(T) = D(T+S)$ äquivalent. Es ist dann also $(D(T), \|\cdot\|_T)$ genau dann vollständig, wenn $(D(T+S), \|\cdot\|_{T+S})$ vollständig ist und die Aussage folgt aus der Charakterisierung der Abgeschlossenheit. \square

Für den nächsten Satz müssen wir das Produkt TS von Operatoren definieren. Für Operatoren S von E nach F und T von F nach G definiert man den Operator TS von E nach G durch

$$D(TS) = \{x \in D(S) : Sx \in D(T)\}, \quad (TS)x = T(Sx).$$

Ist also T ein bijektiver Operator von E nach F (d.h. $T : D(T) \rightarrow F$ ist bijektiv) und S ein Operator von E nach F mit $D(S) \supset D(T)$, so ist der Operator ST^{-1} auf ganz F definiert (da für alle $y \in F$ $T^{-1}y \in D(T) \subset D(S)$ gilt).

THEOREM (Stabilität der stetigen Invertierbarkeit). *Seien E, F Banachräume und S, T lineare Operatoren von E nach F . Es sei T abgeschlossen und bijektiv (also $T^{-1} \in L(F, E)$). Gilt $D(S) \supset D(T)$ und $\|ST^{-1}\| < 1$, so ist auch $T+S$ abgeschlossen und bijektiv und es gilt*

$$(T+S)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n,$$

wobei die Reihe absolut konvergiert (also insbesondere auch bzgl. der Norm in $L(E, F)$).

Bemerkung. Formal folgt das sofort wie bei den Betrachtungen zu beschränkten Operatoren zu Beginn des Kapitels. Das Problem ist, dass $T+S$ nicht stetig ist und man darum einen zweiten Blick werfen muss.

Beweis. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen:

$T+S$ ist abgeschlossen. Es gilt $D(S) \supset D(T)$. Für $x \in D(T)$ gilt weiterhin

$$\|Sx\| = \|ST^{-1}Tx\| \leq \|ST^{-1}\| \|Tx\|.$$

Wegen $\|ST^{-1}\| < 1$ ist S also T -beschränkt mit Schranke kleiner als Eins. Damit folgt aus dem vorigen Satz und der Abgeschlossenheit von T , dass $T+S$ abgeschlossen ist.

Es gilt $T+S = (I+ST^{-1})T$. In der Tat sind beide Seiten genau auf $D(T)$ definiert und liefern dort den gleichen Wert.

$T+S$ ist bijektiv mit der angegebenen Inversen: Es ist $T : D(T) \rightarrow F$ bijektiv mit stetiger Inverser $T^{-1} : F \rightarrow D(T)$. Weiterhin ist nach

Voraussetzung $A = ST^{-1}$ beschränkt mit $\|A\| < 1$ und damit ist nach Neumannscher Reihe $(I + ST^{-1}) : F \rightarrow F$ bijektiv mit stetiger Inverser

$$(I + ST^{-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (ST^{-1})^n.$$

Damit ist

$$T + S = (I + ST^{-1})T$$

bijektiv mit stetiger Inverser gegeben durch

$$T^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (ST^{-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{-1} (ST^{-1})^n.$$

□

KAPITEL 2

Etwas Spektraltheorie abgeschlossener Operatoren

Fuer abgeschlossene Operatoren T in einem normierten Raum E entwickeln wir eine Loesungstheorie fuer Gleichungen der Form

$$(T - zI)x = y$$

bei gegebenem $y \in E$ und $z \in \mathbb{C}$. Wir wollen

- Loesbarkeit der Gleichung fuer alle y (d.h. Surjektivitaet von $T - zI$).
- Eindeutigkeit der Loesung (d.h. Injektivitaet von $T - zI$).
- Stetige Abhaengigkeit der Loesung x von y (d.h. Stetigkeit von $(T - zI)^{-1}$).
- Stetige Abhaengigkeit von z .

Die ersten drei Punkte bedeuten gerade, dass $T - zI$ stetig invertierbar ist. Entsprechende Betrachtungen sind als *Spektraltheorie* bekannt. Im Falle von Operatoren in endlichdimensionalen Raeeumen (Matrizen) geht es gerade um Eigenwerte.

1. Grundlegende Konzepte und Eigenschaften

DEFINITION. Sei E ein normierter Raum und T ein linearer Operator von E nach E . Dann definiert man die Resolventenmenge $\rho(T)$ von T als

$$\rho(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} : T - \lambda I : D(T) \longrightarrow E \text{ bijektiv mit stetiger Inverser}\}.$$

Das Komplement $\mathbb{K} \setminus \rho(T)$ heisst Spektrum von T und wird mit $\sigma(T)$ bezeichnet. Die Abbildung

$$R = R_T : \rho(T) \longrightarrow L(E), \lambda \mapsto R_T(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1},$$

heisst die Resolvente von T .

Notation. Wir schreiben auch $T - \lambda$ statt $T - \lambda I$. Oft wird auch die Resolventenmenge als Resolvente bezeichnet.

Bemerkung.

- Der Operator bildet E in sich selber ab.
- Ist T nicht abgeschlossen, so ist $\rho(T) = \emptyset$. Die eingefuehrten Begriffe sind also nur fuer abgeschlossene Operatoren interessant. In der Tat ist fuer nichtabgeschlossenes T auch $T - zI$ nicht abgeschlossen und damit folgt (wie im vorigen Abschnitt diskutiert), dass $T - zI$ nicht stetig invertierbar ist.
- Ist E ein Banachraum, so folgt aus der Abgeschlossenheit von T automatisch die Stetigkeit von $(T - \lambda)^{-1}$.

Wir werden es im folgenden daher (fast) ausschliesslich mit abgeschlossenen Operatoren in Banachraeumen zu tun haben.

← Ende der Vorlesung →

Beispiel - Matrizen: Sei $E = \mathbb{K}^n$ mit der Euklidischen Norm $\|x\| := \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$. Dann ist jede lineare Abbildung A von E nach E stetig mit

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

und

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\| : \|x\| \leq 1\} \leq \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$$

fuer $a_{i,j} = Ae_i(j)$ (Uebung). Daher kann man in der Definition des Spektrums / der Resolvente die entsprechenden Stetigkeitsforderungen weglassen und man erhaelt fuer ein lineares A

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= \{\lambda : A - \lambda \text{ nicht bijektiv}\} \\ &= \{\lambda : \det(A - \lambda) = 0\} \\ &= \{\lambda : A - \lambda \text{ nicht injektiv}\} \\ &= \{\text{Eigenwerte von } A\}. \end{aligned}$$

Das Spektrum ist also gerade die Menge der Eigenwerte.

Beispiel - Linksshift auf ℓ^p : Sei $p \in [1, \infty]$ gegeben und $E = \ell^p$ mit $\|\cdot\|_p$. Dabei ist

$$\ell^p := \ell^p(\mathbb{N}) := \begin{cases} \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\} & : 1 \leq p < \infty \\ \{x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : x \text{ beschränkt}\} & : p = \infty \end{cases}$$

und

$$\|x\|_p := \begin{cases} (\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p)^{1/p} & : 1 \leq p < \infty \\ \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} & : p = \infty. \end{cases}$$

Sei T der Shift-Operator auf ℓ^p , d.h.

$$T : \ell^p \rightarrow \ell^p, (Tx)(n) = x(n+1).$$

Dann gilt offenbar $\|Tx\| \leq \|x\|$ und damit $\|T\| \leq 1$. Wir berechnen nun das Spektrum:

Es gilt $\sigma(T) \subset B_1(0)$. Das folgt sofort aus $\|T\| \leq 1$. In der Tat ist fuer $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| > 1$ der Operator

$$T - \lambda = -\lambda \left(I - \frac{1}{\lambda} T \right)$$

nach dem Lemma zur Neumannschen Reihe stetig invertierbar wegen

$$\left\| \frac{1}{\lambda} T \right\| = \frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1.$$

Es gilt $U_1(0) \setminus \{0\} \subset \sigma(T)$: Sei $\lambda \in U_1(0) \setminus \{0\}$. Dann gehoert

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, x(n) = \lambda^n,$$

zu ℓ^p (wegen $|\lambda| < 1$) und verschwindet nicht (wegen $\lambda \neq 0$). Ausserdem gilt offenbar $Tx = \lambda x$, d.h.

$$(T - \lambda)x = 0.$$

Damit ist also $T - \lambda$ nicht injektiv.

Es ist $\sigma(T)$ abgeschlossen: Das beweisen wir weiter unten. Weil es so schoen ist, skizzieren wir hier schon einmal den Beweis. Wir zeigen, dass $\varrho(T)$ offen ist. Sei $z_0 \in \varrho(T)$. Dann ist fuer z nahe z_0 aber

$$T - z = (T - z_0) + (z_0 - z) = (I + (z_0 - z)(T - z_0)^{-1})(T - z_0)$$

stetig invertierbar. (Erster Faktor mit Neumannscher Reihe, zweiter Faktor wegen $z_0 \in \varrho(T)$).

Nimmt man die vorangehenden drei Aussagen zusammen so folgt

$$\sigma(T) = B_1(0).$$

Bemerkung. Fuer $1 \leq p < \infty$ sind die $\lambda \in B_1(0) \setminus U_1(0)$ **keine** Eigenwerte (wie man leicht sieht). Das zeigt, dass das Spektrum eines Operators in einem unendlich dimensionalen Raum im allgemeinen nicht (nur) aus Eigenwerten besteht.

Beispiel - Rechtsshift auf ℓ^2 : Sei $S : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ der Rechtsshift d.h.

$$(Sx)(n) = \begin{cases} x(n-1) & : n \geq 2 \\ 0 & : n = 1. \end{cases}$$

Dann ist S beschraenkt, und es gilt - wie man direkt sieht -

$$\langle Sx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

fuer alle $x, y \in \ell^2$. Damit folgt also $S = T^*$ und $T = S^*$. Damit folgt

$$\sigma(S) \stackrel{!}{=} \overline{\sigma(T)} = B_1(0).$$

Es bleibt ! zu zeigen: Wir zeigen die entsprechende Aussage fuer die Resolvente, d.h.

$$\varrho(S) = \overline{\varrho(T)}.$$

Wir zeigen \supset : Sei $\lambda \in \varrho(T)$. Dann existiert also ein beschraenkter Operator R mit

$$(T - \lambda)R = I = R(T - \lambda).$$

Durch Adjungieren folgt dann

$$R^*(T^* - \bar{\lambda}) = I = (T^* - \bar{\lambda})R^*.$$

Damit gehoert dann also $\bar{\lambda}$ zu $\varrho(T^*) = \varrho(S)$.

Wir zeigen \subset : Das folgt analog unter Nutzen von $S^* = T$.

Beispiel - Multiplikationsoperatoren. (Hier lernen wir ein Beispiel eines im allgemeinen unbeschraenkten Operator kennen.) Sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar. Sei $1 \leq p \leq \infty$ und M_u der maximale Operator der Multiplikation mit u auf $L^p(X, \mu)$ d.h.

$$D(M_u) := \{f \in L^p(X, \mu) : uf \in L^p(X, \mu)\}$$

$$M_u f = uf.$$

Dann gilt:

- Fuer $1 \leq p < \infty$ ist $D(M_u)$ dicht in $L^p(X, \mu)$. Gilt $p = \infty$, so ist $D(M_u)$ genau dann dicht, wenn u wesentlich beschraenkt ist. In diesem Fall gilt $D(M_u) = L^\infty(X, \mu)$.

- $\sigma(M_u) =$ wesentlicher Wertebereich von $u := \{\lambda \in \mathbb{C} : \mu(u^{-1}(U_\lambda(\varepsilon))) > 0 \text{ for all } \varepsilon > 0\}$.
- $\varrho(M_u) = \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(x) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer fast alle } x \in X\}$.
- $(M_u - z)^{-1} = M_{\frac{1}{u-z}}$ fuer alle $z \in \varrho(M_u)$.
- Es ist λ ein Eigenwert von $D(M_u)$ genau dann, wenn $\mu(u^{-1}(\{\lambda\})) > 0$ gilt.

Beweis. Wir lassen den Beweis des ersten und vierten Punkt als Uebungsaufgabe. Wir zeigen nun die mittleren beiden Punkte zusammen. Sei dazu

$$\varrho' := \{z : \text{existiert } \varepsilon > 0 \text{ mit } |u(x) - z| \geq \varepsilon \text{ fuer fast alle } k \in X\}.$$

Es gilt $\varrho' = \varrho(T)$:

Fuer $z \in \varrho'$ ist $g := \frac{1}{u-z}$ eine beschraenkte Funktion und es gilt offenbar

$$(M_u - z)M_g = I, \quad M_g(M_u - z) = I_{D(M_u)}.$$

Es ist also $z \in \varrho(T)$ und die angegebene Formel fuer die Inverse von $(M_u - z)$ gilt.

Fuer $z \notin \varrho'$ gilt fuer jedes $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{x : |u(x) - z| \leq \varepsilon\}) > 0.$$

Da μ σ -endlich ist, gibt es dann eine meßbare Menge A mit $0 < \mu(A) < \infty$ und

$$A \subset \{x : |u(x) - z| \leq \varepsilon\}.$$

Dann gehoert die charakteristische Funktion 1_A von A zu $L^p(X, \mu)$ und es gilt

$$\|(M_u - z)1_A\| \leq \varepsilon \|1_A\|.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gehoert dann also z nicht zu ϱ (s.o.).

Damit sind alles gewuenschten Aussagen gezeigt.

Bemerkung.

- Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich fuer $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ und μ Zaehlmass. Dann ist das Spektrum gerade gegeben durch

$$\overline{\{u(k) : k \in \mathbb{N}\}}.$$

- Jede abgeschlossene Menge in \mathbb{K} kann Spektrum (eines Multiplikationsoperator) sein. (Uebung...)
- (Uebung) Ist man in einer topologischen Situation, so kann man das Spektrum durch das Bild von u beschreiben. Genauer gilt folgendes: Sei X sogar ein topologischer Raum und es gelte fuer jede offene nichtleere Menge U noch $\mu(U) > 0$ und es sei $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann gilt

$$\text{wesentliches Bild von } u = \overline{\text{Bild von } u}.$$

Beispiel mit leerem Spektrum ueber \mathbb{C} : (s.u.)

Bemerkung - Einteilung des Spektrums. Sei A ein abgeschlossener Operator auf dem Banachraum E .

Sei $\lambda \in \sigma(A)$ gegeben. Dann ist also $A - \lambda$ nicht injektiv oder nicht surjektiv. 'Oft' ist es so, dass $(T - \lambda)$ injektiv ist genau dann, wenn $T - \lambda$ dichtes Bild hat. Das legt folgende Einteilung des Spektrum nahe:

$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ nicht injektiv}\}$ 'Eigenwerte' bzw. 'Punktspektrum'

$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A - \lambda \text{ injektiv mit dichtem Bild, aber nicht surjektiv}\}$ 'stetiges Spektrum'

$\sigma_r(A) := \sigma(A) \setminus (\sigma_p(A) \cup \sigma_c(A))$ 'residuelles Spektrum'.

Bemerkung - Rolle der Abschaetzung nach unten.

Sei λ in $\varrho(A)$ gegeben. Dann hat $A - \lambda$ die folgende starke Injektivitaetseigenschaft: Es existiert ein $c > 0$ mit

$$\|(A - \lambda)x\| \geq c\|x\|$$

fuer alle $x \in D(A)$. (In der Tat gilt mit dem beschraenkten $R = (A - \lambda)^{-1}$ dann

$$\|x\| = \|(A - \lambda)^{-1}(A - \lambda)x\| \leq \|(A - \lambda)^{-1}\| \|(A - \lambda)x\|$$

und das liefert sofort die gewuenschte Ungleichung.) Man mag sich nun fragen, wieweit diese Ungleichung schon die Resolventenmenge charakterisiert. Wir betrachten zwei Faelle:

- *Es gibt ein $c > 0$ mit $\|(A - \lambda)x\| \geq c\|x\|$ fuer alle $x \in D(A)$:* Dann ist $A - \lambda$ offenbar injektiv und es ist $\text{Bild}(A - \lambda)$ abgeschlossen (wie man leicht sieht). Damit ist dann also $A - \lambda$ ein bijektiver Operator von $D(A)$ nach $\overline{\text{Bild}(A - \lambda)} = \text{Bild}(A - \lambda)$. Gilt $\lambda \in \sigma(A)$, so kann dann also das Bild von $A - \lambda$ nicht dicht sein. Damit gehoert λ also zum residuellen Spektrum.

(Dieser Fall tritt tatsaechlich auf, wie das Beispiel des Rechtsshift $S = S - 0$ von oben zeigt.)

- *Es gibt kein $c > 0$ mit $\|(A - \lambda)x\| \geq c\|x\|$ fuer alle $x \in D(A)$:* In diesem Fall gehoert also λ zu $\sigma(A)$ (vgl. Betrachtung am Beginn der Bemerkung). Wichtig ist nun, dass dieser Fall aequivalent ist zur Existenz einer Folge (x_n) in $D(A)$ mit $\|x_n\| = 1$ fuer alle n und $(A - \lambda)x_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Man sagt dann, dass λ ein *approximativer Eigenwert von A* ist. Das gilt insbesondere fuer die λ aus dem stetigen Spektrum (da diese gerade nicht die Bedingung des vorigen Falles erfuellen).

Grundlegende Eigenschaften von Spektrum und Resolvente liefert der folgende Satz. Er besagt, dass die Resolventenmenge eine schoene Menge ist und die Resolvente eine schoene Funktion.

THEOREM (Grundlegende Eigenschaften von Resolvente und Spektrum). *Sei E ein Banachraum und T ein Operator von E nach E . Dann ist $\varrho(T)$ eine offene Teilmenge von \mathbb{K} , also $\sigma(T)$ eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{K} , und die Resolvente*

$$R : \varrho \longrightarrow L(E), \lambda \mapsto (T - \lambda)^{-1},$$

ist analytisch, d.h. um jeden Punkt in eine absolut konvergente (also insbesondere normkonvergente) Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius entwickelbar.

Beweis. Das folgt letzten Endes aus der Neumannschen Reihe. Sei $z_0 \in \rho(T)$. Dann ist $(T - z_0)$ invertierbar. Damit ist dann nach dem Satz ueber die Stabilitaet der Invertierbarkeit auch

$$T - z = (T - z_0) + (z_0 - z) =: T + S'$$

invertierbar falls

$$1 > \|(z - z_0)(T - z_0)^{-1}\| = |z - z_0| \|(T - z_0)^{-1}\|$$

also

$$|z - z_0| < \frac{1}{\|(T - z_0)^{-1}\|}.$$

Das zeigt die Offenheit der Resolventenmenge. Weiterhin folgt aus dem Satz ueber die Stabilitaet der Invertierbarkeit auch noch

$$\begin{aligned} (T - z)^{-1} &= ((T - z_0) + (z_0 - z))^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (T - z_0)^{-1} ((z - z_0)(T - z_0)^{-1})^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n (T - z_0)^{-n-1} \end{aligned}$$

mit absolut konvergenten Potenzreihe. Damit folgt die Analytizitaet. \square

FOLGERUNG. Sei die Situation wie im Theorem. Dann ist

$$R : \rho(T) \longrightarrow L(E), \lambda \mapsto (T - \lambda)^{-1},$$

stetig.

Beweis. Es gilt allgemein, dass eine analytische Funktion stetig ist. Konkret ist

$$(T - z)^{-1} - (T - z_0)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} (z - z_0)^k (T - z_0)^{-k-1}$$

absolut konvergent und

$$\|\dots\| \leq |z - z_0| \|(T - z_0)^{-2}\| \sum_{k=0}^{\infty} \|((z - z_0)(T - z_0)^{-1})^k\| \leq |z - z_0| C$$

fuer z nahe z_0 (da dann $\|((z - z_0)(T - z_0)^{-1})\| \leq q < 1$ gleichmaessig). \square

Wir kommen nun noch zu wichtigen algebraischen Umformungen.

PROPOSITION (Resolventenformeln - abstrakt). Seien E, F normierte Raeu-me und S, T bijektive lineare Operatoren von E nach F .

(a) Ist $D(S) \subset D(T)$ so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1}$.

(b) Ist $D(S) = D(T)$ so gilt $T^{-1} - S^{-1} = T^{-1}(S - T)S^{-1} = S^{-1}(S - T)T^{-1}$.

Bemerkung.

- Formal ist das ganz klar aufgrund von

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{x}(y-x)\frac{1}{y}.$$

Es geht darum, ob die angegebenen Ausdrücke definiert sind.

- Ist $T = S + P$ mit invertierbaren T, S mit gleichem Definitionsbereich, so folgt also

$$T^{-1}PS^{-1} = S^{-1}PT^{-1}.$$

Beweis. Es reicht (a) zu zeigen. Sei $y \in F$ beliebig und $x = S^{-1}y \in D(S) \subset D(T)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} T^{-1}y - S^{-1}y &= T^{-1}(SS^{-1}y) - T^{-1}TS^{-1}y \\ &= T^{-1}Sx - T^{-1}Tx \\ &= T^{-1}(Sx - Tx) \\ &= T^{-1}(S - T)x \\ &= T^{-1}(S - T)S^{-1}y. \end{aligned}$$

□

THEOREM (Resolventenformeln). *Seien S, T lineare Operatoren auf dem normierten Raum E .*

(a) *Für $z, z' \in \rho(T)$ gilt die erste Resolventengleichung*

$$R_T(z) - R_T(z') = (z - z')R_T(z)R_T(z') = (z - z')R_T(z')R_T(z).$$

(b) *Ist $D(S) = D(T)$ so gilt für $z \in \rho(S) \cap \rho(T)$ die zweite Resolventengleichung*

$$R_T(z) - R_S(z) = R_T(z)(S - T)R_S(z) = R_S(z)(S - T)R_T(z).$$

Beweis. Das folgt aus der vorigen Proposition.

(a) $T - z, T - z'$ statt T, S .

(b) $T - s, S - z$ statt T, S . □

Die bisherigen Betrachtungen galten für abgeschlossene Operatoren. Wir kommen nun zu beschränkten Operatoren. Dort lässt sich mehr über das Spektrum sagen und insbesondere seine Lage genauer bestimmen. Dazu brauchen wir aber noch etwas Vorbereitungen.

← Ende der Vorlesung →

2. Exkurs Funktionentheorie

DEFINITION. *Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ heißt holomorph, wenn für jedes $p \in \Omega$ der Grenzwert*

$$f'(p) = \lim_{z \rightarrow p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

existiert.

Bemerkung. Die Existenz dieses Grenzwertes ist eine sehr starke Forderung und deutlich stärker als die Forderung der Differenzierbarkeit bei reellwertigen Funktionen. Insbesondere impliziert sie, dass die Funktionen analytisch sind (s.u.).

DEFINITION (Kurvenintegral). Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$ stetig und (stueckweise) stetig differenzierbar und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann definiert man das Kurvenintegral von f entlang γ gemass

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

Beispiel. Sei fuer $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $f(z) = z^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = Re^{it}$ (fuer $R > 0$) gilt nach einer kleinen Rechnung

$$\int_{\gamma} f(z) dz = .. = \begin{cases} 2\pi i & : n = -1 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Das ist unabhaengig von R ! Analog sieht man fuer ein beliebiges $p \in \mathbb{C}$ und $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = p + Re^{it}$

$$\int_{\gamma} (z - p)^n dz = \begin{cases} 2\pi i & : n = -1 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Notation. Ein $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \mapsto p + Re^{it}$, so schreibt man statt \int_{γ} auch $\int_{\partial B_R}$. Das werden wir auch im folgenden machen.

THEOREM (Charakterisierung Holomorphie). Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann sind aequivalent:

- (i) Es ist f holomorph.
- (ii) Es kann f um jeden Punkt $p \in \Omega$ in eine Potenzreihe entwickelt werden und diese konvergiert auf $B_R(p)$ fuer jedes $R > 0$ mit $B_R(p) \subset \Omega$. 'f ist analytisch.'
- (iii) Es gilt fuer jedes $p \in \Omega$ und $R > 0$ mit $B_R(p) \subset \Omega$ die Formel

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - q} d\zeta$$

fuer jedes $q \in U_R(p)$. 'Cauchy-Integralformel.'

Bemerkung. Die Formel in (iii) mag verblueffend erscheinen. Fuer $p = q$ kann sie aber leicht als Folgerung aus dem Beispiel gesehen werden. Ist naemlich f durch ein Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n$ gegeben, so folgt fuer $R > 0$ kleiner als der Konvergenzradius der Potenzreihe sofort

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z - p} dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^{n-1} dz \\ \text{(Potenzreihe glm. konv)} &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} (z - p)^{n-1} dz \\ \text{(Beispiel)} &= a_0 \\ &= f(p). \end{aligned}$$

Beweis. Wir beweisen (ii) \implies (i) und (iii) \implies (ii) vollstaendig und (i) \implies (iii) mittels eines hier nicht bewiesenen wesentlichen Zwischenschrittes.

(ii) \implies (i): Potenzreihen sind differenzierbar (vgl. Analysis I).

(iii) \implies (ii): Wähle $R > 0$ mit $B_R(p) \subset \Omega$. Dann gilt nach (iii) also

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z - q} dz.$$

Wir untersuchen den Integranden in einer *Zwischenrechnung*:

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{z - q} &= \frac{f(z)}{z - p + p - q} \\ &= \frac{f(z)}{(z - p)\left(1 - \frac{q-p}{z-p}\right)} \\ (\text{geom. Reihe}) &= \frac{f(z)}{(z - p)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{q-p}{z-p}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (q-p)^n \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dabei konvergiert die Reihe gleichmaessig in $\partial B_R(p)$ wegen

$$\left| \frac{q-p}{z-p} \right| = \frac{|q-p|}{R} < 1.$$

(Hier folgt die letzte Ungleichung wegen $q \in U_R(p)$. Nach dieser Untersuchung des Integranden und unter Nutzen der gleichmaessigen Konvergenz finden wir also

$$f(q) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z - q} dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (q-p)^n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz.$$

Das ist die gewuenschte Aussage.

(i) \implies (iii): Wir nutzen folgende

Aussage: Sei $s > 0$ mit $q \in B_s(q) \subset U_R(p) \subset B_R(p) \subset \Omega$. Dann gilt

$$\int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z - q} dz = \int_{\partial B_s(q)} \frac{f(z)}{z - q} dz.$$

Beweisskizze fuer die Aussage: (Zeichnungen machen!) Der Beweis erfolgt in mehrere Schritten. Zunaechst zeigt man, dass Kurzvenintegrale ueber Dreieckswege verschwinden, wenn die zugrundeliegende Funktion holomorph ist auf einer Umgebung des Dreiecks. Dieser Beweis ist raffiniert und einfach. Anschließend zeigt man das Verschwinden des Kurvenintegrals ueber Polygonzuege, wenn die zugrundeliegende Funktion holomorph ist auf einer Umgebung des vom Polygonzug eingeschlossenen Gebietes. Daraufhin zeigt man das Verschwinden der Kurvenintegrals ueber beliebige Kurven, die gut durch Polygonzuege approximiert werden koennen, wenn die zugrundeliegende Funktion holomorph ist in einer Umgebung des von der Kurve eingeschlossenen Gebietes. Schliesslich wendet man das an auf die Funktion g mit $g(z) = \frac{f(z)}{z-q}$ auf einer Umgebung von $B_R(p) \setminus U_s(q)$.

Nach der Zwischenaussage gilt

$$\int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz = \int_{\partial B_s(q)} \frac{f(z)}{z-q} dz$$

fuer alle genuegend kleinen $s > 0$. Insbesondere haengt die rechte Seite nicht von einem solchen $s > 0$ ab. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{z-q} dz &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\partial B_s(q)} \frac{f(z)}{z-q} dz \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{f(se^{it} + q)}{se^{it}} i se^{it} dt \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(se^{it} + q) dt \\ (f \text{ stetig}) &= 2\pi i f(q). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Der Beweis liefert sogar eine genaue Darstellung der Koeffizienten a_n in der Potenzreihe, naemlich

$$a_n = \int_{\partial B_R(p)} \frac{f(z)}{(z-p)^{n+1}} dz$$

und das ist unabhängig von $R > 0$ (vorausgesetzt $B_R(p) \subset \Omega$).

FOLGERUNG (Satz von Liouville). Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph und beschränkt. Dann ist f konstant. Insbesondere gilt $f \equiv 0$ falls $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist mit $f(z) \rightarrow 0, z \rightarrow \infty$.

Beweis. Da f auf ganz \mathbb{C} holomorph ist, kann man es in eine Potenzreihe entwickeln mit Konvergenzradius ∞ . Damit folgt also

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

und fuer die a_n gilt

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U_r(0)} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Wählt man $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(t) = re^{it}$ so ergibt sich

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(re^{it})|}{r^n} dt \leq \frac{2\pi \|f\|_\infty}{2\pi r^n} = \frac{\|f\|_\infty}{r^n}$$

fuer alle $r > 0$. Damit folgt dann also $a_n = 0$ fuer alle $n \neq 0$ und damit $f \equiv a_0$.

Zum 'Insbesondere': Aus $f(z) \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$ folgt, dass f beschränkt ist. Damit folgt aus dem schon gezeigten dann $f \equiv \text{constant}$. Wegen $f(z) \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$ muss dann aber gelten $\text{constant} = 0$. □

FOLGERUNG (Fundamentalsatz der Algebra). Jedes nichtkonstante Polynom hat eine Nullstelle (ueber \mathbb{C}).

Beweis. Sei P ein nichtkonstantes Polynom ohne Nullstelle. Dann liefert der Satz von Liouville angewendet auf $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ also $f \equiv 0$. Das ein Widerspruch. \square

Ende des Exkurses Funktionentheorie

← Ende der Vorlesung →

3. Beschraenkte Operatoren

Fuer die angestrebten Betrachtungen zur Lage des Spektrums beschraenkter Operatoren brauchen wir noch ein Lemma, das gar nichts mit Operatoren zu tun hat.

LEMMA (Konvergenz submultiplikativer Folgen). Sei $a : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty)$ submultiplikativ (d.h. es gilt $a_{n+m} \leq a_n a_m$ fuer alle $n, m \in \mathbb{N}$). Dann existiert $\lim_n a_n^{1/n}$ und es gilt

$$\lim_n a_n^{1/n} = \inf_n a_n^{1/n}.$$

Bemerkung. Eine entsprechende Aussage kann man fuer subadditive Funktionen beweisen. Tatsaechlich entsprechend sich subadditive und submultiplikative Abbildungen via Logarithmieren.

Beweis. Sei $\alpha := \inf a_n^{1/n}$. Dann gilt offenbar $\liminf a_n^{1/n} \geq \alpha$. Es bleibt also

$$\limsup a_n^{1/n} \leq \alpha + \varepsilon$$

fuer $\varepsilon > 0$ beliebig zu zeigen. Waehle N mit $a_N^{1/N} < \alpha + \varepsilon$. Dann laesst sich jedes n eindeutig darstellen als $n = Nk + r$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r \leq N - 1$. Es folgt

$$a_n = a_{Nk+r} \leq a_N^k a_r$$

also

$$a_n^{1/n} \leq (a_N^k a_r)^{1/n} = a_N^{k/n} (a_r)^{1/n} \leq a_N^{k/n} C^{1/n}$$

mit $C := \max\{a_r : r = 0, \dots, N - 1\}$. Es gilt dann $k/n \rightarrow 1/N$ fuer $n \rightarrow \infty$ und $C^{1/n} \rightarrow 1$. Damit folgt die Aussage. \square

Ist T ein beschraenkter Operator in einem normierten Raum, so ist die Abbildung

$$a : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty), \quad a_n = \|T^n\|,$$

submultiplikativ (da die Norm submultiplikativ ist). Damit folgt aus dem Lemma dann sofort

$$\lim_n \|T^n\|^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Diese Groesse spielt eine wichtige Rolle und bekommt einen eigenen Namen.

DEFINITION (Spektralradius). Sei E ein normierter Raum und $T \in L(E)$. Dann definiert man den Spektralradius $r(T)$ als

$$r(T) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|T^n\|^{1/n}.$$

Bemerkungen

- Es ist offenbar $r(T) \leq \|T\|$ (da $\|T\| = \|T^1\|^{1/1}$ als Wert im Infimum auftritt).

- Im allgemeinen gilt $r(T) < \|T\|$. Betrachte zum Beispiel auf \mathbb{K}^2 mit T gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Dann gilt $\|T\| \geq |a|$. Eine einfache Induktion zeigt weiterhin

$$T^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2^n} & \frac{an}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\|T^n\| \leq \frac{1}{2^n} (2 + 4|a|^2 n^2)^{1/2}$$

also

$$r(T) \leq 1/2.$$

(Hier wird verwendet, dass fuer den durch eine Matrix $A = (a_{ij})$ beschriebenen Operator auf \mathbb{K}^N mit der Euklidischen Norm die Abschaetzung

$$\|A\| \leq \left(\sum |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

gilt.) Noch stärkeres Auseinanderfallen von Norm und Spektralradius sieht man fuer T auf \mathbb{K}^2 mit Matrix gegeben durch

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Dann gilt $T^n = 0$ fuer $n \geq 2$ und damit $r(T) = 0$ aber $\|T\| = 1$.

- Ist E ein Hilbertraum und T ein normaler Operator (d.h. es gilt $T^*T = TT^*$), so gilt $r(T) = \|T\|$. Das gilt also insbesondere fuer selbstadjungierte und fuer unitaere Operatoren. Der Beweis ist nichttrivial. Wir kommen spaeter darauf zurueck.

THEOREM (Spektrum fuer beschaenkte Operatoren). *Sei E ein Banachraum ueber \mathbb{C} und $T \in L(E)$. Dann ist $\sigma(T)$ nichtleer und kompakt und es gilt*

$$\max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = r(T).$$

Inbesondere ist also $\sigma(T)$ in $B_{r(T)}$ enthalten. Weiterhin ist

$$(T - z)^{-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} T^n \quad (\text{Neumannsche Reihe})$$

absolut konvergent in $\mathbb{C} \setminus B_{r(T)}$.

Zeichnung. $\sigma(T)$ ist kompakt, Teilmenge von $B_{r(T)}$ und schneidet den Rand dieser Kugel. Ausserhalb dieser Kugel laesst es sich in Potenzreihe entwickeln.

Bemerkung - Bezeichnung Spektralradius. Es ist also der Spektralradius der Radius des kleinsten Kreises um 0, der das Spektrum enthaelt. Das erklart die Bezeichnung.

Beweis. Sei $r := r(T)$.

Behauptung: Fuer $z \notin B_r$ gilt $z \in \rho(T)$ und die angegebenen Formel der Neumannschen Reihe.

Beweis: Das folgt aus der Neumannschen Reihe. Fuer $|z| > r$ ist naemlich

$$\limsup_n \left\| \left(\frac{1}{z} T \right)^n \right\|^{1/n} = \frac{1}{|z|} r < 1$$

und damit gilt dann

$$(T - z) = -z + T = -z \left(1 - \frac{1}{z} T \right) = -z \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{z} \right)^n$$

mit absolut konvergenter Reihe.

Behauptung: Es ist $\sigma(T)$ kompakt mit $\sigma(T) \subset B_r$.

Beweis: Wir wissen schon, dass $\sigma(T)$ abgeschlossen ist. Nach der vorangehenden Behauptung ist es in B_r enthalten, also insbesondere beschaenkt. Damit folgt die gewuenschte Aussage.

Behauptung: $\sigma(T) \neq \emptyset$:

Beweis: Idee. Satz von Liouville anwenden auf die beschaenkte analytische Funktion R !

Kleines Problem: Es nimmt R nicht Werte in \mathbb{C} an sondern in $L(E)$. Das wird durch Nachschalten eines stetigen Funktionales gelost.

Angenommen $\sigma(T) = \emptyset$, also $\rho(T) = \mathbb{C}$. Dann ist $R = R_T$ auf ganz \mathbb{C} analytisch. Dann ist fuer jedes $\varphi \in L(E)'$ die Funktion

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \mapsto \varphi(R(z))$$

analytisch. Weiterhin gilt nach dem schon bewiesenen fuer $|z| > r$

$$\phi(z) = \frac{-1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} \varphi(T^n).$$

Das impliziert

$$|\phi(z)| \leq \frac{1}{|z|} \sum_{n=0}^{\infty} \|\varphi\| \frac{\|T^n\|}{|z|^n} \leq \frac{1}{|z|} \|\varphi\| \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{1}{|z|} 2 \|\varphi\|.$$

fuer $|z| > 2\|T\|$. Das liefert

$$|\phi(z)| \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty.$$

Nach dem Satz von Liouville folgt also $\phi \equiv 0$. Da φ beliebig war folgt aus Hahn-Banach dann $R \equiv 0$. Widerspruch da $R(z)$ immer injektiv ist.

Behauptung: $\max\{|z| : z \in \sigma(T)\} = r$: Sei $r_0 := \max\{|z| : z \in \sigma(T)\}$. (Das Maximum existiert, da $\sigma(T)$ abgeschlossen und nach dem schon bewiesenen nichtleer und beschaenkt also kompakt ist). Nach dem schon bewiesenen gilt $r_0 \leq r$.

Beweis: Idee. R ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus B_{r_0}$ und in $\mathbb{C} \setminus B_r$ durch die Potenzreihe $-\sum \frac{1}{z^{n+1}} T^n$ gegeben. Da Potenzreihen 'maximal' existieren, muss $r = r_0$ sein.

Hier sind die Details: Wir waehlen wieder $\varphi \in L(E)'$ und betrachten

$$\phi : \rho(T) \rightarrow \mathbb{C}, \phi(z) = \varphi(R(z)).$$

Dann ist ϕ analytisch in $\rho(T) \supset \mathbb{C} \setminus B_{r_0}$. Insbesondere ist also das Kurvenintegral

$$\int_{\partial B_s(0)} z^m \phi(z) dz \quad (I)$$

unabhaengig von $s > r_0$.

← Ende der Vorlesung

Fuer $s > r$ koennen wir (I) mittels der schon bewiesenen Potenzreihe leicht berechnen zu

$$\begin{aligned} I &= \int_{\partial B_s(0)} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{z^{n+1}} \varphi(T^n) dz \\ (\text{glm. konvergent}) &= - \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{\partial B_s(0)} z^{m-n-1} dz \right) \varphi(T^n) \\ (s.o.) &= -2\pi i \varphi(T^m). \end{aligned}$$

Fuer $s > r_0$ koennen wir das Integral ausserdem auch abschaetzen:

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2\pi s s^m \sup_{|z|=s} |\phi(z)| \\ &\leq 2\pi s^{m+1} \|\varphi\| \sup_{|z|=s} \|R(z)\| \\ &= 2\pi C_s \|\varphi\| s^{m+1} \end{aligned}$$

mit $C_s := \sup_{|z|=s} \|R(z)\|$.

Fasst man das zusammen, so ergibt sich

$$|\varphi(T^m)| = \frac{|I|}{2\pi} \leq C_s s^{m+1} \|\varphi\|.$$

Da $\varphi \in L(E)'$ beliebig war, folgt aus dem Satz von Hahn-Banach also

$$\|T^m\| \leq C_s s^{m+1}.$$

Bilden des lim sup und der m -ten Wurzel liefert fuer festes $s > r_0$ also

$$r(T) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{1/m} \leq \limsup_{m \rightarrow \infty} C_s^{1/m} s^{(m+1)/m} = s.$$

Da $s > r_0$ beliebig war, folgt

$$r \leq r_0.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkungen - Diskussion der Voraussetzungen des Theorems.

- Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ so kann das Spektrum natuerlich leer sein. Betrachte zum Beispiel $E = \mathbb{R}^2$ und T eine 'Drehung um die z -Achse um 90° ', d.h. T ist gegeben durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Dann hat T keinen reellen Eigenwert.

- Der Beweis des nichtleeren Spektrums nutzt Funktionentheorie. Tatsächlich wird fuer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ dazu schon im endlichdimensionalen Fall Funktionentheorie verwendet, wenn man verwendet, dass das charakteristische Polynom eine Nullstelle hat.
- Fuer unbeschraenkte Operatoren kann das Spektrum auch ueber \mathbb{C} leer sein: Sei $E = C([0, 1])$ und

$$D(T) = \{f \in C([0, 1]) : \text{es existiert } g \in C([0, 1]) \text{ mit } f(t) = \int_0^t g(s) ds\}$$

$$Tf = g.$$

Es ist also $Tf = f'$ und man kann die Theorie der gewoehnlichen Differentialgleichungen nutzen um $(T - z)f = h$ zu loesen. Das fuehrt auf

$$\begin{aligned} (T - z)^{-1}h(x) &= e^{zx} \int_0^x e^{-zt} h(t) dt \\ &= \int_0^x (h(t) + ze^{zt} \int_0^t e^{-zs} h(s) ds) dt \end{aligned}$$

Beweis: (Skizze) Die Gueltigkeit der zweiten Gleichung folgt einfach durch Partielles Integrieren (mit $u = e^{-zt}$ und $v' = h$). Die rechte Seite ist offenbar ein linearer Operator von h . Anwenden von $(T - z)$ auf die rechte Seite unter Ausnutzen der beiden Darstellungen liefert leicht die Aussage.

In diesem Beispiel wird die Theorie der linearen Differentialgleichungen genutzt, um eine Problem zu loesen. Die Eindeutigkeit ergibt sich letzten Endes aus der Wahl der Randbedingung d.h. der Wahl von $D(T)$.

Beispiel - Spektralradius fuer normale Operatoren im Hilbertraum.

Sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ gegeben. Dann gilt

$$\|T\| = \|T^*\| \text{ und } \|TT^*\| = \|T^*T\| = \|T\|^2.$$

Die erste Aussage kennen wir schon. Fuer die zweite Aussage reicht es dann $\|T^*T\| = \|T\|^2$ zu beweisen. Wir zeigen zwei Ungleichungen.

\leq : Das ist klar.

\geq : Nach Cauchy-Schwarz gilt

$$\|T^*T\| \geq \sup\{|\langle T^*Tx, x \rangle| : \|x\| \leq 1\} = \|T\|^2.$$

Sei nun T ein ein normaler Operator. Dann gilt also

$$TT^* = T^*T.$$

Beispiele sind selbstadjungierte und unitaere Operatoren. Dann zeigt eine einfache Induktion sogar folgende Aussage

$$\|(T^*T)^{2^n}\| = \|T\|^{2^{n+1}}$$

fuer alle natuerlichen Zahlen n . Damit koennen wir schließen

$$\|T^{2^n}\|^2 = \|(T^{2^n})^*T^{2^n}\| = \|(T^*T)^{2^n}\| = \|T\|^{2^{n+1}}.$$

Das liefert dann

$$\|T^{2^n}\| = \|T\|^{2^n}$$

und damit folgt

$$r(T) = \|T\|.$$

KAPITEL 3

Adjungierte Operatoren

In diesem Abschnitt lernen wir die adjungierten Operatoren kennen. Die Grundidee ist dass gilt

$$(\varphi, Tx) = (T^*\varphi, x)$$

fuer alle x aus dem Raum und φ aus dem Dualraum. Diese Konzepte koennen in allgemeinen topologischen Vektorraeumen definiert werden. Wir beschraenken uns aber auf Banachraeume. Fuer Hilbertraeume sind uns entsprechende Betrachtungen (fuer beschraenkte Operatoren) schon vertraut. Zum besseren Verstaendnis ist es sinnvoll, sich an das Vorgehen im Hilbertraum zu erinnern: Fuer ein stetiges T ist

$$x \mapsto \langle y, Tx \rangle$$

stetig und damit folgt aus dem Lemma von Riesz die Existenz eines \hat{y} mit $\langle \hat{y}, x \rangle = \langle y, Tx \rangle$ fuer alle x .

Wir beginnen mit etwas **Notation**. Ist E ein topologischer Vektorraum mit Dualraum E' , so bezeichnen wir die Auswerten eines $\varphi \in E'$ an der Stelle $x \in E$ mit (φ, x) d.h.

$$(\varphi, x) := \varphi(x).$$

Diese Darstellung hat zwei Vorteile: Sie betont die symmetrische Rolle von φ und x und sie unterstreicht die Analogie zu Betrachtungen im Hilbertraum.

1. Adjungierte Operatoren in Banachraeumen

Seien E und F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F (d.h. es gibt einen Unterraum $D = D(T)$ von E , der durch T linear nach F abgebildet wird).

Ein linearer Operator S von F' nach E' heisst *formal zu T adjungiert*, wenn gilt

$$(S\varphi, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $\varphi \in D(S) \subset F'$ und $x \in D(T)$. (Zeichnung.) Dann ist

$$S\varphi|_D = \varphi \circ T : D \longrightarrow \mathbb{K}$$

stetig und damit eindeutig stetig auf \overline{D} fortsetzbar. Diese Fortsetzung wird mit $\overline{\varphi \circ T}$ bezeichnet. Ist T dicht definiert (d.h. $D = D(T)$ dicht in E), so ist also $\psi := S\varphi$ durch φ (und T) eindeutig bestimmt, in dem Sinne, dass es hoechstens ein ψ mit der Eigenschaft

$$(\psi, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $x \in D$ gibt.

Sei nun T dicht definiert. Dann definiert man den Operator T^* durch

$$D(T^*) := \{\varphi \in F' : D \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, Tx) \text{ stetig}\}$$

$$T^* \varphi := \overline{\varphi \circ T}.$$

Alternativ kann man auch schreiben

$$D(T^*) := \{\varphi \in F' : \exists \psi \in E' : (\psi, x) = (\varphi, Tx) \text{ fuer alle } x \in E\},$$

$$T^* \varphi := \psi.$$

Dann ist T^* ein linearer Operator von F' nach E' (leicht...) Nach Konstruktion gilt

- T^* ist zu T formal adjungiert d.h. $(\varphi, Tx) = (T^* \varphi, x)$ fuer alle $x \in D$ und $\varphi \in D(T^*)$.
- Ist S zu T formal adjungiert so ist S eine Einschraenkung von T^* .

Es ist also T^* der maximale zu T adjungierte Operator. Wir werden ihn im folgenden nur als den adjungierten Operator bezeichnen. Ist S eine Einschraenkung von T so schreiben wir auch $S \subset T$. Damit gilt insbesondere:

PROPOSITION (Charakterisierung adjungierter Operator). *Seien E, F Banachraeume und T ein linearer Operator von E nach F , der dicht definiert ist. Dann ist der Operator S von F' nach E' genau dann der adjungierte von T , wenn gilt*

- S ist zu T formal adjungiert. ($\iff S \subset T^*$)
- $D(T^*) \subset D(S)$.

Hat man es mit beschraenkten Operatoren zu tun, so braucht man sich keine Sorgen zu machen ;-)

THEOREM. *Sind E, F Banachraeume und $T \in L(E, F)$. Dann gehoert T^* zu $L(F', E')$ und es gilt $\|T^*\| = \|T\|$. In diesem Fall ist T^* der einzige zu T formal adjungierte auf ganz F' definierte Operator.*

Beweis. Wir berechnen T^* : Es ist

$$\varphi \circ T : E \longrightarrow \mathbb{K}$$

fuer alle $\varphi \in F'$ stetig. Also gilt

$$(\varphi \circ T, x) = (\varphi, Tx)$$

fuer alle $\varphi \in F'$ und $x \in E$. Damit folgt

$$D(T^*) = F', \quad T^* \varphi = \varphi \circ T.$$

Inbesondere gilt

$$\begin{aligned} \|T^*\| &= \sup \{ \|T^* \varphi\| : \varphi \in F', \|\varphi\| = 1 \} \\ &= \sup \{ |\varphi \circ T(x)| : \|\varphi\| = 1, \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ |(\varphi, Tx)| : \|\varphi\| = 1, \|x\| = 1 \} \\ \text{(Hahn - Banach)} &= \sup \{ \|Tx\| : \|x\| = 1 \} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Damit ist T^* stetig mit $\|T^*\| = \|T\|$. □

Beispiel - Matrizen. Sei $A : \mathbb{K}^N \longrightarrow \mathbb{K}^M$ linear gegeben durch die Matrix (a_{ij}) bzgl. Basen e_i und d_j . Dann ist der adjungierte Operator bzgl. der dualen Basen gegeben durch die Matrix a^* mit $a^*(i, j) = a(j, i)$. (Bew. Uebung, Nachrechnen).

Beispiel - Multiplikationsoperatoren in L^p . Sei (X, \mathcal{B}, μ) ein σ -endlicher Massraum und $t : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar. Sei fuer $p \in [1, \infty]$ der Operator $M_t^{(p)}$ der maximale Operator der Multiplikation auf $L^p(X, \mu)$. Fuer $p \in [1, \infty)$ ist $M_t^{(p)}$ dicht definiert und der adjungierte ist gegeben durch $M_t^{(q)}$ (d.h. den maximalen Operator der Multiplikation mit t auf $L^q(X, \mu)$) fuer $1/q + 1/p = 1$.

Bew. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen.

Es ist $M_t^{(p)}$ dicht definiert: Sei (X_n) eine aufstigeigende Folge von messbaren Mengen mit endlichem Mass und $X = \cup X_n$. Sei

$$Y_n := X_n \cap \{x : |t(x)| \leq n\}.$$

Dann sind die Y_n messbar, aufsteigend mit endlichem Mass und $X = \cup Y_n$. Dann ist die Menge

$$L := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ beschränkt und es gibt } N \text{ mit } f = 0 \text{ in } Y_N^c\}$$

dicht in L^p und in $D(M_t^{(p)})$ enthalten.

Es ist $M_t^{(q)}$ formal zu $M_t^{(p)}$ adjungiert: Das ist klar.

Es gilt $D((M_t^{(p)})^) \subset D(M_t^{(q)})$:* Sei $f \in D((M_t^{(p)})^*) \subset L^q(X, \mu)$. Damit kann man also

$$D(M_t^{(p)}) \ni g \mapsto (f, M_t g) = \int_X f(M_t g) d\mu = \int_X (tf)g d\mu$$

zu einem beschränkten Funktional auf L^p fortsetzen. Daher gibt es also ein $\tilde{f} \in L^q(X, \mu)$ mit

$$\int_X (tf)g d\mu = \int_X \tilde{f}g d\mu$$

fuer alle $g \in L$. Damit folgt leicht $tf = \tilde{f}$ und es gehoert also f zu $D(M_t^{(q)})$. (Es ist eine gute Uebung sich den - etwas einfacheren Beweis fuer ℓ^p -Raume zu ueberlegen.).

Beispiel - Integraloperatoren. Seien (X, μ) und (Y, ν) Massraeume mit endlchem Mass. Sei $K : Y \times X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar und beschränkt. Dann ist der zugehoerige Integraloperator

$$K : L^p(X, \mu) \rightarrow L^p(Y, \nu), Kf(y) = \int_X k(y, x)f(x)d\mu(x)$$

beschränkt mit

$$\|K\| \leq \|k\|_\infty m(X)^{1/q} m(Y)^{1/p}.$$

Der adjungierte Operator ist gegeben durch

$$\tilde{K} : L^q(Y, \nu) \rightarrow L^q(X, \mu), \tilde{K}g(x) = \int \tilde{k}(x, y)g(y)d\nu(y)$$

mit $\tilde{k}(x, y) = k(y, x)$.

←—————→
Ende der Vorlesung

Beweis. Man sieht leicht, dass $Kf(y)$ tatsaechlich fuer alle $y \in Y$ existiert. Die Aussage zur Beschraenktheit folgt mit einer einfachen Hoelderabschaetzung:

$$\begin{aligned}
 \int_Y |Kf(y)|^p dy &= \int_Y \left| \int_X k(y,x)f(x)dx \right|^p dy \\
 \text{(Hoelder)} &\leq \int_Y \left| \left(\int_X |k(y,x)|^q dx \right)^{1/q} \left(\int_X |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \right|^p dy \\
 &\leq \|f\|_p^p \int_Y \left(\int_X |k(y,x)|^q dx \right)^{p/q} dy \\
 &\leq \|f\|_p^p m(Y) (C^q m(X))^{p/q} \\
 &= m(Y) C^p m(X)^{p/q}.
 \end{aligned}$$

Ziehen der p -ten Wurzel liefert dann

$$\|Kf\|_p \leq \|f\|_p m(Y)^{1/p} C m(X)^{1/q}.$$

Analog sieht man auch, dass der Operator \tilde{K} beschraenkt und ueberall definiert ist. Da K und \tilde{K} offenbar formal adjungiert sind, folgt dann die letzte Aussage.

Fuer die folgende Charakterisierung fuehren wir noch etwas Notation ein: Ist V ein Unterraum eines normierten Raumes E so definieren wir den Annilator von V als

$$V^\perp := \{\varphi \in E' : (\varphi, v) = 0 \text{ fuer alle } v \in V\}.$$

Offenbar ist V^\perp abgeschlossen.

Bemerkung. Es haengt V^\perp davon ab, welcher umgebenden Raum H gewaehlt ist, d.h. $V^\perp = V^{\perp, E}$.

Ausserdem erinnern wir an die kanonische Identifikation von $E' \times F'$ mit $(E \times F)'$ (Uebung) via

$$(\varphi, \psi) \mapsto ((x, y) \mapsto \varphi(x) + \psi(y)).$$

PROPOSITION. Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F . Dann ist der Graph von T^* gegeben durch

$$G(T^*) = \{(\varphi, \psi) \in F' \times E' : (\psi, x) - (\varphi, Tx) = 0 \text{ fuer alle } x \in D(T)\} = (JG(T))^\perp$$

mit $J(x, y) = (-y, x)$. Weiterhin gilt

$$\text{Ker}(T^*) = \{\varphi \in F' : \varphi(y) = y \text{ fuer alle } y \in R(T)\} = R(T)^\perp.$$

Insbesondere ist $R(T)$ dicht genau dann, wenn T^* injektiv ist.

Beweis. Zum Graphen von T^* : Die erste Gleichheit ist klar. Die zweite Gleichheit folgt direkt (nach Identifizieren von $(E \times F)'$ mit $E' \times F'$:

$$\begin{aligned}
 (\psi, x) - (\varphi, Tx) &= ((\varphi, \psi), (-Tx, x)) \\
 &= ((\varphi, \psi), J(x, Tx)).
 \end{aligned}$$

Zur Aussage ueber den Kern: Nach dem schon bewiesenen ueber den Graphen von T^* gilt

$$\text{Ker}(T^*) = \{\varphi \in F' : (\varphi, 0) \in G(T^*)\} = \{\varphi : (\varphi, Tx) = 0 \text{ fuer alle } x \in D(T)\}.$$

Das liefert die Aussage.

Das 'Insbesondere' ist nun klar. \square

FOLGERUNG. *Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.*

Beweis. Das ergibt sich aus der vorangehenden Proposition, da ein Annihilator immer abgeschlossen ist. \square

Bemerkung. Sei T ein dicht definierter Operator zwischen Banachraeumen. Dann ist $D(T^*)$ ueberall definiert genau dann, wenn T beschraenkt ist.

(Bew. Ist T beschraenkt, so koennen wir es (wenn noetig) zu einem beschraenkten Operator auf dem ganzen Banachraum fortsetzen und der Adjungierte der Fortsetzung stimmt mit dem Adjungierten von T ueberein.

Ist $D(T^*)$ ueberall definiert, so ist nach der vorangegangenen Folgerung und dem Satz vom abgeschlossenen Graphen der Operator T^* beschraenkt. Damit ist dann auch (kleine Rechnung) T beschraenkt.

FOLGERUNG. *Sei T ein dicht definierter Operator von E nach F . Sind T und T^* injektiv, so ist T^{-1} dicht definiert und es gilt $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$.*

Beweis. Da T^* injektiv ist, ist $R(T)$ dicht. Also ist T^{-1} dicht definiert und $(T^{-1})^*$ existiert.

$(T^*)^{-1} \subset (T^{-1})^*$: Sei $\psi \in D((T^*)^{-1}) = R(T^*)$. Dann gilt

$$\psi = T^* \varphi$$

fuer ein geeignetes $\varphi \in D(T^*)$ geeignet. Damit folgt fuer alle $y = Tx \in R(T) = D(T^{-1})$ dann

$$(\psi, T^{-1}y) = (\psi, x) = (T^* \varphi, x) = (\varphi, Tx) = (\varphi, y).$$

Damit folgt $\psi \in D((T^{-1})^*)$ mit $(T^{-1})^* \psi = \varphi$.

$D((T^{-1})^*) \subset D((T^*)^{-1})$. Sei $\psi \in D((T^{-1})^*)$. Zu zeigen: $\psi \in D((T^*)^{-1}) = R(T^*)$.

Sei $\varphi := (T^{-1})^* \psi = \overline{\psi \circ T^{-1}}$. (Wenn die von uns angestrebte Aussage ueberhaupt muss dies das richtige φ sein.) Dann gilt:

$$\psi = \overline{\psi \circ T^{-1} \circ T} = \overline{\varphi \circ T} = T^* \varphi \in R(T^*).$$

Das beendet den Beweis. \square

Wir beenden den Abschnitt mit einigen Regeln zum Rechnen mit adjungierten Operatoren.

PROPOSITION. *Gilt $S \subset T$ so folgt $T^* \subset S^*$.*

Beweis. Das ist einfach: Sei $\varphi \in D(T^*)$. Dann gilt

$$(\varphi, Sx) = (\varphi, Tx) = (T^* \varphi, x)$$

fuer alle $x \in D(S)$ und damit $\varphi \in D(S^*)$ und $S^* \varphi = T^* \varphi$.) \square

PROPOSITION. Seien S, T Operatoren zwischen Banachraeumen (so dass die folgenden Operatoren definiert sind).

(a) Ist $S + T$ dicht definiert, so gilt

$$(S + T)^* \supset S^* + T^*.$$

(b) Ist ST dicht definiert, so gilt $(ST)^* \supset T^*S^*$.

Beweis. (a) Sei $\varphi \in D(S^* + T^*) = D(S^*) \cap D(T^*)$. Dann ist die Abbildung

$$D(S + T) = D(S) \cap D(T) \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, (T + S)x)$$

gegeben durch

$$x \mapsto (\varphi, (T+S)x) = (\varphi, Tx) + (\varphi, Sx) = (T^*\varphi, x) + (S^*\varphi, x) = (T^*\varphi + S^*\varphi, x).$$

Damit ist diese Abbildung stetig und es gilt $\varphi \in D((S + T)^*)$ sowie $(T + S)^*\varphi = T^*\varphi + S^*\varphi$.

(b) Sei $\varphi \in D(T^*S^*) = \{\varphi \in D(S^*) : S^*\varphi \in D(T^*)\}$. Dann ist die Abbildung

$$D(ST) = \{x \in D(T) : Tx \in D(S)\} \longrightarrow \mathbb{K}, x \mapsto (\varphi, STx)$$

gegeben durch

$$x \mapsto (\varphi, STx) = (S^*\varphi, Tx) = (T^*(S^*\varphi), x).$$

Damit ist die Abbildung stetig und es gilt $\varphi \in D((ST)^*)$ und $(ST)^*\varphi = T^*(S^*\varphi)$. \square

FOLGERUNG. Fuer beschaenkte Operatoren S, T gilt

$$(S + T)^* = S^* + T^*$$

und

$$(ST)^* = T^*S^*.$$

Beweis. Das folgt aus der vorigen Proposition, da die 'kleineren' Operatoren ueberall definiert sind. \square

2. Adjungierte Operatoren in Hilbertraeumen

In diesem Abschnitt untersuchen wir adjungierte Operatoren im Hilbertraum. In diesem Fall koennen wir nach dem Riesz'schen Darstellungssatz den Dualraum mit dem Hilbertraum selber identifizieren. Entsprechend ist der Hilbertraum adjungierter Operator, dann eine Abbildung zwischen den Ursprungshilbertraeumen (in der anderen Richtung). Da die Identifikation eines Hilbertraumes mit seinem Dualraum ANTIlinear ist, treten im Vergleich zu den Betrachtungen des vorigen Abschnittes an manchen Stellen zusaetzliche Konjugationen auf. Ansonsten geht alles wie gehabt. Im Falle von Hilbertraeumen verwendet man ueblicherweise den Hilbertraum Adjungierten.

Seien H_1 und H_2 Hilbertraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2 . Dann ist der Hilbertraum-adjungierte T_{HR}^* definiert durch

$$D(T_{HR}^*) := \{y \in H_2 : \text{es existiert } x^* \in H_1 \text{ mit } \langle x^*, x \rangle_1 = \langle y, Tx \rangle_2 \text{ fuer alle } x \in H_1\}.$$

$$T_{HR}^*y = x^*.$$

Bemerkung. Jeder Hilbertraum ist auch ein Banachraum. Der im vorigen Abschnitt definierte Adjungierte liefert dann:

$$D(T^*) = \{\psi \in H'_2 : \text{es existiert ein } \varphi \in H'_1 \text{ mit } (\psi, Tx) = (\varphi, x) \text{ fuer alle } x \in D(T)\}.$$

Der Hilbertraumadjungierte entsteht dann nach Identifikation von H'_1 mit H_1 und H'_2 mit H_2 via Riesz'schem Darstellungssatz. Da beide Identifikationen antilinear sind, ist dann der resultierende Operator linear.

Notation. Wir werden im Kontext von Hilbertraeumen nur den Hilbertraumadjungierten verwenden und lassen dann das Subskript HR weg.

Erinnerung: Sind H_1 und H_2 Hilbertraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$, so ist auch $H_1 \times H_2$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$\langle (u, v), (r, s) \rangle := \langle u, r \rangle_1 + \langle v, s \rangle_2.$$

(Nachrechnen!). Wir werden verschiedentlich folgende einfache Beobachtung verwenden: Ist U eine unitaere Abbildung zwischen Hilbertraeumen, so gilt $U(V^\perp) = (UV)^\perp$ fuer jeden Unterraum V des Ausgangsraumes.

Damit koennen wir nun den adjungierten Operator charakterisieren (vgl. allgemeine Satz oben).

THEOREM (Charakterisierung adjungierter Operator). *Seien H_1 und H_2 Hilbertraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2 . Dann gilt*

$$G(T^*) = (UG(T))^\perp = U(G(T)^\perp)$$

mit $U : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1, U(x, y) = (y, -x)$. Insbesondere gilt

$$\text{Ker}(T^*) = R(T)^\perp.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} G(T^*) &= \{(y, x) \in H_2 \times H_1 : \langle y, Tz \rangle_2 = \langle x, z \rangle_1 \text{ fuer alle } (z, Tz) \in G(T)\} \\ &= \{(y, x) \in H_2 \times H_1 : \langle (y, x), (Tz, z) \rangle = 0 \text{ fuer alle } (z, Tz) \in G(T)\} \\ &= \{(y, x) \in H_2 \times H_2 : (y, x) \perp UG(T)\} \\ &= (UG(T))^\perp. \end{aligned}$$

Da U offenbar unitaer ist, folgt auch die weitere Gleichung.

Das 'Insbesondere' folgt sofort aus dem ersten Teil: Denn $T^*x = 0$ gilt genau, dann wenn

$$\langle (x, 0) \perp UG(T),$$

also

$$\langle x, Tz \rangle = 0$$

fuer alle $z \in D(T)$. □

FOLGERUNG. *Jeder adjungierte Operator ist abgeschlossen.*

THEOREM (Injektivitaet von T^*). *Seien H_1 und H_2 Hilbertraeume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$. Sei T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2 . Ist T injektiv mit dichtem Bild, so ist T^* injektiv und es gilt $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.*

Beweis. Da $R(T)$ dicht ist, folgt (aus dem vorigen Satz) $N(T^*) = R(T)^\perp = \{0\}$ und T^* ist injektiv. Sei

$$V : H_1 \times H_2 \longrightarrow H_2 \times H_1, (x, y) \mapsto (y, x).$$

Dann gilt also $G(T^{-1}) = VG(T)$. Sei U wie im vorigen Satz. Dann gilt (Nachrechnen) $U^{-1}V = V^{-1}U$. Wir wenden nun den vorigen Satz an auf T^{-1} . Dabei werden dann die Rollen von H_1 und H_2 vertauscht und die Abbildung U wird durch U^{-1} ersetzt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} G((T^{-1})^*) &= U^{-1}(G(T^{-1})^\perp) \\ &= U^{-1}((VG(T))^\perp) \\ &= U^{-1}V(G(T)^\perp) \\ (U^{-1}V = V^{-1}U) &= V^{-1}UG(T)^\perp \\ (\text{voriger Satz}) &= V^{-1}G(T^*) \\ &= G((T^*)^{-1}). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. \square

Erinnerung. (Uebung) Ein Operator T heisst *abschließbar*, wenn er eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. In diesem Fall gibt es eine kleinste abgeschlossene Fortsetzung und diese wird mit \overline{T} bezeichnet. Es gilt

$$G(\overline{T}) = \overline{G(T)}.$$

(Die Abschließbarkeit von T bedeutet gerade, dass $\overline{G(T)}$ ein Graph ist, d.h. ein Element $(0, y)$ genau, dann enthaelt, wenn $y = 0$ gilt.)

THEOREM. Seien H_1 und H_2 Hilberräume mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ und T ein dicht definierter Operator von H_1 nach H_2 . Dann ist T genau dann abschließbar, wenn T^* dicht definiert ist. In diesem Fall gilt $T^{**} = \overline{T}$.

Beweis. Ist T^* dicht definiert, so existiert T^{**} , ist abgeschlossen als adjungierter und eine Fortsetzung von T . Insbesondere gilt dann $\overline{T} \subset T^{**}$.

Sei T abschließbar. Sei $x \in D(T^*)^\perp$. Dann gilt natuerlich $(x, 0) \perp G(T^*)$. Damit folgt aus dem vorvorigen Satz

$$(0, x) \in U^{-1}G(T^*)^\perp = U^{-1}(UG(T))^\perp = U^{-1}\overline{UG(T)} = G(\overline{T}).$$

(Hier: Erste Gleichheit wegen $(x, 0) \perp G(T^*)$ und Def von U , zweite Gleichheit nach vorvorigem Satz, dritte Gleichheit nach ueblichem Schluss.) Damit folgt $x = 0$ (da Graph!).

Zur letzten Aussage: Es gilt nach zweimaliger Anwendung des vorvorigen Satz

$$G(T^{**}) = U^{-1}G(T^*)^\perp = U^{-1}(UG(T)^\perp)^\perp = G(T)^\perp = \overline{G(T)}.$$

\square

Bemerkung. Die Aussage bedeutet insbesondere, dass der Adjungierte eines abgeschlossenen Operator automatisch dicht definiert ist.

3. Normale Operatoren im Hilbertraum

In diesem Abschnitt betrachten wir Hilbertraeume und schraenken wir uns auf die Situation $H_1 = H_2 = H$ ein. Dann gibt es eine besonders wichtige Klasse von Operatoren.

DEFINITION. Sei H ein Hilbertraum. Ein dicht definierter Operator von H nach H heißt normal, wenn gilt

- $D(T) = D(T^*)$ und
- $\|Tx\| = \|T^*x\|$ fuer alle $x \in D(T) = D(T^*)$.

Bemerkungen.

- Gehoert T zu $L(H)$, so ist T genau dann normal, wenn $TT^* = T^*T$ gilt. (Uebung).
- Wichtige Beispiele beschaenktter normaler Operatoren sind unitaere und selbstadjungierte Operatoren.

FOLGERUNG. Jeder normale Operator ist abgeschlossen.

Beweis. Wir wissen schon, dass jeder adjungierte Operator abgeschlossen ist. Nach Konstruktion gilt fuer einen normalen Operator aber $D(T) = D(T^*)$ und $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{T^*}$. Damit folgt die Aussage. \square

LEMMA (Charakterisierung Spektrum normaler Operatoren). Sei T ein normaler Operator im Hilbertraum H . Dann sind fuer $\lambda \in \mathbb{C}$ aquivalent:

- (i) $\lambda \in \rho(T)$.
- (ii) Es existiert ein $c > 0$ mit $\|(T - \lambda)x\| \geq c\|x\|$ fuer alle x in H .

Insbesondere gilt also $\lambda \in \sigma(T)$ genau dann, wenn eine Folge (x_n) in $D(T)$ existiert mit $\|x_n\| = 1$ und $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Beweis. Die Implikation (i) \implies (ii) ist klar. Wir zeigen die andere Implikation. Ist T normal, so ist auch $T - \lambda$ normal und es folgt

$$\text{Ker}(T - \lambda) = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}).$$

Damit folgt dann aus der allgemeinen Theorie

$$\text{Ran}(T - \lambda)^\perp = \text{Ker}(T^* - \bar{\lambda}) = \text{Ker}(T - \lambda).$$

Es ist also $T - \lambda$ genau dann injektiv, wenn es dichtes Bild hat. Damit folgt die gewuenschte Aussage einfach (vgl. Betrachtungen zum Spektrum in einem vorigen Kapitel).

Das 'Insbesondere' folgt sofort aus der ersten Aussage. \square

Bemerkung. Das vorige Lemma besagt gerade, das Spektrum eines normalen Operators T gerade aus *Fasteigenwerten* oder *approximatiiven Eigenwerte* besteht, d.h. aus $E \in \mathbb{C}$ fuer die zu jedem $\varepsilon > 0$ ein normiertes x , der *Fasteigenvektor*, existiert mit

$$\|(T - E)x\| \leq \varepsilon.$$

Eine besonders wichtige Klasse normaler Operatoren fuehren wir jetzt ein.

←
Ende der Vorlesung

DEFINITION. *Ein Operator T im Hilbertraum heisst selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt.*

Beispiel - Multiplikationsoperatoren Sei (X, μ, \mathcal{B}) ein σ -endlicher Massraum und $t : X \rightarrow \mathbb{C}$ messbar und M_t der maximale Operator der Multiplikation mit t in $L^2(X, \mu)$. Dann ist der (Hilbertraum)adjungierte von M_t gegeben durch $M_{\bar{t}}$ (Uebung; vgl. Diskussion des Banachraumadjungierten oben). Damit sieht man leicht, dass M_t normal ist. Es ist M_t selbstadjungiert genau dann, t fast ueberall reellwertig ist. Das Spektrum von M_t ergibt sich (siehe oben) als

$$\sigma(M_t) = \text{wesentlicher Wertebereich von } t.$$

Bemerkung. Ein tiefes Resultat (Spektralsatz) besagt, dass jeder normale Operator unitaer equivalent zu einem Multiplikationsoperator ist. Damit sind dann Multiplikationsoperatoren DIE Beispiele von normalen Operatoren. Wir werden in dieser Vorlesung den Spektralsatz nicht vollstaendig beweisen (aber einige Schritte in diese Richtung machen).

Etwas zum Laplaceoperator im \mathbb{R}^N

Wir kennen schon den Laplaceoperator

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^N \partial_j^2 f(x)$$

für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nun ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ aber kein normierter Raum (und erst recht kein Hilbertraum). In diesem Abschnitt führen wir den Laplaceoperator auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ ein. Da gar nicht alle Funktionen in L^2 differenzierbar sind, bedarf es dazu einiger Vorbereitungen. Bei diesen Vorbereitungen lernen wir einige Zusammenhänge kennen, die auch in anderem Kontext von Bedeutung sind.¹

1. Exkurs: Falten, Glätten, Approximieren

In diesem Abschnitt diskutieren wir die Dichtheit von verschiedenen Unterräumen in L^p .

THEOREM (Approximationsatz). *Es ist $C_c(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^N)$ für alle $p \in [1, \infty)$.*

Beweis. Wir behandeln nur den Fall $p = 1$. Es reicht zu zeigen, dass jede Funktion der Form $1_{B_R} f$ mit $R > 0$ und $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ durch Funktionen aus $C_c(\mathbb{R}^N)$ approximiert werden kann. Da man Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^N)$ durch Elementarfunktionen, d.h. endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von messbaren Mengen approximieren kann, reicht es dann also zu zeigen, dass für jede messbare Menge A in $B_R(0)$ die Funktion 1_A durch Funktionen in $C_c(\mathbb{R}^N)$ approximiert werden kann.

Um das zu zeigen, wenden wir ein entsprechendes Schlussens gängiges Verfahren an: Wir definieren zunächst das System der 'guten' Mengen (d.h. der Mengen, für die eine entsprechende Approximation gilt). Anschließend zeigen wir, dass dieses System die charakteristischen Eigenschaften der Borel- σ -Algebra erfüllt.

Entsprechend definieren wir

$$\mathcal{B} := \{A \subset B_R(0) \text{ messbar} : \text{es existiert } (\varphi_n) \subset C_c(\mathbb{R}^N) \text{ mit } \varphi_n \rightarrow 1_A \text{ in } L^1\}.$$

Ohne Einschränkung können (und werden) wir von den in Frage stehenden Folgen (φ_n) folgendes annehmen:

- $0 \leq \varphi_n \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Sonst abschneiden.)

¹Man mag den Eindruck haben, dass wir sehr viel Aufwand treiben, um die Laplaceoperator zu definieren. Dazu ist zu sagen, dass es sich erstens bei dem Laplaceoperator nicht um irgendeinen Operator handelt sondern um DEN Operator und dass, zweitens, die erwähnten Zusammenhänge an weiteren Stellen von Interesse sind.

- $\text{supp } \varphi_n \subset B_{R+1}$. (Sonst Multiplizieren mit einem geeigneten φ .)

Wir zeigen, dass \mathcal{B} eine σ -Algebra ist, die alle offenen Teilmengen von $B_R(0)$ enthaelt. Damit muss es dann mit der Einschraenkung der Borel- σ -Algebra auf $B_R(0)$ uebereinstimmen und das liefert nach obiger Diskussion die gewuenschte Dichtheit.

Behauptung. Ist $K \subset B_R(0)$ kompakt, so gehoert es zu \mathcal{B} . Insbesondere gehoert $B_R(0)$ also zu \mathcal{B} .

Bew. Setze

$$d(K, \cdot) : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty), \quad d(K, x) = \inf\{d(k, x) : k \in K\}.$$

Es ist das Infimum ein Minimum (da stetige Funktionen auf Kompakte ihr Minimum annehmen). Es ist $d(K, \cdot)$ Lipschitz-stetig, d.h. es gilt

$$|d(K, x) - d(K, y)| \leq d(x, y)$$

(wie man leicht mittels der Dreiecksungleichung sieht). Betrachte nun

$$\varphi_n := (1 - nd(K, \cdot))_+.$$

Dann konvergiert φ_n punktweise gegen 1_K und ist durch 1 beschaenkt und in $B_{R+1}(0)$ getragen. Damit folgt leicht die gewuenschte Aussage.

Behauptung. Mit A und B gehoert auch $A \cap B$ zu \mathcal{B} .

Bew. Seien (φ_n) und (ψ_n) Folgen in $C_c(\mathbb{R}^N)$, die gegen 1_A bzw. 1_B in L^1 konvergieren (und die in den beiden oben genannten Punkten genannten Eigenschaften erfuellen). Betrachte nun

$$\chi_n := \varphi_n \psi_n.$$

Mit

$$\chi_n - 1_{A \cap B} = \varphi_n \psi_n - 1_A 1_B = \varphi_n (\psi_n - 1_B) + (\varphi_n - 1_A) 1_B$$

folgt dann leicht die gewuenschte Aussage.

Behauptung. Mit A und B gehoert auch $A \setminus B$ zu \mathcal{B} .

Bew. Es gilt $1_{A \setminus B} = 1_A - 1_{A \cap B}$. Damit folgt dann die Aussage aus dem schon gezeigten (durch Subtraktion der entsprechenden Folgen).

Behauptung. Es gehoeren alle (in $B_R(0)$) offenen Teilmengen von $B_R(0)$ zu \mathcal{B} .

Bew. Ist $U \subset B_R(0)$ offen, so gilt

$$U = B_R(0) \setminus (B_R(0) \setminus U)$$

und es ist $B_R(0) \setminus U$ kompakt. Damit folgt die gewuenschte Aussage sofort aus den vorangehenden Aussagen.

Behauptung. Sind A_1, \dots, A_N paarweise disjunkte Mengen in \mathcal{B} , so gehoert $A_1 \cup \dots \cup A_N$ zu \mathcal{B} .

Bew. Das folgt durch Addition der entsprechenden Folgen.

Behauptung. Gehoeren $A^{(1)} \subset A^{(2)} \subset \dots$ zu \mathcal{B} , so gehoert auch $A := \cup_N A^{(N)}$ zu \mathcal{B} .

Bew. Nach Voraussetzung und dem Satz von der monotonen Konvergenz / dem Satz von Lebesgue gilt $1_{A^{(N)}} \rightarrow 1_A$ in L^1 . Damit folgt die Aussage sofort.

Behauptung. Es ist \mathcal{B} eine σ -Algebra.

Bew. Die vorangehenden Betrachtungen zeigen, daß \mathcal{B} die Menge $B_R(0)$ enthält und abgeschlossen ist unter:

- Relativer Komplementbildung.
- Endlichen Vereinigungen disjunkter Mengen.
- Abzählbaren Vereinigungen aufsteigender Mengen.

Damit ist \mathcal{B} dann auch abgeschlossen unter beliebigen abzählbaren Vereinigungen wegen

$$\bigcup_n A_n = A_1 \cup (A_2 \setminus A_1) \cup (A_3 \setminus (A_1 \cup (A_2 \setminus A_1))) \cup \dots$$

Damit ist dann \mathcal{B} eine σ -Algebra. \square

Unser nächstes Ziel ist es das vorangegangene Theorem auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ zu erweitern. Dazu werden wir beliebige stetige Funktionen durch eine Faltung glätten.

PROPOSITION. Für $f \in L^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar existiert für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ das Integral

$$g * f(x) := \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy (= g * f(x)).$$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass es reicht g als (höchstens) polynomiell wachsend vorauszusetzen.

Beweis. Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Substitutionsregel ($S : y \mapsto x - y$, $|\det DS| = |(-1)^N| = 1$). Existenz des Integrals folgt, da f zu L^1 gehört. \square

Notation. Man nennt $g * f$ die *Faltung* von g und f .

Die Faltung zweier Funktionen vereinigt 'das Beste' der beiden Funktionen auf sich.

LEMMA (Glätten durch Falten). Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ und $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar. Dann gilt:

- (a) Es ist $f * g$ beliebig oft differenzierbar und es gilt $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f * g)$.
- (b) Fällt g schneller als jedes Polynom, so fällt auch $f * g$ schneller als jedes Polynom.
- (c) Hat g kompakten Träger, so hat auch $f * g$ kompakten Träger.

Beweis. (a) Es reicht die Formel für die Ableitung zu zeigen. Wir zeigen das durch Induktion nach $|\alpha| = \sum_{j=1}^N \alpha_j$. Hier diskutieren wir nur den Fall $|\alpha| = 1$. Zu zeigen ist also :

$$\frac{1}{h}(f * g(x + he_j) - f * g(x)) \rightarrow (\partial_j f) * g(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(x + he_j) - (f * g)(x) &= \int (f(x + he_j - y) - f(x - y))g(y)dy \\ &= \int g(y) \left(\int_0^h \partial_j f(x + se_j - y) ds \right) dy \\ &= \int_0^h \left(\int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy \right) ds. \end{aligned}$$

Es ist nun die Funktion $s \mapsto \int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy$ stetig in s (!). Daher folgt aus dem HDI die Behauptung (a).

Noch zu zeigen (!): Ueblicher Schluss: Ausserhalb einer (grossen) Kugel ist das Integral sowieso null. Auf dieser Kugel hat man gleichmaessige Konvergenz.

(b) Offenbar gilt

$$(1 + |x + y|^2) \leq 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2).$$

Damit kann man abschuetzen

$$\begin{aligned} |(1 + |x|^2)^m f * g(x)| &= \left| \int (1 + |x|^2)^m f(x - y)g(y)dy \right| \\ &\leq \int (1 + |x - y + y|^2)^m |f(x - y)| |g(y)| dy \\ &\leq 2^m \int (1 + |x - y|^2)^m |f(x - y)| (1 + |y|^2)^N |g(y)| dy. \end{aligned}$$

Wegen $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ ist der Faktor $(1 + |x - y|^2)^m |f(x - y)|$ beschraenkt. Da g schneller faellt als jedes Polynom ist

$$(1 + |y|^2)^m |g(y)| \leq (1 + |y|)^{-N-1}$$

integrierbar. Das liefert die Behauptung.

(c) Ist f in K getragen und g in L so ist $f * g$ im kompakten $K + L$ getragen. (Denn, damit

$$f * g(x) = \dots \int f(y)g(x - y)dy$$

nicht verschwindet, muss auf jeden Fall ein $y \in K$ mit $x - y \in L$ existieren. Damit muss dann also

$$x \in y + L \in K + L$$

gelten. Das zeigt die gewuenschte Aussage.) \square

←
Ende der Vorlesung

DEFINITION (δ -Folge). Eine Folge von stetigen Funktionen $\delta_n : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, \infty)$ heisst δ -Folge, wenn gilt:

- $\int \delta_n d\lambda = 1$ fuer alle natuerlichen Zahlen n . (Normiert)
- $\int_{U_R(0)^c} \delta_n d\lambda \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ fuer jedes $R > 0$. (Konzentrationseigenschaft-Lebesguemaass)

Bemerkung - Konzentrationseigenschaft und Normierung.

- Gegeben die Normierung und laesst sich die Konzentrationseigenschaft auch formulieren als

$$\int_{U_R(0)} \delta_n d\lambda \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

- Oft wird auch die staerkere Konzentrationseigenschaft $\text{supp}(\delta_n) \subset B_{1/n}(0)$ gefordert.
- Fuer die von uns jetzt angestrebten Anwendungen koennte man die Forderungen noch weiter abschwaechen zu $\delta_n \in L^1(\mathbb{R}^N)$ mit
 - $\int \delta_n d\lambda = 1$ (fuer alle $n \in \mathbb{N}$).
 - $\int_{U_R(0)^c} |\delta_n| d\lambda \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ fuer jedes $R > 0$.

Bemerkung - Existenz einer δ -Folge. Es stellt sich natuerlich die Frage nach der Existenz einer solchen δ -Folge. Ein Beispiel ist wie folgt gegeben: Sei $\varepsilon > 0$. Definiere

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty)$$

durch $\varphi_\varepsilon(x) = c_\varepsilon e^{-\frac{1}{\varepsilon^2 - |x|^2}}$ fuer $|x| < \varepsilon$ und $\varphi_\varepsilon(x) = 0$ sonst (wobei $c_\varepsilon > 0$ so gewaehlt ist, dass $\int \varphi_\varepsilon d\lambda = 1$ gilt). Dann gehoert jedes φ_ε zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Weiterhin gilt offenbar

$$\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset B_\varepsilon(0)$$

und damit ist dann $\delta_n := \varphi_{1/n}$ eine δ -Folge in $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

LEMMA (Gleichmaeßige Konvergenz $\delta_n * f \rightarrow f$). Sei (δ_n) eine δ -Folge. Sei $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ beschaenkt und messbar. Dann konvergiert $\delta_n * f$ gegen f in allen Stetigkeitspunkten von f . Ist f gleichmaeßig stetig, konvergiert $\delta_n * f$ gleichmaessig gegen f .

Bemerkung. Jede Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^N)$ (und sogar jede Funktion in $C_0(\mathbb{R}^N)$) ist gleichmaeßig stetig und beschaenkt.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die Konvergenz in Stetigkeitspunkten: Sei x ein Stetigkeitspunkt von f . Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. (Zu zeigen $|(\delta_n * f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ fuer alle genuegend grossen n .)

Da x ein Stetigkeitspunkt von f ist, gibt es ein $R > 0$ mit

$$|f(x - y) - f(x)| \leq \varepsilon/2$$

fuer alle $y \in U_R(0)$. Damit rechnen wir nun unter zuhilfenahme eines kleinen Trick:

$$\begin{aligned} & |(\delta_n * f)(x) - f(x)| \\ &= \left| \int \delta_n(y) f(x - y) d\lambda(y) - f(x) \right| \quad (\text{Definition } \delta_n * f) \\ &= \left| \int \delta_n(y) (f(x - y) - f(x)) d\lambda(y) \right| \quad (\text{Trick - } \delta_n \text{ normiert}) \\ &\leq \int_{U_R(0)} \delta_n(y) |f(x - y) - f(x)| d\lambda(y) + \int_{(U_R(0))^c} \delta_n(y) |f(x - y) - f(x)| d\lambda(y) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \int_{(U_R(0))^c} \delta_n(y) d\lambda(y). \end{aligned}$$

Aufgrund der Konzentrationseigenschaft der δ -Folge wird der das Integral im zweiten Term beliebig klein fuer genuegend grosse n . Das liefert die Aussage.

Wir betrachten nun gleichmaessig stetige f : Da f gleichmaeßig stetig ist, koennen wir nun ein $R > 0$ waehlen mit

$$|f(x - y) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

fuer alle $y \in U_R(0)$. Damit koennen wir den obigen Beweis simultan fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$ fuehren. \square

FOLGERUNG. Es ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in $L^p(\mathbb{R}^N, \lambda)$ fuer alle $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Nach dem Approximationstheorem ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in L^p . Es reicht also zu zeigen, dass jedes $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ durch Funktionen aus $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ in L^p approximiert werden kann. Sei nun $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ beliebig. Sei δ_n eine δ -Folge aus C_c^∞ mit $\text{supp}(\delta_n) \subset B_1(0)$. Dann gehoert $\varphi_n := \delta_n * \varphi$ nach dem Glaettungslemma zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Nach dem Konvergenzlemma konvergiert f_n gleichmaessig gegen f . Weiterhin sind die Traeger der f alle in dem Kompaktum $K = \text{supp}(f) + B_1(0)$ enthalten. Damit konvergieren also die f_n in L^p gegen f . \square

2. Erinnerung: Die Fouriertransformation auf dem Schwartzraum

In diesem Abschnitt erinnern wir an die Fouriertransformation. Weitere Details und Beweise finden sich in den Lehrbuechern oder auch den Notizen zur Vorlesung Analysis III (Lenz): Wir beginnen mit einer Vorschau: Fuer geeignete Funktionen f definiert man

$$Ff : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, Ff(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Das kann man als eine (verallgemeinerte) Linearkombination von Wellen $x \mapsto e^{-ixy}$ gemäß einer Dichte f ansehen. Entsprechend spielt Fouriertransformation bei allen Arten von Untersuchungen von Wellen eine Rolle. Die Fouriertransformation ist dann invertierbar mit Inverser gegeben durch

$$F^{-1}g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} g(y) dy.$$

Man kann also aus der Ueberlagerung von Wellen wieder die Dichte zurueckgewinnen und umgekehrt. Hier steht natuerlich xy fuer

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^N x_j y_j,$$

d.h. es ist

$$e^{ixy} = e^{i \sum_{j=1}^N x_j y_j}, e^{-ixy} = e^{-i \sum_{j=1}^N x_j y_j}.$$

Die Fouriertransformation vertauscht Differentiation mit Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen und daher ruehrt ihre Bedeutung in der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen.

Wir machen das nun praezise. Dazu *erinnern* wir zunaechst an die Multiindexnotation. Ein Multiindex der Dimension N ist ein $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Fuer einen solchen Multiindex definiert man

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j \quad \text{Betrag oder Laenge des Multiindex}$$

und die Funktion

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha := \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} \quad \text{fuer } x \in \mathbb{R}^N.$$

Diese Funktionen bilden eine Basis des Vektorraumes der Polynome. Weiterhin assoziiert man zu einem Multiindex α den Operator M_α der Multiplikation mit x^α , d.h.

$$M_\alpha f = x^\alpha f$$

für $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ und den Operator D^α der α -Ableitung

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j} \right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^N D_j^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^N \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

mit $D_j := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j}$. Dieser Operator wirkt auf ein beliebig oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ in der schon aus dem zweiten Semester bekannten (induktiv definierten) Weise durch

$$D^0 f = f \quad D^{\alpha+e_j} := D_j(D^\alpha f)$$

(für die Standardorthonormalbasis e_j , $j = 1, \dots, N$, in \mathbb{R}^N). (Hier heißt eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil von f beliebig oft differenzierbar sind.)

Der *Schwartzsche Raum* (nach Laurent Schwartz) $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ der schnell fallenden Funktionen auf \mathbb{R}^N ist der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein $C = C_{\alpha,\beta}(f)$ existiert mit

$$|x^\beta| |D^\alpha f(x)| \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Eine äquivalente Charakterisierung definiert den Schwartzraum als diejenigen beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R}^N , für die gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|)^p |D^\alpha f(x)| < \infty$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Es ist nicht schwer zu sehen (Übung), dass der Raum \mathcal{S} invariant ist unter Anwendung von D^α und M_α (d.h. für jedes $f \in \mathcal{S}$ gehören auch $D^\alpha f$ und $M_\alpha f$ zu \mathcal{S} für jeden Multiindex α).

Für $f \in \mathcal{S}$ existiert

$$g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ und die Funktion $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto g(x)$, ist stetig und beschränkt. Für $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die Fouriertransformation Ff von f durch $Ff(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$.

Notation. Man schreibt auch \hat{f} statt Ff .

THEOREM. (a) $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist bijektiv.

(b) $D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} F M_\alpha f$ und $M_\alpha Ff = F D^\alpha f$ für alle $f \in \mathcal{S}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Bemerkung. Es gilt $F^{-1}f(x) = Ff(-x) = \int e^{ixy} f(y) dy$. Insbesondere folgt also $F^2 f(x) = f(-x)$ und $F^4 f = f$.

Beispiel/Anwendung. Es gilt

$$-\Delta = F^{-1} M_{|x|^2} F \text{ auf } \mathcal{S}$$

(d.h. $-\Delta f = F^{-1}(|x|^2 Ff)$ fuer alle $f \in \mathcal{S}$.)

Bew. Bijektivitaet von F und vorige Formeln.

Wir erinnern auch noch an folgende Formel.

PROPOSITION (Parsevalsche Gleichung fuer \mathcal{S}). *Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt die Gleichung*

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |Ff(x)|^2 dx.$$

3. Die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$

In den vergangenen beiden Abschnitte haben wir

- die Fouriertransformation auf \mathcal{S} ,
- Dichtheit von $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ in L^2 ,

gelernt. Damit koennen wir nun die Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ einfuehren.

THEOREM. *Es gibt genau eine stetige Abbildung*

$$F_{L^2} : L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$$

mit $F_{L^2} f = Ff$ fuer alle $f \in \mathcal{S}$. *Diese Abbildung ist unitaer. Die Inverse von F_{L^2} ist gegeben durch die Abbildung $f \mapsto F_{L^2} f(-x)$.*

Beweis. Wie im vorigen Abschnitt diskutiert ist die Abbildung $F : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ is bijektiv und isometrisch (auf \mathcal{S} als Teilraum von $L^2(\mathbb{R}^N)$). Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ dicht in L^2 ist und offenbar $C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}^N)$ gilt, folgt dann sofort, dass man es eindeutig zu einer stetigen Abbildung fortsetzen kann und diese Abbildung unitaer (d.h. isometrisch und surjektiv) ist.

Betrachte nun die Abbildung

$$G : L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N, \lambda), f \mapsto f(-\cdot).$$

Dann ist offenbar G linear und unitaer. Damit ist dann also $G \circ F_{L^2}$ unitaer. Weiterhin haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, dass $G \circ F$ (auf \mathcal{S}) mit dem Inversen von F uebereinstimmt.

Nimmt man dies mit der Definition von F_{L^2} zusammen, so folgt, dass $G \circ F_{L^2}$ das Inverse zu F_{L^2} ist. \square

Notation. Wir schreiben (meist) F statt F_{L^2} .

4. Der Laplaceoperator

In diesem Abschnitt fuehren wir nun den Laplaceoperator auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R}^N)$ ein.

Sei M_2 der maximale Operator der Multiplikation mit $|x|^2$ in $L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann ist M_2 ein abgeschlossener selbstadjungierter Operator (s.o.) und sein Spektrum ist gegeben durch

$$\sigma(M_2) = \text{Bild}|\cdot|^2 = [0, \infty).$$

Weiterhin hat M_2 keine Eigenwerte.

DEFINITION. *Fuer jedes $p \in [1, \infty)$ definieren wir den Sobolevraum H^p durch*

$$H^p := \{f \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda) : (1 + |\cdot|^2)^{p/2} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)\}.$$

FOLGERUNG. *Es gilt dann also*

$$H^2 = \{f \in L^2 : \widehat{f} \in D(M_2)\}.$$

THEOREM. *Der Operator $L := F^{-1}M_2F$ ist selbstadjungiert mit Definitionsbereich H^2 . Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt*

$$F^{-1}M_2F = -\Delta f.$$

Damit ist L also eine selbstadjungierte Fortsetzung von $-\Delta$ auf \mathcal{S} .

Beweis. Wir wissen schon, dass M_2 selbstadjungiert ist. Da F unitaer ist, folgt die Selbstadjungiertheit von L sofort. Der Definitionsbereich ergibt sich aus der vorangehenden Folgerung als H^2 . Die weiteren Aussagen folgen aus den schon bekannten Aussagen zur Fouriertransformation. \square

Bemerkung. (Uebung) Es ist L sogar die einzige selbstadjungierte Fortsetzung von $-\Delta$ auf \mathcal{S} . Tatsaechlich ist L sogar *wesentlich selbstadjungiert* d.h. die einzige selbstadjungierte Fortsetzung der Einschraenkung von L auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Es gibt also genau einen selbstadjungierten Operator der

$$-\Delta : C_c^\infty(\mathbb{R}^N) \longrightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

fortsetzt. Es spielt wesentliche Selbstadjungiertheit eine gewisse Rolle in der Quantenmechanik. Dabei werden die physikalisch interessanten Groessen, die sogenannten Observablen, durch selbstadjungierte Operatoren beschrieben. Oft ist nun von diesen Operatoren 'bekannt', wie sie auf $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ wirken. Ist der Operator dann wesentlich selbstadjungiert, so ist er durch diese Wirkung dann eindeutig bestimmt.

FOLGERUNG. *Es gilt $\sigma(L) = [0, \infty)$ und es hat L keine Eigenwerte.*

Im \mathbb{R}^N gibt noch eine Moeglichkeit die Sobolevraeume H^p durch Existenz schwacher Ableitungen zu charakterisieren. Das lernen wir nun kennen.

LEMMA ($H = W$). *Sei $p \in [1, \infty)$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gegeben. Dann gilt $f \in H^p$ genau dann, wenn es zu jedem Multiindex α mit $|\alpha| \leq p$ ein $g_\alpha \in L^2$ gibt mit*

$$\int f \partial^\alpha \varphi dx = \int g_\alpha \varphi dx$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ (d.h. es gilt $\partial^\alpha f = g_\alpha$ im schwachen Sinne).

Beweis. Man macht sich zunaechst klar, dass man in der Aussage die $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ durch $\varphi \in \mathcal{S}$ ersetzen darf (Uebung). Ebenso darf man natuerlich φ durch $\overline{\varphi}$ ersetzen. Anschliessend folgt die Aussage einfach durch Anwenden der Fouriertransformation auf beiden Seiten:

$$\int f \partial^\alpha \overline{\varphi} dx = \langle f, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle F(f), (-i)^{|\alpha|} M_\alpha F(\varphi) \rangle = \int (i)^{|\alpha|} M_\alpha F(f) \overline{F(\varphi)} dk$$

und

$$\int g_\alpha \overline{\varphi} dx = \langle g_\alpha, \varphi \rangle = \langle F(g_\alpha), F(\varphi) \rangle = \int F(g_\alpha) \overline{F(\varphi)} dk.$$

Vergleich liefert

$$i^{|\alpha|} M_\alpha F(f) = F(g_\alpha) \text{ d.h. } g_\alpha = F^{-1}(i^{|\alpha|} M_\alpha F(f)).$$

Damit folgt die gewuenschte Aquivalenz einfach. \square

Bemerkung. Ist $P(x_1, \dots, x_N) = \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha x^\alpha$ ein beliebiges Polynom vom Grad hoechstens K in N - Variablen, so definiert man den Operator $P(D)$ auf \mathcal{S} durch

$$P(D)f := \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha D^\alpha f.$$

Dann gilt nach dem bisher gezeigten

$$F_{\mathcal{S}} P(D)u = P F_{\mathcal{S}} u$$

fuer alle $u \in \mathcal{S}$. Entsprechend laesst sich dann der Operator $P(D)$ auf $L^2(\mathbb{R}^N, \lambda)$ definieren durch

$$P(D) = F^{-1} M_P F.$$

Damit ist also $P(D)$ unitaer equivalent zu einem Multiplikationsoperator und es laesst sich ein Grofsteil der obigen Erwaegungen verallgemeinern. Dabei spielt es dann eine grosse Rolle, ob der Kehrwert des Polynoms gebildet werden kann. Das fuehrt auf die Theorie *elliptischer Operatoren*.

KAPITEL 5

Der Lebesguesche Differentiationssatz und Anwendungen

In diesem Abschnitt betrachten wir den Euklidischen Raum \mathbb{R}^N mit dem Lebesguemaß λ . Es wird um komplexe Maße der Form

$$\mu = f\lambda : \text{Borel-messbare Mengen} \longrightarrow \mathbb{C}, E \mapsto \mu(E) := \int 1_E f d\lambda,$$

mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gehen.

Das Ziel ist es fuer solche Maße μ die Funktion f , d.h. die Radon-Nikodym Ableitung von μ bzgl. λ , als Grenzwert auszurechnen via

$$f(x) = D\mu(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}.$$

Es wird sich herausstellen, daß dies fuer viele x tatsaechlich moeglich ist. Wir brauchen dazu einige Vorbereitungen.

Zur Einstimmung beginnen wir mit folgender Aussage (deren Beweis wir als **Uebung** lassen).

Saetzchen. Sei μ ein komplexes Maß auf \mathbb{R} und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) = \mu((-\infty, x))$. Dann sind fuer $x \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{C}$ die folgenden beiden Aussagen aequivalent:

- Es ist f differenzierbar in x mit $f'(x) = c$.
- Fuer alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\left| \frac{\mu(I)}{\lambda(I)} - c \right| < \varepsilon$$

fuer alle Intervalle I um x mit $0 < |I| < \delta$.

(Der Beweis nutzt die folgenden beiden Beobachtungen:

- Fuer $z_1 < z_2$ und $I = [z_1, z_2)$ gilt $\mu(I) = f(z_2) - f(z_1)$.
- Fuer $z_1 < x < z_2$ gilt

$$\frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{f(z_2) - f(x)}{z_2 - x} \frac{z_2 - x}{z_2 - z_1} + \frac{f(x) - f(z_1)}{x - z_1} \frac{x - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Damit folgt die Aequivalenz einfach.)

Wir fuehren nun die noetige Notation ein, die wir im Rest des Abschnittes verwenden werden.

Notation. Wir setzen

$$U_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < r\}.$$

Weiterhin setzen wir fuer ein komplexes Maß μ auf \mathbb{R}^N und $r > 0$ die Quotientenfunktion

$$(Q_r\mu)(x) := \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}$$

sowie (falls fuer $x \in \mathbb{R}^N$ der Grenzwert existiert)

$$D\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} (Q_r\mu)(x).$$

Das wesentliche Hilfsmittel bei der Untersuchung von Q_r wird die Maximalfunktion sein: Fuer ein positives (endliches) Maß μ definiert man die Maximalfunktion durch

$$(M\mu)(x) := \sup_{0 < r < \infty} (Q_r\mu)(x)$$

und fuer ein komplexes Maß μ definiert man

$$(M\mu)(x) := (M|\mu|)(x).$$

(Einnerung: Hier ist die *totale Variation* $|\mu|$ von μ das kleinste positive Mass ν mit $|\mu(E)| \leq \nu(E)$ fuer alle messbaren Mengen E .)

Bemerkung. Es ist plausibel, daß die Maximalfunktion bei der Untersuchung der Q_r eine wichtige Rolle spielt, da sie simultan alle r erfaßt. Auch beachte man, dass in gewisser Weise nur die kleinen Werte von r interessant sind, da fuer die großen Werte von r die Werte $\mu(U_r(x))$ durch $|\mu|(\mathbb{R}^N)$ beschraenkt sind, waehrend $\lambda(U_r(x))$ gegen ∞ konvergiert.

PROPOSITION (Unterhalbstetigkeit der Maximalfunktion). *Es ist $M\mu$ unterhalbstetig (d.h. $\{x : M\mu(x) > s\}$ ist fuer jedes $s \in \mathbb{R}$ offen) und insbesondere ist $M\mu$ meßbar.*

Beweis. Sei ohne Einschraenkung μ ein positives Maß und sei

$$U := \{x : M\mu(x) > s\}$$

fuer ein $s \in \mathbb{R}$. Zu zeigen: U ist offen.

Sei $x \in U$ beliebig. Dann existiert also ein $r > 0$ und $t > s$ mit $\mu(U_r(x)) = t\lambda(U_r(x))$. Fuer $\delta > 0$ genuegend klein und $y \in U_\delta(x)$ gilt dann:

- $U_{r+\delta}(y) \supset U_r(x)$ (das gilt sogar fuer alle $\delta > 0$).
- $\lambda(U_{r+\delta}(y)) < \frac{t}{s}\lambda(U_r(x))$ (das gilt fuer genuegend kleine $\delta > 0$).

Damit folgt dann

$$\begin{aligned} \mu(U_{r+\delta}(y)) &\geq \mu(U_r(x)) \\ &= t\lambda(U_r(x)) \\ &> s\lambda(U_{r+\delta}(y)). \end{aligned}$$

(Hier wird die erste Eigenschaft von δ in der ersten Ungleichung genutzt und die zweite Eigenschaft im letzten Schritt.) Insgesamt erhaelt man also fuer alle $y \in U_\delta(x)$

$$\mu(U_{r+\delta}(y)) > s\lambda(U_{r+\delta}(y))$$

und damit $y \in U$. □

Bemerkung. Der Beweis nutzt eine Stetigkeitseigenschaft des Lebesguemaßes und die Monotonie eines jeden Maßes.

Wir kommen nun zu einem wesentlichen Hilfsmittel in diesem Abschnitt (und in anderen Kontexten).

LEMMA (Ueberdeckungslemma). *Sei W die Vereinigung von Kugeln $U_{r_i}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$, im Euklidischen Raum \mathbb{R}^N . Dann gibt es eine endliche Teilmenge $S \subset \{1, \dots, n\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

- Die $U_{r_i}(x_i)$, $i \in S$, sind paarweise disjunkt.
- Es gilt $W \subset \bigcup_{i \in S} U_{3r_i}(x_i)$.
- $\lambda(W) \leq 3^N \sum_{i \in S} \lambda(U_{r_i}(x_i))$.

Bemerkung. Entscheidend sind die beiden ersten Punkte. Diese gelten fuer allgemeine metrische Raeume. Der dritte Punkt folgt aus den beiden ersten Punkten. Er nutzt eine Skalierungseigenschaft des Lebesguemaßes. Entsprechend gilt das Lemma (und damit die meisten der folgenden Aussagen dieses Abschnittes) in beliebigen metrischen Raeumen, wenn das zugrundeliegende Maß eine entsprechende Skalierungseigenschaft hat. Speziell braucht man, daß das Volumen von Kugeln mit dem dreifachen Radius durch eine Konstante mal das Volumen der urspruenglichen Kugeln abgeschaezt werden kann. Natuerlich ist das erfuehlt, wenn das Volumen von Kugeln mit dem doppelten Radius durch eine Konstante mal das Volumen der urspruenglichen Kugeln abgeschaezt werden kann. Das ist unter dem Namen 'Volumenverdoppelung' bekannt.

Beweis. Der dritte Punkt folgt aus dem zweiten Punkt und einfachen Eigenschaften des Lebesguemaßes. Wir zeigen nun Existenz eines S , das die beiden ersten Punkte erfuehlt. Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir

$$U_j := U_{r_j}(x_j)$$

fuer $j = 1, \dots, n$.

Wir sortieren zunaechst die Kugeln nach Groeße um, so daß gilt

$$r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_n.$$

Wir setzen $i_1 := 1$. (Die Menge S wird als $\{i_1, \dots\}$ gegeben werden.) Wir entfernen alle $j > i_1$ mit $U_j \cap U_{i_1} \neq \emptyset$.

Beachte:

- Alle noch verbliebenen Kugeln sind disjunkt zu U_{i_1} (nach Konstruktion).
- Jede der entfernten Kugeln U_j ist in $U_{3r_{i_1}}(x_{i_1})$ enthalten (da $r_{i_1} \geq r_j$ und $U_j \cap U_{i_1} \neq \emptyset$).

Wenn noch Kugeln uebrig sind, setzen wir i_2 als den kleinsten noch uebrigen Index. Dann gilt also insbesondere $U_{i_1} \cap U_{i_2} = \emptyset$. Wir entfernen nun alle Kugeln (mit Index $j > i_2$) mit

$$U_j \cap U_{i_2} \neq \emptyset.$$

Beachte:

- Alle noch verbliebenen Kugeln sind disjunkt zu U_{i_2} (nach Konstruktion) und natuerlich weiterhin auch zu U_{i_1} .
- Jede der entfernten Kugeln U_j ist in $U_{3r_{i_2}}(x_{i_2})$ enthalten (da $r_{i_2} \geq r_j$ und $U_j \cap U_{i_2} \neq \emptyset$).

Wir iterieren nun diesen Schritt immer wieder solange noch Kugeln ueberig sind. Da es nur endlich viele Kugeln gibt, endet dieses Verfahren nach endlich vielen Schritten. Wir setzen dann

$$S := \{i_1, \dots\}.$$

Das beendet den Beweis. \square

Als Konsequenz aus dem Ueberdeckungslemma koennen wir nun folgendes Maximaltheorem beweisen.

THEOREM (Maximaltheorem). *Sei μ ein komplexes Maß in \mathbb{R}^N . Dann gilt fuer jedes $s > 0$*

$$\lambda(\{x \in \mathbb{R}^N : M\mu(x) > s\}) \leq 3^N |\mu|(\mathbb{R}^N) \frac{1}{s}.$$

Bemerkung. Das Theorem gibt eine praezise Information, wie die Maximalfunktion fuer grosse s klein wird. Dabei geht von μ nur die Gesamtmaße ein und es spielt ansonsten nur die lediglich dimensionsabhaengige Konstante 3^N eine Rolle. In diesem Sinne ist das Theorem sehr universell.

Beweis. Setze $U := \{x : M\mu(x) > s\}$. Dann ist U offen (s.o.). Sei $K \subset U$ eine beliebige kompakte Menge. Zu jedem $x \in K$ existiert dann eine Kugel U_x (mit Mittelpunkt x) und

$$(*) \quad |\mu|(U_x) > s\lambda(U_x).$$

Da K kompakt ist, kann man es mit endlich vielen solcher Kugeln ueberdecken. Nach dem vorigen Lemma koennen aus diesen endliche vielen Kugeln, dann Kugeln U_1, \dots, U_k gewaehlt werden mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Die U_j , $j = 1, \dots, k$, sind paarweise disjunkt.
- $\lambda(K) \leq 3^N \sum_{j=1}^k \lambda(U_j)$.

Damit gilt also:

$$\begin{aligned} \lambda(K) &\leq 3^N \sum_{j=1}^k \lambda(U_j) \\ (*) &\leq 3^N \sum_{j=1}^k \frac{|\mu|(U_j)}{s} \\ &= \frac{3^N}{s} \sum_{j=1}^k |\mu|(U_j) \\ (U_j \text{ disjunkt}) &= \frac{3^N}{s} |\mu|\left(\bigcup_{j=1}^k U_j\right) \\ &\leq \frac{3^N}{s} |\mu|(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

(Es ist $|\mu|(\mathbb{R}^N)$ endlich, da es sich um ein komplexes Maß handelt). Wir wählen nun kompakte Teilmengen K_n von U mit

$$K_n \subset K_{n+1} \quad \text{und} \quad \bigcup_n K_n = U.$$

(Zum Beispiel:

$$K_n := \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq n\} \cap \{y \in U : \text{dist}(y, U^c) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Das ist kompakt als Schnitt einer kompakten Menge mit einer abgeschlossenen Menge und die Vereinigung dieser K_n ist U , da U offen ist.) Dann gilt aufgrund von uns schon bekannte Sätzen zur 'Stetigkeit' von Maßen

$$\lambda(U) = \lim_n \lambda(K_n) \leq \frac{3^N}{s} |\mu|(\mathbb{R}^N).$$

Das ist die gewünschte Aussage. \square

Wir kommen nun zur Anwendung auf Maße der Form $\mu = f\lambda$ mit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Wir definieren für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ $Mf := M(f\lambda)$ d.h.

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y)| d\lambda(y)$$

für $x \in \mathbb{R}^N$. Dann gilt also

$$Mf = M|f\lambda| = M|f|\lambda.$$

(Hier folgt die erste Gleichung nach Definition von M für komplexe Maße und die zweite folgt aufgrund des oben gezeigten $|f\lambda| = |f|\lambda$.)
Weiterhin gilt dann offenbar für die Gesamtmaße der totalen Variation von $\mu = f\lambda$

$$|\mu|(\mathbb{R}^N) = (|f|\lambda)(\mathbb{R}^N) = \int_{\mathbb{R}^N} |f| d\lambda = \|f\|_1.$$

FOLGERUNG. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann gilt für $s > 0$

$$\lambda(\{x : Mf(x) > s\}) \leq \frac{3^N}{s} \|f\|_1.$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem vorangehenden Theorem. \square

Bemerkung - schwache L^1 -Funktionen und Maximalfunktion.

- Eine meßbare Funktion $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ heißt eine *schwache L^1 -Funktion*, wenn gilt

$$\lambda(\{x : |g(x)| > s\}) \leq \frac{\text{constant}}{s}$$

für alle $s > 0$. Damit besagt die Folgerung also, daß Mf eine schwache L^1 -Funktion ist für jedes $f \in \mathcal{L}^1$.

- Es ist jede $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ Funktion f eine schwache L^1 -Funktion. Denn mit $E_s := \{x : |f(x)| > s\}$ gilt offenbar $s1_{E_s} \leq |f|$ und damit

$$s\lambda(E_s) = \int s1_{E_s} d\lambda \leq \int_{E_s} |f| d\lambda \leq \int |f| d\lambda = \|f\|_1.$$

Es gibt schwach - L^1 - Funktionen, die nicht in L^1 sind. Dazu gehoert zum Beispiel (fuer $N = 1$) die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = 1/|x| \text{ fuer } x \neq 0$$

und $f(0) = 0$. Dann gilt

$$E_s = \{x : |f(x)| \geq s\} = [-\frac{1}{s}, \frac{1}{s}] \setminus \{0\}$$

und damit

$$\lambda(E_s) = \frac{2}{s}.$$

- Fuer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ mit $f \neq 0$ ist die Funktion Mf keine $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ Funktion. (Uebung. Idee: Verschwindet f zum Beispiel auf der 1 Kugel um den Ursprung nicht identisch, so folgt $Mf(x) \geq \frac{C}{|x|^N}$ fuer grosse x . Damit ist Mf nicht integrierbar.)

DEFINITION (Lebesguepunkt). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ gegeben. Ein $x \in \mathbb{R}^N$ mit

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f(y) - f(x)| d\lambda = 0$$

heißt Lebesguepunkt von f .

Bemerkungen.

- Jeder Stetigkeitspunkt von f ist ein Lebesguepunkt (wie man sich leicht klarmacht).
- Ist f nicht stetig, so ist - a priori - gar nicht klar, daß es Lebesguepunkte gibt.
- In jedem Lebesguepunkt x existiert (aufgrund der Dreiecksungleichung) die Ableitung $D\mu(x)$ von $\mu = f\lambda$ und stimmt mit $f(x)$ ueberein (wie man leicht sieht; vergleiche auch entsprechenden Schluss weiter unten).

THEOREM (Fast jeder Punkt ist Lebesguepunkt). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Dann ist λ - fast jedes x ein Lebesguepunkt (von f).

Beweis. Fuer $r > 0$ und $x \in \mathbb{R}^N$ definieren wir

$$T_r f(x) := \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f - f(x)| d\lambda.$$

Weiterhin sei

$$Tf := \limsup_{r \rightarrow 0} T_r f.$$

Wir zeigen $Tf(x) = 0$ fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Idee. Wir zerlegen $f = g + h$ in $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ und h mit $\|h\|_1$ klein. Dann gilt $Tf \leq Tg + Th$ sowie

- $Tg = 0$ (da g stetig ist)
- Th klein (nach Maximaltheorem, da h kleine Norm hat).

Hier sind die Details:

Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $C_c(\mathbb{R}^N)$ dicht in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$, existiert ein $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$, so daß fuer $h = f - g$ gilt

$$\|h\|_1 \leq \frac{1}{n}.$$

Nach Konstruktion gilt $f = g + h$. Damit folgt (nach einer kleiner Rechnung)

$$Tf \leq Tg + Th.$$

Wir behandeln nun Tg und Th getrennt:

Aufgrund der Stetigkeit von g gilt $Tg = 0$. Fuer Th folgt aus

$$T_r h(x) = \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |h - h(x)| d\lambda \leq \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |h| d\lambda + |h(x)|$$

dann nach Bilden von $r \rightarrow 0$

$$Th(x) \leq Mh(x) + |h(x)|.$$

Insgesamt erhalten wir also

$$Tf(x) \leq Mh(x) + |h(x)|.$$

Aus dieser Abschaetzung folgt nun fuer jedes $s > 0$

$$(*) \quad \{x : Tf(x) > 2s\} \subset \{x : Mh(x) > s\} \cup \{x : |h(x)| > s\} =: E(s, n).$$

(Beachte, daß die rechte Seite ueber h tatsaechlich von n abhaengt.) Nach der Folgerung und da h in \mathcal{L}^1 ist, koennen wir nun das Maß der rechten Seite abschaetzen zu

$$\lambda(E(s, n)) \leq (3^N + 1) \|h\|_1 \frac{1}{s} = (3^N + 1) \frac{1}{sn}.$$

Nun ist die linke Seite von $(*)$ unabhaengig von n damit gilt also

$$\{x : Tf(x) > 2s\} \subset \bigcap_n E(s, n).$$

Aufgrund der vorangehenden Abschaetzung hat aber der Schnitt auf der rechten Seite das Lebesguemaß Null. Damit ist also fuer jedes s die Menge

$$\{x : Tf(x) > 2s\}$$

in einer Lebesgue Nullmenge enthalten. Damit ist dann die Menge $\{x : Tf(x) > 0\}$ in einer Lebesgue Nullmenge enthalten. Damit gilt dann fuer λ -fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ also $Tf(x) = 0$ und das Theorem ist bewiesen. \square

Wir ziehen nun einige Folgerungen aus dem Theorem. Man mache sich klar, daß Menge der x von vollem Lebesguemaß, um die es jeweils geht, immer die Lebesguepunkte umfaßt. Wir beginnen mit zwei Folgerungen, die auch unter dem Namen 'Lebesguescher Differentiationssatz' bekannt sind.

FOLGERUNG (Lebesguescher Differentiationssatz). Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und $\mu = f\lambda$. Dann existiert fuer λ -fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ die Ableitung

$$D\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda$$

und stimmt mit $f(x)$ ueberein.

Beweis. In jedem Lebesguepunkt x gilt

$$\left| \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} f d\lambda - f(x) \right| \leq \frac{1}{\lambda(U_r(x))} \int_{U_r(x)} |f - f(x)| d\lambda \rightarrow 0, r \rightarrow 0.$$

Aus dem vorigen Theorem folgt nun die gewuenschte Behauptung. \square

FOLGERUNG (Lebesguescher Differentiationssatz - Variante). *Sei μ ein komplexes Maß auf \mathbb{R}^N mit $\mu \ll \lambda$. Dann existiert*

$$D\mu(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))}$$

fuer λ fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ und es gilt

$$\mu = (D\mu)\lambda.$$

Beweis. Aufgrund von $\mu \ll \lambda$ gilt nach dem Satz von Radon-Nikodym $\mu = f\lambda$ mit einem $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$. Nun folgt die Aussage leicht aus der vorangehenden Folgerung. \square

Bisher haben wir beim Bilden von $D\mu$ uns auf den Fall von Grenzwertbildung entlang von Kugeln beschaenkt. Es lassen sich obige Aussagen aber direkt auf etwas allgemeinere Folgen von Mengen ausweiten.

DEFINITION (f. z. Folgen). *Sei $x \in \mathbb{R}^N$. Eine Folge E_n von meßbaren Mengen in \mathbb{R}^N wird bei x freundlich zusammenziehend (f. z.) genannt, wenn es $\alpha > 0$ und $r_n \rightarrow 0$ gibt mit*

- $E_n \subset U_{r_n}(x)$,
- $\lambda(E_n) \geq \alpha\lambda(U_{r_n}(x))$.

Bemerkungen.

- Im englischen spricht man von *nicely shrinking sets*.
- Die Bedingung bedeutet gerade, daß die E_n einen erheblichen Teil von sich auf x zusammenziehenden Kugeln ausmachen. Damit sind sie in gewisser Weise 'aequivalent' zu solchen Kugeln.
- Es wird nicht gefordert, daß x zu E_n oder zu $\overline{E_n}$ gehoert.

THEOREM (Ableitung eines absolut stetigen Maßes). *Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ und sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Dann gilt fuer λ - fast alle $x \in \mathbb{R}^N$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} f d\lambda = f(x).$$

Beweis. In jedem Lebesguepunkt x gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} |f - f(x)| d\lambda &\leq \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{U_{r_n}(x)} |f - f(x)| d\lambda \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \frac{1}{\lambda(U_{r_n}(x))} \int_{U_{r_n}(x)} |f - f(x)| d\lambda \\ &\rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Hier haben wir in den beiden ersten Abschaetzungen die beiden charakteristischen Eigenschaften eine fz Folge benutzt und im letzten Schritt, daß

x ein Lebesguepunkt ist. Mit der Dreiecksungleichung folgt dann leicht die Aussage des Theorems. \square

In den vorausgehenden Betrachtungen haben wir uns mit (bzgl. des Lebesguemasses) absolut stetigen Massen befasst. Wir wenden uns nun (bzgl. des Lebesguemasses) singularen Massen zu. Wir **erinnern** zunachst an die Definition: Positive Masse μ und ν heissen *singulaer zueinander*, geschrieben als $\mu \perp \nu$, wenn es messbare Mengen A, B gibt mit $A \cap B = \emptyset$ und

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus A) = 0 \quad \nu(\mathbb{R}^N \setminus B) = 0.$$

Es sind also μ und ν aus disjunkten Mengen getragen. Man sagt dann auch, dass μ singulaer bzgl. ν ist (und umgekehrt). Ist μ ein komplexes Mass, so heissen μ und ν singulaer, wenn $|\mu|$ und ν singulaer sind.

Ist μ singulaer bzgl. λ , so stellen sich fuer $D\mu$ zwei Fragen:

- Wert von $D\mu(x)$ fuer λ -fast alle $x \in \mathbb{R}^N$
- Wert von $D\mu(x)$ fuer μ -fast alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Wir betrachten zunachst ein Beispiel.

Beispiel. Sei $\mu = \delta_p$ fuer ein festes $p \in \mathbb{R}^N$ (d.h. $\mu(E) = 1$ falls $p \in E$ und $\mu(E) = 0$ sonst). Dann sieht man leicht, da β $D\mu(x) = \infty$ fuer $x = p$ und $D\mu(x) = 0$ sonst. Damit gilt also $D\mu = \infty$ fuer μ fast alle x und $D\mu = 0$ fuer λ fast alle x .

THEOREM (Ableitung eines singularen Masses bzgl. λ). *Sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewaehlt. Ist μ ein komplexes Ma β mit $\mu \perp \lambda$, so gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = 0$$

fuer λ -fast-alle $x \in \mathbb{R}^N$.

Bemerkung. Gibt es eine kompakte Menge K mit $\lambda(K) = 0$ und $|\mu|(\mathbb{R}^N \setminus K) = 0$, so ist die Aussage klar.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei μ ein positives Ma β . (Andernfalls kann man μ wie oben diskutiert zerlegen zunachst in Real- und Imaginaerteil und dies dann in ihren jeweiligen Positiv- und Negativteil. Alternativ kann man auch zu $|\mu|$ uebergehen.) Nun gilt

$$\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} \leq \frac{\mu(U_{r_n}(x))}{\alpha(x)\lambda(U_{r_n}(x))} \leq \frac{1}{\alpha(x)} \frac{\mu(U_{r_n}(x))}{\lambda(U_{r_n}(x))}.$$

Es reicht also $D\mu(x) = 0$ fuer λ fast alle x zu zeigen. Definiere nun

$$(\overline{D}\mu)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{0 < r < 1/n} (Q_r \mu)(x) \right).$$

Dann ist $\overline{D}\mu$ me β bar. (Der Ausdruck in der Klammer ist unterhalbstetig (vgl. Begrue ndung oben) und die Folge (in n) der Funktionen konvergiert fallend.) Offenbar gilt weiterhin

$$\overline{D}\mu(x) = 0 \iff D\mu(x) = 0.$$

Es reicht also $\overline{D}\mu(x) = 0$ fuer λ -fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$ zu zeigen.

Idee. Zerlege $\mu = \mu_1 + \mu_2$, wobei μ_1 auf einer kompakten Menge vom Lebesguemaß Null getragen ist und μ_2 kleine Gesamtmasse hat. Dann gilt $\overline{D}\mu \leq \overline{D}\mu_1 + \overline{D}\mu_2$ und

- $\overline{D}\mu_1 = 0$ (da μ_1 auf Kompaktum getragen ist; siehe Bemerkung vor dem Beweis des Theorem),
- $\overline{D}\mu_2$ klein (nach Maximaltheorem, da μ_2 kleine Gesamtmasse hat).

(Vgl. Beweis oben, dass fast jeder Punkt ein Lebesguepunkt ist: Dort war eine Zerlegung $f = g + h$ mit $g \in C_c(\mathbb{R}^N)$ und h mit kleiner L^1 -Norm entscheidend.)

Hier sind die Details: Wähle $s > 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig.

Wegen $\mu \perp \lambda$ ist μ auf eine Menge vom Lebesguemaß Null konzentriert. Weiterhin ist μ regulär. Damit existiert also eine kompakte Menge K mit

$$\lambda(K) = 0, \text{ und } \mu(K) \geq \mu(\mathbb{R}^N) - \varepsilon.$$

Sei μ_1 die Einschränkung von μ auf K d.h.

$$\mu_1(E) = \mu(K \cap E)$$

und

$$\mu_2 := \mu - \mu_1.$$

Dann gilt

$$\mu_2(\mathbb{R}^N) \leq \varepsilon.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^N \setminus K$ gilt (da K kompakt, also um x eine Kugel in $\mathbb{R}^N \setminus K$ existiert)

$$(\overline{D}\mu)(x) = (\overline{D}\mu_2)(x) \leq (M\mu_2)(x).$$

Damit folgt also

$$\{x : \overline{D}\mu(x) > s\} \subset K \cup \{x : (M\mu_2)(x) > s\}.$$

Wegen $\lambda(K) = 0$ folgt nach Anwenden des Maximaltheorem

$$\lambda(\{x : \overline{D}\mu(x) > s\}) \leq \frac{3^N}{s} \mu_2(\mathbb{R}^N) \leq \frac{3^N}{s} \varepsilon.$$

Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, folgt

$$\lambda(\{x : \overline{D}\mu(x) > s\}) = 0.$$

Da dies für alle $s > 0$ gilt, folgt $(\overline{D}\mu)(x) = 0$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^N$. \square

Wir halten eine Folgerung aus den beiden vorangehenden Theoremen fest.

COROLLARY (Berechnen von μ_{ac}). Sei zu jedem $x \in \mathbb{R}^N$ eine freundlich zusammenziehende Folge $E_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, gewählt. Sei μ ein komplexes Maß auf \mathbb{R}^N und $\mu = f\lambda + \mu_{sing}$ seine Lebesguezerlegung. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = f(x)$$

für λ -fast alle $x \in \mathbb{R}^N$. Insbesondere gilt $\mu \perp \lambda$ genau dann, wenn $(D\mu)(x) = 0$ für λ -fast alle $x \in \mathbb{R}^N$ gilt.

Beweis. Es gilt

$$\frac{\mu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = \frac{(f\lambda)(E_n(x)) + \mu_{sing}(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} = \frac{(f\lambda)(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))} + \frac{\mu_{sing}(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}.$$

Nun folgt die erste Aussage aus den beiden vorangehenden Theoremen. Das 'Insbesondere' folgt sofort aus der ersten Aussage. \square

Bemerkung. Das Korollar besagt daß man den absolut stetigen Teil eines jeden komplexen Maßes durch Grenzwertbildung 'ausrechnen' kann.

Den singulären Teil des Maßes kann man nicht durch Grenzwertbildung ausrechnen. Man kann aber einen 'Traeger' ausrechnen. Das liefert die Antwort auf die Frage nach dem Wert der Ableitung bzgl. des Masses selber.

THEOREM (Berechnen des Traeger von μ_{sing}). *Sei μ ein positives Borelmaß auf \mathbb{R}^N mit $\mu \perp \lambda$. Dann gilt*

$$(D\mu)(x) = \infty$$

fuer μ - fast - alle $x \in \mathbb{R}^N$. Tatsaechlich ist die Menge

$$T := \{x \in \mathbb{R}^N : (D\mu)(x) = \infty\}$$

messbar mit

$$\mu(\mathbb{R}^N \setminus T) = 0, \text{ und } \lambda(T) = 0.$$

Bemerkung. Man beachte den Unterschied zum obigen Theorem zur Berechnung der Ableitung eines singulären Maßes bzgl. λ fast aller Punkte (vgl. auch das Beispiel $\mu = \delta_p$).

Beweis. Idee. Sei S eine Menge vom Lebesguemass Null mit $\mu(\mathbb{R}^N \setminus S) = 0$. Betrachte fuer eine natuerliche Zahl m die Menge \tilde{E}_m der $x \in S$ mit $D\mu(x) \leq m$. Dann sollte gelten

$$\mu(\tilde{E}_m) \leq m\lambda(\tilde{E}_m) \leq m\lambda(S) = 0.$$

Da dies fuer jedes m gilt, folgt $D\mu(x) = \infty$ fast ueberall auf S .

Hier sind die Details: Nach Definition von Singularitaet gibt eine Borelmenge S (einen Traeger von μ) mit $\lambda(S) = 0$ und $\mu(\mathbb{R}^N \setminus S) = 0$. Aufgrund der Regularitaet des Lebesguemaßes gibt es weiterhin offene Mengen V_n mit

$$S \subset V_n \text{ und } \lambda(V_n) < \frac{1}{n}$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Sei fuer $m \in \mathbb{N}$ die Menge E_m definiert als die Menge aller $x \in S$, fuer die eine Folge r_k mit $r_k \rightarrow 0$ und

$$\mu(U_{r_k}(x)) < m\lambda(U_{r_k}(x))$$

fuer alle $k \in \mathbb{N}$ existiert. Dann gilt also die gewuenscht Aussage

$$(D\mu)(x) = \infty$$

fuer alle $x \in S \setminus \bigcup_m E_m$. Wir werden nun zu jedem E_m eine meßbare Obermenge Ω_m vom μ Maß Null finden (und damit folgt dann die Aussage):

Fixiere natuerliche Zahlen m und n . Da V_n offen ist, existiert zu jedem $x \in E_m$ eine Kugel U_x in V_n mit

$$\mu(U_x) < m\lambda(U_x).$$

Sei \tilde{U}_x die Kugel um x mit einem Drittel des Radius von U_x . Setze

$$W_{n,m} := \bigcup_{x \in E_m} \tilde{U}_x.$$

Dann ist $W_{n,m}$ offen, in V_n enthalten und enthaelt E_m .

Behauptung. $\mu(W_{n,m}) \leq \frac{3^N m}{n}$

Bew. Sei K eine beliebige kompakte Menge in $W_{n,m}$. Dan wird K durch endlich viele der \tilde{U}_x ueberdeckt. Daher existiert nach dem Ueberdreckungslemma eine endliche Menge F in E_m mit den folgenden beiden Eigenschaften:

- Die \tilde{U}_x , $x \in F$, sind disjunkt.
- $K \subset \bigcup_{x \in F} \tilde{U}_x$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \mu(K) &\leq \sum_{x \in F} \mu(U_x) \\ (x \in E_m) &< m \sum_{x \in F} \lambda(U_x) \\ &= 3^N m \sum_{x \in F} \lambda(\tilde{U}_x) \\ (\text{disjunkt}) &\leq 3^N m \lambda(V_n) \\ (\text{Voraussetzung an } V_n) &\leq 3^N m \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Da das kompakte K beliebig war, folgt die gewuenschte Behauptung.

Setze nun

$$\Omega_m := \bigcap_n W_{n,m}.$$

Dann ist Ω_m meßbar als abzahbarer Schnitt von offenen (also meßbaren) Mengen. Es enthaelt E_m (da jedes $W_{n,m}$ dies tut) und nach der Behauptung ist Ω_m eine μ -Nullmenge.

Wir zeigen nun, dass die Menge T messbar ist. Dann folgt die komplette letzte Aussage aus dem eben bewiesenen. Wir definieren

$$\underline{D}\mu(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{0 < r < \frac{1}{n}} Q_r(x) \right).$$

Dann ist $\underline{D}\mu$ messbar (!) und es gilt $D\mu(x) = \infty \iff \underline{D}\mu(x) = \infty$. (!!).
Damit ist dann

$$\{x : D\mu(x) = \infty\} = \{x : \underline{D}\mu(x) = \infty\}$$

messbar.

Es bleibt (!) und (!!) zu zeigen. Es ist (!!) einfach. Zu (!): Es reicht zu zeigen, dass

$$S_n := \inf_{0 < r < \frac{1}{n}} Q_r(x)$$

oberhalbstetig ist (da $\underline{D}\mu$ ein monotoner Grenzwert der S_n ist). Wir zeigen, dass fuer jedes $s > 0$ die Menge

$$\{x : S_n(x) < s\}$$

offen ist. Sei x aus dieser Menge. Dann existiert ein $0 < r < \frac{1}{n}$ und $0 < t < s$ mit

$$\frac{\mu(U_r(x))}{\lambda(U_r(x))} \leq t < s.$$

Fuer $y \in U_\delta(x)$ mit genuegend kleinem $\delta > 0$ null gilt dann

- $U_{r-\delta}(y) \subset U_r(x)$ (gilt fuer alle $\delta > 0$ und
- $\lambda(U_r(x)) < \frac{s}{t}\lambda(U_{r-\delta}(y))$ (da $s/t > 1$ und $\delta > 0$ genuegend klein ist).

Damit erhaelt man

$$\begin{aligned} \mu(U_{r-\delta}(y)) &\leq \mu(U_r(x)) \\ &\leq t\lambda(U_r(x)) \\ &< t\frac{s}{t}\lambda(U_{r-\delta}(y)) \\ &= s\lambda(U_{r-\delta}(y)). \end{aligned}$$

Damit gehoert auch y zu der genannten Menge und diese ist offen. \square

Wir fassen die vorangehenden Betrachtungen noch einmal etwas zusammen. Dazu fuehren wir noch eine Definition ein.

DEFINITION (Atome und Punktmaße). Sei μ ein Maß auf \mathbb{R}^N .

- (a) Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\mu(\{x\}) \neq 0$ heißt Atom von μ .
- (b) Das Maß μ heißt stetig (oder atomfrei), wenn fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ gilt $\mu(\{x\}) = 0$.
- (c) Das Maß μ heißt reines Punktmaß, wenn gilt

$$\mu = \sum_{x \in A} \mu(\{x\})\delta_x,$$

wobei A die Menge der Atome von μ ist.

Bemerkung - Stetigkeit eines Masses Ist μ ein positives endliches Mass auf \mathbb{R} mit Verteilungsfunktion

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), F(t) = \mu((-\infty, t]),$$

so ist F genau dann stetig, wenn μ stetig ist.

THEOREM (Lebesgue Zerlegung). Sei μ ein positives endliches Maß auf \mathbb{R}^N . Dann existieren eindeutige Maße $\mu_{ac}, \mu_{sc}, \mu_{pp}$ mit

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

und folgenden Eigenschaften:

- μ_{ac} ist absolut stetig bzgl. des Lebesguemaßes.
- μ_{sc} ist stetig und singulaer bzgl. des Lebesguemaßes.

- μ_{pp} ist ein reines Punktmaß.

Weiterhin gilt mit $D\mu$ von oben und

$$T := \{x : D\mu(x) = \infty\}, \quad P := \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$$

dann

$$\mu_{ac} = (D\mu)\lambda, \quad \mu_{sing} = 1_T\mu, \quad \mu_{pp} = 1_P\mu, \quad \mu_{sc} = 1_{T \setminus P}\mu.$$

Bemerkung. (a) In den obigen Bezeichnungen steht *ac* fuer 'absolutely continuous', *sc* fuer 'singular continuous' und *pp* fuer 'pure point'.

(b) Der erste Teil der Aussage, naemlich die Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$, hat nichts mit den vorangehenden Betrachtungen zu tun. Es ist der zweite Teil der Aussage, der die vorangehenden Betrachtungen zusammenfasst.

(c) Fuehrt man noch den stetigen ('continuous') Anteil $\mu_{cont} = \mu_{ac} + \mu_{sc}$ ein, so laesst sich die obige Lebesguezerlegung so schreiben

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp} = \mu_{ac} + \mu_{sing} = \mu_{cont} + \mu_{pp}.$$

Dabei unterscheiden sich die Ausdruecke zu den beiden Seiten der letzten Gleichung nur dadurch, daß der Term μ_{sc} verschieden eingruppiert wird.

(d) Es ist recht einfach absolut stetige Masse und reine Punktmasse anzugeben. Es ist nicht so einfach ein singulaer stetiges Mass anzugeben. Wir erinnern hier an ein Beispiel: Sei C die Mittel-Drittel-Cantor-Menge und $F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ die 'Teufelstreppe'. Dann gibt es ein eindeutiges Mass μ auf $[0, 1]$ mit $F(t) = \mu([0, t])$. Dieses Mass hat folgende Eigenschaften (Uebung):

- Es ist μ stetig (da F stetig ist).
- Es ist μ constant auf dem Komplement von C (nach Konstruktion). Insbesondere ist μ auf C getragen. Da C eine Lebesgue-Nullmenge ist, ist dann also μ singulaer.

← Ende der Vorlesung →

Beweis. Das folgt einfach aus dem bisher schon gezeigten:

Wir diskutieren zunaechst die *Existenz* der angegebene Zerlegung. Nach dem Satz zur Lebesguezerlegung gilt

$$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$$

mit eindeutigen absolut stetigen μ_{ac} und singulaeren μ_{sing} . Wir koennen nun μ_{sing} weiter zerlegen in

$$\mu_{sing} = \mu_{sc} + \mu_{pp}$$

mit

$$\mu_{pp} := 1_P\mu_{sing}$$

mit $P = \{x : \mu_{sing}(\{x\}) > 0\}$ und $\mu_{sc} := \mu_{sing} - \mu_{pp}$. Da μ endlich ist, ist auch μ_{sing} endlich und damit ist P abzuehlbar. Damit haben dann μ_{ac} , μ_{sc} und μ_{pp} die angegegebenen Eigenschaften und es gilt offenbar nach Konstruktion $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sc} + \mu_{pp}$.

Die *Eindeutigkeit* der Zerlegung folgt aus der Eindeutigkeit der Zerlegung $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ und der (einfach zu zeigenden) Eindeutigkeit der Zerlegung von μ_{sing} .

Es bleiben die Formeln fuer μ_{ac} , μ_{sc} und μ_{pp} zu zeigen:

Wegen $\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ und der Absolutstetigkeit von μ_{ac} gilt $P = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}$ und mit der Abzählbarkeit von P folgt dann $1_P \mu_{sing} = 1_P \mu$. Weiterhin wissen wir schon, dass $T = \{x : D\mu(x) = \infty\}$ eine Lebesgue - Nullmenge ist (nach einem vorangehenden Theorem), die offenbar die Menge $\{x : D\mu_{sing}(x) = \infty\}$ enthält, die (nach dem vorigen Theorem) ein Träger von μ_{sing} ist. Damit folgt dann also

$$1_T \mu = 1_T \mu_{ac} + 1_T \mu_{sing} = 1_T \mu_{sing} = \mu_{sing}.$$

Das beendet den Beweis.

□

Einige Saetze zu $C(X)$.

In diesem Abschnitt lernen wir einige wichtige Saetze zu $C(X)$ fuer kompakte X kennen:

- Satz von Stone/Weierstrass.
- Satz von Riesz.

Es stellt sich heraus, dass Saetze fuer nichtkompaktes X auf solche fuer kompaktes X zurueckgefuehrt werden koennen mittels Kompaktifizierungen. Daher beginnen wir dieses Kapitel mit einem Abschnitt ueber Kompaktifizierungen.

Erinnerung: Eine Teilmenge K eines topologischen Raum (X, τ) heisst kompakt, wenn jede offene Ueberdeckung von K eine endliche Teilueberdeckung erlaubt. In einem metrischen Raum ist das aequivalent dazu, dass jede Folge in K eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K enthaelt.

Ein topologischer Raum (X, τ) heisst hausdorffsch, wenn es zu beliebigen Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ offene Menge U und V gibt mit $U \cap V = \emptyset$ und $x \in U$ und $y \in V$. Jeder metrische Raum ist hausdorffsch.

Dann gilt:

- abgeschlossenen Teilmengen von kompakten Mengen sind kompakt.
- Ist (X, τ) hausdorffsch, so ist jede kompakte Menge abgeschlossen.

Bemerkung Ist (X, τ) nicht hausdorffsch, so muss eine kompakte Menge nicht abgeschlossen sein, wie folgendes Beispiel zeigt: $X = [0, 1] \times \{0, 1\} / \sim$ mit $(a, b) \sim (c, d)$, wenn $0 \leq a = c < 1$ mit der durch die kanonische Projektion $\pi : [0, 1] \times \{0, 1\}$ induzierten Topologie.

1. Die Einpunkt-Kompaktifizierung

In diesem Abschnitt lernen wir die einfachste Kompaktifizierung kennen.

DEFINITION (Kompaktifizierung). *Eine Kompaktifizierung eines topologischen Raumes (X, τ) ist ein Triple $(\tilde{X}, \tilde{\tau}, \iota)$, so dass $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ ein kompakter Raum ist und $\iota : X \rightarrow \tilde{X}$ ein Homeomorphismus (auf sein Bild) mit dichtem Bild.*

Bemerkung. Ist $(\tilde{X}, \tilde{\tau}, \iota)$ eine Kompaktifizierung von (X, τ) so gilt also folgendes:

- X ist in \tilde{X} enthalten und dicht,
- Topologie von X wird durch Topologie von \tilde{X} erzeugt,
- \tilde{X} ist kompakt.

Jeder Raum kann auf eine sehr einfache Art kompaktifiziert werden:

THEOREM (Einpunkt-Kompaktifizierung). Sei (X, τ) ein nichtkompakter Raum. Sei ∞ ein Punkt, der nicht zu X gehoert. Dann existiert eine eindeutige Kompaktifizierung $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ mit

$$\tilde{X} = X \cup \{\infty\},$$

so dass alle kompakten abgeschlossenen Mengen in X auch bzgl. $\tilde{\tau}$ abgeschlossen sind. Der Raum \tilde{X} ist Hausdorff genau dann, wenn X ein lokal-kompakter Hausdorff Raum ist.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die *Existenz*. Idee: Die Umgebungen von ∞ sind die Komplemente der kompakten Mengen in X .

Sei

$$\tau^{(\infty)} := \{A \subset \tilde{X} : \infty \in A, \tilde{X} \setminus A \text{ abg. u. kompakt}\}.$$

Dann ist $\tau^{(\infty)}$ abgeschlossen unter beliebigen Vereinigungen und endlichen Schnitten. Weiterhin gilt fuer $A \in \tau^{(\infty)}$ und $B \in \tau$ auch

$$A \cap B \in \tau, A \cup B \in \tau^{(\infty)}.$$

(Nachrechnen; beachte $X \setminus A = \tilde{X} \setminus A$!) Damit ist $\tilde{\tau} := \tau \cup \tau^{(\infty)}$ eine Topologie auf \tilde{X} . Nach Definition ist jedes kompakte abgeschlossene $C \subset X$ wegen

$$C = \tilde{X} \setminus \underbrace{(\tilde{X} \setminus C)}_{\in \tau^{(\infty)}}$$

ebenfalls abgeschlossen in $\tilde{\tau}$. Damit hat $\tilde{\tau}$ die definierende Eigenschaft. Es bleibt zu zeigen, dass es sich um eine Kompaktifizierung handelt:

- *ι Homeomorphismus.* Z.z. Einschraenkung von $\tilde{\tau}$ auf X ist gerade τ . Fuer $A \in \tau^{(\infty)}$ ist $A \cap X = X \setminus (\tilde{X} \setminus A)$ offen bzgl. τ . Fuer $A \in \tau$ ist $A \cap X = A$ offen bzgl. τ .
- *X ist dicht in \tilde{X} .* X ist nicht kompakt. Damit enthaelt jedes Element aus $\tau^{(\infty)}$ auch Punkte aus X . Damit enthaelt jede Umgebung von ∞ auch Punkte von X .
- *\tilde{X} ist kompakt.* Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Ueberdeckung von \tilde{X} bestehend aus Elementen von $\tilde{\tau}$. Dann gibt es U_{i_0} , das ∞ enthaelt. Dieses U_{i_0} gehoert dann also zu $\tau^{(\infty)}$. Die uebrigen Mengen bilden dann eine Ueberdeckung des kompakten (!)

$$\tilde{X} \setminus U_{i_0} \subset X.$$

Damit erlauben sie eine endliche Teilueberdeckung.

← Ende der Vorlesung →

Eindeutigkeit. Sei $(X \cup \{\infty\}, \bar{\tau})$ eine Kompaktifizierung.

Sei $U \in \bar{\tau}$. Ist $\infty \notin U$, so gilt $U \subset X$ und $U \in \tau$ folgt aus der Homeomorphismeneigenschaft. Gehoert ∞ zu U , so ist $\tilde{X} \setminus U$ abgeschlossen und kompakt, gehoert also zu $\tau^{(\infty)}$. In jedem Fall ist U ein Element von $\tilde{\tau}$.

Sei $U \in \tilde{\tau}$. Ohne Einschraenkung $U \in \tau^{(\infty)}$. Dann ist also $U = \tilde{X} \setminus C$ mit C abgeschlossen und kompakt. Dann ist C auch abgeschlossen und kompakt bzgl. $\bar{\tau}$. Damit gehoert U auch zu $\bar{\tau}$.

Zur letzten Aussage.

X hausdorffsch, lokalkompakt impliziert \tilde{X} hd. Es reicht $x \in X$ und $\infty \in \tilde{X}$ durch disjunkte Umgebungen zu trennen. Sei C eine kompakte Umgebung

von x (existiert weg. lokalkompakt). Dann sind $\tilde{X} \setminus C$ und C° offene disjunkte Umgebungen von ∞ bzw. x .

\tilde{X} hausdorff impliziert X lokalkompakt, hausdorffsch.

Hausdorffsch: Nach Konstruktion induziert die Topologie von \tilde{X} auf X gerade τ .

Lokalkompakt: Sei $x \in X$ beliebig. Da \tilde{X} hausdorffsch ist, gibt es offene disjunkte Mengen U und V mit $x \in U$ und $\infty \in V$. Betrachte nun

$$W := \tilde{X} \setminus V \subset X.$$

Dann ist W kompakt, da \tilde{X} kompakt, und V offen. Weiterhin enthaelt W die Menge U und ist also eine Umgebung von x . \square

DEFINITION. Die Kompaktifizierung aus dem vorigen Satz heisst Einpunkt-kompaktifizierung oder auch Alexandroff-Kompaktifizierung.

Beispiele.

- $[0, 1)$ hat die Einpunktkompaktifizierung $[0, 1]$.
- $(0, 1)$ hat die Einpunktkompaktifizierung S^1 . (Zeichnung: Ein Punkt ueber gekruemtem Intervall.)
- \mathbb{R} hat die Einpunktkompaktifizierung S^1 (da \mathbb{R} und $(0, 1)$ homeomorph sind mittels \arctan).
- \mathbb{R}^n hat die Einpunktkompaktifizierung $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ mittels stereographischer Projektion. (Zeichnung $n = 1$ und $n = 2$.)

Die letzte Aussage des Satzes laesst sich verallgemeinern und das 'erklaert' die Relevanz lokalkompakter Hausdorffraeume:

FOLGERUNG. Ein topologischer Raum (X, τ) ist genau dann ein lokalkompakter Hausdorffraum genau dann, wenn es sich um einen offene Teilmenge eines kompakten Hausdorffraum $(\tilde{X}, \tilde{\tau})$ handelt.

Beweis. Ist K kompakt und hausdorffsch, so ist jede offene Untermenge U lokalkompakt und hausdorffsch (Denn: Sei $x \in U$ beliebig. Da K kompakt und hausdorffsch ist, koennen das kompakte $K \setminus U$ und das kompakte $\{x\}$ durch offene Mengen voneinander getrennt werden. Es gibt also offene disjunkte Mengen V, W mit $x \in V$ und $K \setminus U \subset W$.)

Ist umgekehrt (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch und nicht kompakt, so ist es nach dem (Beweis des) vorigen Satzes eine - offenbar offene - Teilmenge des kompakten $X \cup \{\infty\}$ \square

THEOREM. Sei X ein nichtkompakter, lokalkompakter Hausdorffraum. Sei \tilde{X} seine Einpunktkompaktifizierung. Dann laesst sich jedes $f \in C_0(X)$ eindeutig zu einer stetigen Funktion $j(f)$ auf $C(\tilde{X})$ fortsetzen mit $j(f)(\infty) = 0$. Die Abbildung

$$j : C_0(X) \longrightarrow \{h \in C(\tilde{X}) : h(\infty) = 0\}, f \mapsto j(f),$$

ist ein bijektiver isometrischer Algebrenhomomorphismus.

Beweis. Einfach (Uebung). Definiere $j(f)$ durch $j(f)(x) = f(x)$ fuer $x \in X$ und $j(f)(\infty) = 0$.

$j(f)$ ist stetig. Klar fuer $x \in X$ und fuer $x = \infty$ auch.

Isometrischer Algebrenhomomorphismus. Offenbar ist die Abbildung ein Algebrenhomomorphismus und es gilt $\|j(f)\|_\infty = \|f\|_\infty$. Insbesondere ist j also injektiv.

Surjektivitaet. Es ist j surjektiv (auf das angegebene Bild, da jedes h im Bild durch Einschraenken auf X eine Funktion aus $C_0(X)$ erzeugt). \square

Bemerkung. Fuer lokalkompakte Hausdorffraeume X gibt es i.a. mehrere Kompaktifizierungen. Die Alexandroff-Kompaktifizierung ist die 'kleinste'. Die 'groesste' ist die sogenannte Stone-Czech Kompaktifizierung. Sie ist dadurch charakterisiert, dass alle beschraenkten stetigen Funktionen auf X zu stetigen Funktionen auf ihr fortgesetzt werden koennen. (Details s. Vorlesung C^* -Algebren.)

2. Der Satz von Stone-Weierstrass.

Es geht darum stetige Funktionen auf einem kompakten Raum durch Funktionen aus einer gegebenen Algebra von Funktionen zu approximieren. Dazu reicht es, wenn

- die Algebra die Punkte trennt und
- nirgends verschwindet.

Insbesondere sind die Polynome auf einem kompakten Intervall in \mathbb{R} dicht. Der Satz von Stone-Weierstrass beruht zutiefst auf Betrachtungen zur Ordnung in \mathbb{R} . Darum werden wir auch zunaechst nur reellwertige Funktionen betrachten.

Ein Vektorraum mit einer assoziaetiven Multiplikation heisst *Algebra*. Eine Algebra mit einer submultiplikativen Norm heisst Banachalgebra, wenn der Vektorraum vollstaendig ist bzgl. der Norm.

Beispiel. (X, τ) topologischer Raum. Dann ist $C_b(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig und beschraenkt}\}$ mit $\|\cdot\|_\infty$ eine Banachalgebra.

Beispiel. (X, τ) kompakter topologischer Raum. Dann ist $C(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig}\} = C_b(X)$ mit $\|\cdot\|_\infty$ ein Banachalgebra.

Beispiel. Sei (X, τ) ein lokal kompakter topologischer Raum (i.e. jeder Punkt hat eine kompakte Umgebung). Dann setzt man

$$C_0(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists K \subset X \text{ kompakt mit } |f(x)| \leq \varepsilon \text{ auf } X \setminus K\}.$$

Dann ist $C_0(X)$ eine abgeschlossene Teilalgebra von $C_b(X)$ und damit eine vollstaendige Algebra bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Notation. $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \vee g := \max\{f, g\}$, $f \wedge g := \min\{f, g\}$.

LEMMA (Approximation in zwei Punkten impliziert gleichmaessige Approximation). *Sei X kompakter Hausdorffraum und \mathcal{A} ein Vektorraum von stetigen reellwertigen Funktionen auf X . Sei \mathcal{A} abgeschlossen unter Bildung von Minima und Maxima. Dann gilt: Kann das stetige $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ in jedem Paar von Punkten aus X durch Funktionen aus \mathcal{A} beliebig gut approximiert werden, so kann f gleichmaessig durch Funktionen aus \mathcal{A} approximiert werden.*

Beweis. Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert nach Voraussetzung zu $x, y \in X$ eine Funktion $f_{x,y}$ mit

$$f_{x,y}(z) - \varepsilon < f(z) < f_{x,y}(z) + \varepsilon$$

fuer $z \in \{x, y\}$. Da f stetig ist, gehoeren dann also x und y zu

$$U_{x,y} := \{z \in X : f(z) < f_{x,y}(z) + \varepsilon\}$$

und

$$V_{x,y} := \{z \in X : f_{x,y}(z) < f(z) + \varepsilon\}.$$

Fuer festes $x \in X$ ist dann also $\{U_{x,y} : y \in X\}$ eine offene Ueberdeckung von X . Da X kompakt ist, existieren dann $y_1, \dots, y_N \in X$ mit

$$X = \cup_{k=1}^N U_{x,y_k}.$$

Dann gehoert

$$f_x := f_{x,y_1} \vee \dots \vee f_{x,y_N} \quad (\textit{Maximum})$$

zu \mathcal{A} und es gilt nach Konstruktion

$$(*) \quad f(z) < f_x(z) + \varepsilon$$

fuer **alle** $z \in X$ sowie

$$(**) \quad f_x(z) < f(z) + \varepsilon$$

fuer alle

$$z \in W_x := \cap_{k=1}^N V_{x,y_k}.$$

Da $W_x, x \in X$, offen sind, bilden sie eine offene Ueberdeckung des kompakten X . Damit existieren dann also x_1, \dots, x_M mit

$$X = \cup_{l=1}^M W_{x_l}.$$

Dann gehoert

$$f_\varepsilon := f_{x_1} \wedge \dots \wedge f_{x_M} \quad (\textit{Minimum})$$

zu \mathcal{A} und es gilt nach Konstruktion

$$f_\varepsilon - \varepsilon \stackrel{(**)}{<} f(z) \stackrel{(*)}{<} f_\varepsilon(z) + \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

LEMMA (Vollstaendige Algebra ist abgeschlossen unter Minima und Maxima). *Sei X ein topologischer Raum und \mathcal{A} eine vollstaendige Teilalgebra von $(C_b(X), \|\cdot\|_\infty)$. Dann ist \mathcal{A} abgeschlossen unter Bilden von Minima und Maxima.*

Beweis. Wir skizzieren zunaechst kurz die **Idee**:

\mathcal{A} Algebra

\implies

Polynome

$\xrightarrow{\textit{vollst.}}$

Grenzwerte von Polynomen mit verschwindendem konstantem Term von Elementen aus \mathcal{A} gehoeren zu \mathcal{A}

\implies

\sqrt{f} gehoert zu \mathcal{A} fuer $f \geq 0$

$$\implies$$

$|f| = \sqrt{f^2}$ gehoert zu \mathcal{A}

$$\implies$$

$\min\{f, g\}, \max\{f, g\}$ gehoeren zu \mathcal{A} .

(Man beachte, dass bei diesem Schluss die Approximation EINER Funktion naemlich der Wurzel durch Polynome mit nichtverschwindender Konstanter verwendet wird.)

Hier nun die Details: Sei $\varepsilon > 0$. Dann hat $t \mapsto (\varepsilon^2 + t)^{1/2}$ eine Reihenentwicklung z.B. um $t = 1/2$, die auf $[0, 1]$ gleichmaessig konvergiert (vgl. Analysis I). Damit existiert also ein Polynom p mit

$$|(\varepsilon^2 + t)^{1/2} - p(t)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $t \in [0, 1]$. Insbesondere gilt also

$$|p(0)| \leq 2\varepsilon.$$

Sei nun $q := p - p(0)$. (Dann hat also q verschwindenden konstanten Anteil.) Dann gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} |q(t) - t^{1/2}| &\leq \sup_{0 \leq t \leq 1} |p(t) - p(0) - t^{1/2}| \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} |p(t) - (\varepsilon^2 + t)^{1/2} + (\varepsilon^2 + t)^{1/2} - t^{1/2} - p(0)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + 2\varepsilon \\ &= 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit gilt fuer $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$ also

$$\|q(f^2) - |f|\|_\infty \leq 4\varepsilon.$$

Da q verschwindenden konstanten Anteil hat, ist weiterhin $q(f) \in \mathcal{A}$ fuer jedes $f \in \mathcal{A}$. Da \mathcal{A} vollstaendig ist und $\varepsilon > 0$ beliebig, folgt also, dass $|f| \in \mathcal{A}$ fuer jedes $f \in \mathcal{A}$ mit $\|f\|_\infty \leq 1$. Damit folgt dann $|f| \in \mathcal{A}$ fuer jedes $f \in \mathcal{A}$. Damit folgt nun

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \in \mathcal{A} \quad (\text{Maximum})$$

$$f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|) \in \mathcal{A} \quad (\text{Minimum})$$

fuer alle $f, g \in \mathcal{A}$. □

THEOREM (Stone-Weierstrass, reelle Version). *Sei X ein kompakter Hausdorff Raum. Sei \mathcal{A} eine Algebra von reellwertigen stetigen Funktionen auf X mit folgenden Eigenschaften:*

- *Es verschwindet \mathcal{A} in keinem Punkt von X (d.h. zu jedem $x \in X$ existiert $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq 0$).*
- *Es trennt \mathcal{A} die Punkte von X (d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$).*

Dann ist \mathcal{A} dicht in den stetigen reellwertigen Funktionen auf X bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Bemerkung. Die erste Bedingung ist insbesondere erfuehlt, falls die konstanten Funktionen zu \mathcal{A} gehoeren (und so wird der Satz auch oft in der Literatur zitiert).

Beweis. Der Abschluss $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ ist eine vollstaendige Algebra von reellen stetigen Funktionen auf X . Damit ist \mathcal{B} nach dem vorigen Lemma abgeschlossen unter Bildung von Minima und Maxima.

Behauptung. Zu beliebigem zwei Punkten $x, y \in X$ und $a, b \in \mathbb{R}$ kann man eine Funktion h in \mathcal{A} finden mit $h(x) = a$ und $h(y) = b$:

Bew. Sei zunaechst f mit $f(x) \neq f(y)$ gewaehlt. Ist $f(x), f(y) \neq 0$, so kann man aus f und $g = f^2$ das gewuenschte h linearkombinieren, da

$$\det \begin{pmatrix} f(x) & f^2(x) \\ f(y) & f^2(y) \end{pmatrix} = (f(x)f(y))(f(x) - f(y)) \neq 0.$$

Verschwundet f in o.E. x , so waehlen wir noch ein g mit $g(x) \neq 0$ und koennen wieder aus f und g das gewuenschte h linearkombinieren.

Wegen $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ kann man also insbesondere jede stetige reelle Funktion in zwei Punkten durch Funktionen aus \mathcal{B} beliebig gut approximieren.

Zusammengenommen folgt dann aus dem ersten Lemma, dass \mathcal{B} dicht in den stetigen reellen Funktionen auf X ist. Da \mathcal{A} dicht in \mathcal{B} ist, folgt die Behauptung. \square

Bemerkungen.

- Fuer die Algebra der Polynome auf einem kompakten Intervall wurde der Satz zuerst von Weierstrass bewiesen. Offenbar gilt er auch fuer die Algebra der Polynome mit verschwindendem konstanten Term.
- Ein entscheidender Schritt unseres Beweises besteht darin, zu zeigen, dass die Polynome (mit verschwindendem konstantem Term) die Betragsfunktion auf $[-1, 1]$ gleichmaessig approximieren.
- Setzt man fuer die Algebra \mathcal{A} nur Punktetrennung voraus, so gilt $\overline{\mathcal{A}} = C(X)$ oder $\overline{\mathcal{A}} = C(X \setminus \{x_0\})$ fuer ein $x_0 \in X$. (Uebung: Analog zu obigem Beweis: Man kann alle Funktionen aus der angegebenen Menge in zwei beliebigen Punkten beliebig gut approximieren).

THEOREM (Satz von Stone/Weierstrass-komplexe Version). *Sei X ein kompakter, hausdorffscher Raum. Sei \mathcal{A} eine Teilalgebra von $C(X)$, so dass gilt:*

- *Es verschwindet \mathcal{A} nirgends.*
- *Es trennt \mathcal{A} die Punkte von X .*
- *Es ist \mathcal{A} selbstadjungiert (d.h. mit $f \in \mathcal{A}$ gehoert auch \bar{f} zu \mathcal{A}).*

Dann ist \mathcal{A} dicht in $C(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis. Betrachte $\Re\mathcal{A} := \{\Re f : f \in \mathcal{A}\}$ und $\Im\mathcal{A} := \{\Im f : f \in \mathcal{A}\}$. Dann sind $\Re\mathcal{A}$ und $\Im\mathcal{A}$ nach der dritten Voraussetzung Teilmengen von \mathcal{A} und natuerlich reelle Algebren (da Multiplikation etc nicht aus ihnen herausfuehrt). Damit gilt nach dem vorigen Satz also, dass $\Re\mathcal{A}$ und $\Im\mathcal{A}$ dicht in den reellen stetigen Funktionen auf X sind. Damit folgt die Aussage aus

$$\mathcal{A} = \Re\mathcal{A} + i\Im\mathcal{A}.$$

Das beendet den Beweis. \square

FOLGERUNG (Stone/Weierstrass fuer lokalkompakte Raeume). Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und \mathcal{A} eine Teilalgebra von $C_0(X)$, die die Punkte trennt, nirgends verschwindet und selbstadjungiert ist. Dann ist \mathcal{A} dicht in $C_0(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$.

← Ende der Vorlesung →

Beweis. Sei $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von X . Dann koennen wir \mathcal{A} in natuerlichen Weise in $C(\tilde{X}) = X \cup \{\infty\}$ eingebetten (indem wir jede Funktion $f \in \mathcal{A}$ auf dem zusaetzlichen Punkt ∞ durch den Wert 0 fortsetzen). Wir betrachten nun $\mathcal{B} := \mathcal{A} + \mathbb{C}1$. Dann gilt:

- Es ist \mathcal{B} eine selbstadjungierte Teilalgebra von $C(\tilde{X})$.
- Es trennt \mathcal{B} die Punkte von \tilde{X} (! es trennt \mathcal{A} die Punkte von X und verschwindet dort nicht).
- Es verschwindet \mathcal{B} nirgends (da es die konstante Funktion 1 enthaelt).

Damit folgt aus dem Satz von Stone/Weierstrass, dass es zu jedem $f \in C_0(X)$ ein $g \in \mathcal{B}$ gibt mit $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. Nach Definition von \mathcal{B} gibt es dann $h \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $g = h + \lambda 1$ und damit also

$$\|f - (h + \lambda 1)\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Durch Einsetzen bei ∞ und Nutzen von $f(\infty) = 0 = h(\infty)$ folgt $|\lambda| \leq \varepsilon$ und damit

$$\|f - h\|_\infty \leq 2\varepsilon.$$

Wegen $h \in \mathcal{A}$ folgt die gewuenschte Aussage und das beendet den Beweis. \square

Bemerkung. Laesst man die Voraussetzung der Selbstadjungiertheit weg, so gilt eine entsprechende Aussage fuer reellwertige Funktionen.

Bemerkung. Beim Satz von Stone-Weierstrass (und seiner Folgerung) ist die dritte Voraussetzung notwendig, wie folgendes Beispiel zeigt: (Wir verwenden hier Grundlagen der Funktionentheorie; vgl. fruerehen Exkurs in der Vorlesung.) Sei

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

$$H(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ stetig auf } D \text{ und holomorph auf } D^\circ\}.$$

Dann ist $H(D)$ vollstaendig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (klar, da Cauchy-Integral Formel unter gleichmaessiger Konvergenz stabil ist....). Weiterhin enthaelt $H(D)$ die konstanten Funktionen (klar) und trennt die Punkte (da $id \in H(D)$). Waere es dicht in $C(D)$, so muesste es mit $C(D)$ uebereinstimmen (da es vollstaendig ist). ABER: Nicht jede stetige Funktion auf D ist holomorph (z.B. ist die Abbildung $z \mapsto \bar{z}$ stetig, aber nicht komplex differenzierbar).

Anwendungen des Satz von Stone-Weierstrass und seiner Folgerung.

- Sei $X = [0, 1]$ und \mathcal{A} die Algebra der Polynome. Dann ist \mathcal{A} dicht in $C([0, 1])$. Gleiches gilt fuer die Algebra der Polynome mit verschwindendem konstantem Term.

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stone-Weierstrass. \square

- Sei $X = S = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Es ist $\text{Lin}\{e^{in} : n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $C(S)$. Insbesondere bilden die $\{e^{in} : n \in \mathbb{Z}\}$, eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2(S)$.

Beweis. Offenbar handelt es sich um eine Algebra. Diese trennt die Punkte, verschwindet nirgends, und ist selbstadjungiert. Dichtheit dieser Algebra in $C(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ (und damit auch bzgl. $\|\cdot\|_2$!) folgt nun nach Stone/Weierstrass. Da $C(S)$ dicht in $L^2(S)$ bzgl. $\|\cdot\|_2$ ist, folgt die letzte Behauptung. \square

- Seien X, Y kompakte Hausdorffraeume. Fuer $f \in C(X)$ und $g \in C(Y)$ sei

$$f \otimes g : X \times Y \longrightarrow \mathbb{C}, f \otimes g(x, y) := f(x)g(y).$$

Dann ist $\text{Lin}\{f \otimes g : f \in C(X), g \in C(Y)\}$ dicht in $C(X \times Y)$.

Beweis. Es handelt sich offenbar um eine Algebra. Damit folgt die Aussage aus dem Satz von Stone/Weierstrass. \square

- Sei $X = [0, \infty)$. Sei fuer $t > 0$ die Funktion e_t definiert durch

$$e_t : X \longrightarrow \mathbb{R}, e_t(s) := e^{-ts}.$$

Dann ist $\text{Lin}\{e_t : t \geq 0\}$ eine Algebra, die dicht in $C_0([0, \infty))$ ist.

Beweis. Offenbar handelt es sich um eine Algebra. Sie ist dicht nach der Folgerung (Satz von Stone-Weierstrass fuer lokalkompakte Raeume). \square

- Sei $X = \mathbb{R}$. Sei fuer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ die Funktion f_λ definiert durch

$$f_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, f_\lambda(t) := \frac{1}{t - \lambda}.$$

Sei $\mathcal{A} := \text{Lin}\{f_\lambda : \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}$. Dann ist \mathcal{A} dicht in $C_0(\mathbb{R})$. Tatsaechlich reicht es λ aus einer Teilmenge von $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zu betrachten, die einen geeigneten Haefungspunkt hat.

Beweis. Das folgt aus der Folgerung (Satz von Stone-Weierstrass fuer lokalkompakte Raeume). Details werden als Uebung ueberlassen. Tipp: Es gilt $f_\lambda - f_\mu = (\mu - \lambda)f_\lambda f_\mu \dots$. \square

3. Der Rieszsche Darstellungssatz

In diesem Abschnitt lernen wir einen wichtigen Satz ueber positive Funktionale auf $C(X)$ kennen. Tatsaechlich werden wir sogar einen etwas allgemeineren Rahmen wahlen.

Erinnerung. Sei (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch. Dieser Raum ist in natuerlicher Weise mit der Borel- σ -Algebra versehen (und so werde wir ihn auch in Zukunft als messbaren Raum betrachten). Die Borel- σ -Algebra ist die von den offenen Mengen erzeugte σ -Algebra. Sie enthaelt alle kompakten Mengen (da das Komplement einer kompakten Menge offen ist).

Weiterhin definiert man

$$C_c(X) := \{f \in C(X) : f \text{ verschwindet ausserhalb eines Kompaktum}\}.$$

Schliesslich gilt in einem lokalkompaktem Hausdorffraum das Lemma von Urysohn: $K \subset X$ kompakt, $K \subset U$. Dann existiert ein $f \in C_c(X)$ mit $1_K \leq f$ und $\text{supp}(f) \subset U$. (Zeichnung.)

DEFINITION (Regulaeritaet von Maessen). Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei μ ein Mass auf der Borel- σ -Algebra von (X, τ) .

- Gilt

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ offen}\}$$

fuer jedes messbare E , so heisst μ von aussen regulaer.

- Gilt

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$$

fuer jedes messbare E , so heisst μ von innen regulaer.

- Ist μ von innen und aussen regulaer, so heisst es regulaer.
- Ist μ auf allen Kompakta endlich, so heisst es Borelmaess.

Die Relevanz von (mehr oder weniger) regulaeren Borelmaessen ergibt sich daraus, dass diese gerade den positiven Funktionalen auf $C_c(X)$ entsprechen. Details werden im folgenden diskutiert.

Ist (X, τ) ein lokalkompakter Hausdorffraum, so heisst eine Abbildung $\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ positiv, wenn

$$\Lambda(f) \geq 0$$

fuer alle $f \in C_c(X)$ mit $f \geq 0$ gilt. Ist μ ein Borelmaess auf dem lokalkompakten Hausdorffraum (X, τ) , so gehoert jedes $f \in C_c(X)$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mu)$. (Denn es ist f stetig also messbar und erfuellt $0 \leq |f| \leq \|f\|_\infty 1_K$ mit einem geeigneten kompakten K . Die Funktion 1_K gehoert aber zu $\mathcal{L}^1(X, \mu)$, da μ ein Borelmaess ist.) Damit existiert also $\int f d\mu$ fuer alle $f \in C_c(X)$. Die Abbildung

$$\Lambda_\mu : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X f(x) d\mu(x),$$

ist dann offenbar ein positives lineares Funktional. Es gilt auch eine Umkehrung, naemlich folgender gefeierter Satz.

THEOREM (Rieszscher Darstellungssatz). Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Sei $\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv. Dann gibt es ein eindeutiges Borelmaess μ auf X mit

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \quad (*)$$

und

- $\mu(E) = \inf\{\mu(V) : E \subset V, V \text{ offen}\}$ fuer jedes messbare E , 'von aussen regulaer'
- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$ fuer jedes offene E . 'fast von innen regulaer'

Fuer dieses Mass μ gilt auch noch

- $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subset E, K \text{ kompakt}\}$ fuer jedes messbare E mit $\mu(E) < \infty$.

Beweis. Wir geben hier keinen Beweis, sondern verweisen etwa Heinz Bauer *Maß- und Integrationstheorie*, de Gruyter (1990): Der erste Teil der Aussage findet sich in Kapitel 29, Satz 29.4 und der letzte Teil der Aussage folgt dann gerade aus Korollar 28.5.

Als *Beweisskizze* mag folgendes dienen: Für das kompakte K definiert man

$$\tilde{\mu}(K) := \inf\{\Lambda(f) : f \geq 1_K\}.$$

(Solche f gibt es nach Urysohnschem Lemma). Dann definiert man für offenes U

$$\tilde{\mu}(U) := \sup\{\tilde{\mu}(K) : K \subset U, K \text{ kompakt}\}.$$

Schliesslich definiert man für beliebiges E dann

$$\tilde{\mu}(E) := \inf\{\tilde{\mu}(V) : E \subset V, V \text{ offen}\}.$$

Dann lässt sich zeigen, dass die Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf die Borelmengen ein Mass ist. Dieses Mass hat dann (mehr oder weniger nach Konstruktion) die genannten Regularitätseigenschaften und erfüllt (*). \square

Bemerkungen.

- Ein Mass μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ für alle $f \in C_c(X)$ heisst *Darstellungsmaß* für Λ . Im allgemeinen gibt es mehrere Darstellungsmaße.
- Ist μ ein Darstellungsmaß, so hat jedes kompakte K endliches Mass, da es (nach dem Urysohnschen Lemma) Funktionen $f \in C_c(X)$ gibt mit $f \geq 0$ und $f \geq 1_K$. Ein Darstellungsmaß ist also automatisch ein Borelmaß.
- Der Satz behauptet NICHT die Existenz oder Eindeutigkeit eines regulären Darstellungsmaßes. Das ist unbefriedigend, aber nicht zu ändern (da es Beispiele gibt, in denen das angegebene μ nicht von innen regulär ist (s.u.)). Wir werden aber weiter unten sehen, dass
 - im Falle kompakter Räume Regularität gilt (es also ein eindeutiges reguläres Darstellungsmaß gibt),
 - und im Fall von Räumen mit starken Abzählbarkeitseigenschaften der Topologie die Regularität jedes Darstellungsmaßes gilt (und es damit ein eindeutiges Darstellungsmaß gibt).
- In der Situation des Theorem ist $C_c(X)$ dicht in L^p . Genauer gilt folgendes: Sei (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch und ν ein Borelmaß auf X , so dass gilt
 - ν ist von aussen regulär.
 - ν ist 'für offenen Mengen von Innen regulär'.

Dann ist $C_c(X)$ dicht in $L^p(X, \nu)$ für $1 \leq p < \infty$. Insbesondere ist dann also ν durch seine Werte auf $C_c(X)$ eindeutig bestimmt. (Wir geben hier keinen Beweis, verweisen aber auf den Beweis des Approximationssatz in Abschnitt 1 für einen verwandten Schluss.)

Das Theorem behandelt eine sehr allgemeine Situation. In etwas spezielleren Situationen erhält man stärkere Aussagen. Wir werden zwei solche Situationen näher betrachten:

- X ist kompakt.

- Die Topologie von X hat starke Abzaehlbarkeitseigenschaften.

Fuer kompakte Raeume halten wir zunaechst noch folgende Stetigkeitseigenschaft positiver Funktionale fest.

LEMMA. *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv. Dann ist Λ stetig (bzgl. der Supremumnorm, $\|\cdot\|_\infty$, auf $C(X)$).*

Bemerkung. Damit wird dann das Studium positiver Funktionale ein Teil des Studiums stetiger Funktionale. Diesen Aspekt werden wir im kommenden Abschnitt wieder aufgreifen.

Beweis. Wir muessen $C \geq 0$ mit $|\Lambda(f)| \leq C\|f\|_\infty$ finden. Wir betrachten zunaechst reellwertige f . Fuer solche f gilt

$$-\|f\|_\infty 1 \leq f \leq \|f\|_\infty 1$$

mit der konstanten Funktion 1 auf X . Anwenden von Λ liefert (unter Nutzen der Positivitaet) dann

$$-\|f\|_\infty \Lambda(1) \leq \Lambda(f) \leq \|f\|_\infty \Lambda(1)$$

also

$$|\Lambda(f)| \leq \|f\|_\infty \Lambda(1).$$

(Hier wurde die Kompaktheit in Form von $1 \in C(X)$ genutzt.) Fuer allgemeine f mit $f = u + iv$ mit reellwertigen u, v in $C(X)$ schliessen wir dann

$$|\Lambda(f)| = |\Lambda(u) + i\Lambda(v)| \leq \Lambda(1)(\|u\|_\infty + \|v\|_\infty) \leq 2\Lambda(1)\|f\|_\infty.$$

Das beendet den Beweis. \square

THEOREM (Satz von Riesz fuer kompakte Raeume). *Sei X ein kompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ linear und positiv. Dann gibt es ein eindeutiges regulares MaB μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ fuer alle $f \in C(X)$. Es ist μ endlich (also insbesondere ein BorelmaB) mit*

$$\mu(X) = \Lambda(1) = \|\Lambda\|.$$

Beweis. Existenz und Eindeutigkeit von μ folgen sofort aus dem vorigen Satz. Dabei nutzen wir, dass fuer kompaktes X natuerlich $C(X) = C_c(X)$ gilt und aus der Endlichkeit von $\mu(X) = \Lambda(1)$ auch die Endlichkeit des Masses von jeder messbaren Teilmenge von X folgt und man damit auch die innere Regulaeritaet aus dem vorigen Satz schliessen kann.

Zur letzten Aussage: Die erste Gleichung ist klar. Die Abschaetzung \leq der zweiten Gleichung ist klar. Die Abschaetzung \geq der zweiten Gleichung folgt sofort aus der Dreiecksungleichung der Integration. \square

Wir halten auch noch folgende Variante fest.

THEOREM (Stetige positive Funktionale auf $C_0(X)$). *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\Lambda : C_0(X) \rightarrow \mathbb{C}$ linear, stetig (bzgl. Supremumnorm) und positiv (d.h. $\Lambda(f) \geq 0$ fuer $f \geq 0$). Dann existiert ein eindeutiges regulares endliches Mass μ auf X mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$ fuer alle $f \in C_0(X)$. Es gilt*

$$\mu(X) = \|\Lambda\|_\infty.$$

Bemerkung. Im Unterschied zum Falle des kompakten X muessen wir hier zusaetzlich zur Positivitaet noch die Stetigkeit fordern.

Beweis. Wir betrachten die Einpunktkompaktifizierung $\tilde{X} = X \cup \{\infty\}$ von X . Dann laesst sich jedes $f \in C(\tilde{X})$ eindeutig schreiben als

$$f = (f - f(\infty)1) + f(\infty)1,$$

wobei 1 wieder die konstante Funktion mit Wert 1 bezeichnet. Sei g die Einschraenkung der Funktion $f - f(\infty)1$ auf X .

Behauptung. Es gehoert g zu $C_0(X)$.

Beweis der Behauptung: Die Funktion $\tilde{g} = f - f(\infty)1$ auf \tilde{X} ist stetig (als Differenz stetiger Funktionen) mit $\tilde{g}(\infty) = 0$. Damit gibt es dann also fuer jedes $\varepsilon > 0$ eine offene Umgebung U von ∞ mit

$$|\tilde{g}(x)| = |\tilde{g}(x) - \tilde{g}(\infty)| \leq \varepsilon$$

fuer alle $x \in U$. Damit ist dann g stetig mit $|g(x)| \leq \varepsilon$ fuer alle x aus $U \cap X$. Da $X \setminus U$ kompakt ist (nach Definition der Topologie auf \tilde{X}) gehoert dann g zu $C_0(X)$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Damit koennen wir dann auf $C(\tilde{X})$ ein lineares Funktional $\tilde{\Lambda}$ definieren durch

$$\tilde{\Lambda}(f) = \Lambda(g) + f(\infty)\|\Lambda\|.$$

Offenbar ist $\tilde{\Lambda}$ linear.

Behauptung. Es ist $\tilde{\Lambda}$ positiv.

Beweis der Behauptung: Sei $0 \leq f$ gegeben.

Setze

$$g := (f - f(\infty)1) = g_+ - g_-$$

mit dem Positiv- und Negativteil g_{\pm} von g . Dann folgt aus

$$0 \leq f = (f - f(\infty)1) + f(\infty)1 = g_+ - g_- + f(\infty)$$

sofort

$$\|g_-\|_{\infty} \leq f(\infty)$$

(da die Traeger von g_- und g_+ 'disjunkt' sind). Wegen der Positivitaet von Λ gilt weiterhin $\Lambda(g_{\pm}) \geq 0$. Wegen der Beschraenktheit von Λ folgt schliesslich auch $0 \leq \Lambda(g_-) = |\Lambda(g_-)| \leq \|\Lambda\|\|g_-\|_{\infty}$ also auch

$$-\Lambda(g_-) \geq -\|\Lambda\|\|g_-\|_{\infty}.$$

Setzt man das zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}(f) &= \Lambda(g) + \|\Lambda\|f(\infty) \\ &= \Lambda(g_+) - \Lambda(g_-) + \|\Lambda\|f(\infty) \\ (\Lambda(g_+) \geq 0) &\geq -\Lambda(g_-) + \|\Lambda\|f(\infty) \\ (-\Lambda(g_-) \geq -\|\Lambda\|\|g_-\|_{\infty}) &\geq -\|\Lambda\|\|g_-\|_{\infty} + \|\Lambda\|f(\infty) \\ &= \|\Lambda\|(-\|g_-\|_{\infty} + f(\infty)) \\ (\|g_-\|_{\infty} \leq f(\infty)) &\geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Damit gibt es also nach dem Satz von Riesz fuer kompakte Raeume ein eindeutiges regulaeres Borelmaß $\tilde{\mu}$ auf \tilde{X} mit

$$\tilde{\Lambda}(f) = \int f d\tilde{\mu}$$

fuer alle $f \in C(\tilde{X})$ und dieses Mass ist endlich. Mit der Einschraenkung μ von $\tilde{\mu}$ auf X gilt also fuer alle $g \in C_0(X)$

$$\Lambda(g) = \bar{\Lambda}(g) = \int g d\bar{\mu} = \int g d\mu.$$

(Dabei benutzen wir im letzten Schritt, dass g auf ∞ verschwindet.) Weiterhin ist μ endlich (da offenbar gilt $\mu(X) \leq \tilde{\mu}(\tilde{X}) < \infty$). Nach der Dreiecksungleichung der Integration gilt dann

$$|\Lambda(g)| \leq \|g\|_{\infty} \mu(X)$$

fuer alle $g \in C_0(X)$. Damit folgt also

$$\|\Lambda\| \leq \mu(X).$$

Setzt man andererseits $f \equiv 1$ (also $f = g + f(\infty)1$ mit $g = 0$ und $f(\infty) = 1$) in $\tilde{\Lambda}$ ein, so ergibt sich

$$\mu(X) \leq \tilde{\mu}(\tilde{X}) = \tilde{\Lambda}(f) = \|\Lambda\|.$$

(Dabei haben wir in der letzten Gleichheit die Definition von $\tilde{\Lambda}$ genutzt). Insgesamt folgt also $\mu(X) = \|\Lambda\|$. \square

Bemerkung. Der Beweis zeigt auch, dass das Mass $\tilde{\mu}$ in dem Punkt ∞ keine Masse hat (da die Gesamtmasse von $\tilde{\mu}$ gerade $\|\Lambda\| = \mu(X)$ ist).

Wir untersuchen nun den Fall, dass die Topologie auf X starke Abzaehlbarkeitseigenschaften hat. In diesem Fall sind die Regulaeritaetseigenschaften eines Masses automatisch erfuellt, wenn es auf Kompakta endlich ist. Wir **erinnern** daran, dass ein Topologie ein *endliche Basis* hat, wenn es eine abzählbare Familie von offenen Mengen gibt, so dass jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus dieser Familie ist.

LEMMA (Automatische Regulaeritaet von Massen). *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. Sei μ ein Borelmaß auf X . Dann ist μ regulaer.*

Beweis. Das ist gerade Satz 29.12 in Heinz Bauer *Maß- und Integrations-theorie*, de Gruyter (1990). \square

Beispiele fuer Raeume mit abzählbarer Basis der Topologie.

- Ist X kompakt und metrisierbar, so ist die Topologie durch eine abzählbare Basis der Topologie erzeugt. (Uebung)
- Die Topologie des Euklidischen Raumes hat eine abzählbare Basis der Topologie. (Kugeln mit rationalen Radien um rationale Punkte...)

Mit dem vorangehenden Lemma ergibt sich aus dem Rieszschen Darstellungssatz sofort:

THEOREM (Rieszscher Darstellungssatz fuer Raerume mit abzählbarer Basis der Topologie). *Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. Dann existiert zu jedem positiven linearen Funktional $\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}$ ein eindeutiges Borelmaß μ mit $\Lambda(f) = \int f d\mu$.*

Bemerkung. Fuer viele Anwendungen ist die Voraussetzung der abzählbaren Basis der Topologie erfuehlt. In dieser Situation ist dann nach dem vorigen Satz die Abbildung

$$\text{Borelmaße} \rightarrow \text{Positive lineare Funktionale auf } C_c(X), \mu \mapsto \Lambda_\mu,$$

mit

$$\Lambda_\mu(f) := \int f d\mu \text{ fuer } f \in C_c(X)$$

eine Bijektion.

Beispiele.

- Sei $c_c = c_c(\mathbb{N})$ und $\Lambda : c_c \rightarrow \mathbb{C}, \Lambda(f) = \sum f(x)$. Dann ist $\Lambda(f) = \int f d\mu$ mit dem Zaehlmass μ .
- Sei $\Lambda : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}, \Lambda(f) := \text{Riemanintetgral von } f$. Dann ist $\Lambda(f) = \int f d\lambda$ mit dem Lebesguemass λ .
- Haarmass auf lokalkompakten Gruppen G wird ueblicherweise ueber ein lineares translationsinvariantes Funktional auf $C_c(G)$ konstruiert.

Gegenbeispiele. Sei $X_1 = \mathbb{R}$ mit der diskreten Topologie und $X_2 = \mathbb{R}$ mit der ueblichen Topologie und $X = X_1 \times X_2$ mit der Produkttopologie. (Zeichnung). Dann gilt:

$U \subset X$ offen $\iff p^{-1}(\{x\}) \cap U$ offen in \mathbb{R} bzgl ueblicher Topologie fuer jedes $x \in \mathbb{R}$.

(Hier ist p die Projektion auf die X_1 -Komponente.) Damit ist $K \subset X$ genau dann kompakt wenn $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und kompakte (in der ueblichen Topologie) Teilmengen $K_1, \dots, K_n \subset \mathbb{R}$ existieren mit

$$K = \cup_{j=1}^n \{x_j\} \times K_j.$$

Insbesondere ist X lokalkompakt und hausdorffsch. Die Abbildung

$$\Lambda : C_c(X) \rightarrow \mathbb{C}, \Lambda(f) = \sum_{x \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x, y) dy$$

ist wohldefiniert (nur endlich viele Summanden, da f kompakten Traeger hat). Das zugehoerige Mass ist auf Kompakta gegeben durch

$$\mu = \sum_{x \in \mathbb{R}} \lambda|_{\{x\} \times \mathbb{R}}.$$

Fuer

$$T = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$$

gilt also

$$\begin{aligned} \mu(K) &= 0 \text{ fuer jedes } K \subset T \text{ kompakt} \\ \mu(U) &= \infty \text{ fuer jedes } T \subset U \text{ offen.} \end{aligned}$$

Es ist μ also nicht regulaer, sondern nur von aussen regulaer. (Nach Satz ist μ von aussen regulaer.)

Der Dualraum von $C(X)$

Im letzten Abschnitt haben wir fuer einen kompakten Hausdorffraum X die positive Funktionale auf $C(X)$ studiert. Diese sind automatisch stetig und gerade gegeben durch die positiven regularen Borelmaße. (Wir haben ausserdem gesehen, dass Regularitaet automatisch gilt, wenn die Topologie eine abzählbare Basis hat und, dass noch allgemeiner Aussagen fuer positive Funktionale auf $C_c(X)$ gelten.) In diesem Abschnitt studieren wir den Dualraum von $C(X)$ d.h. den Vektorraum aller stetigen linearen Funktionale auf $C(X)$.

1. Der Vektorraum der regularen Borelmaße

Erinnerung. Absolute Variation eines Masses: Sei (X, \mathcal{A}) ein Raum mit einer Sigma-Algebra. Ein komplexes Mass μ ist eine σ -additive Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Das heisst, dass fuer jedes Folge (A_j) disjunkter Mengen in \mathcal{A} gilt

$$\mu(\cup A_j) = \sum \mu(A_j)$$

mit absolut konvergenter Summe. Die *absolute Variation* $|\mu|$ von μ ist definiert durch

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_j |\mu(A_j)| : A = \cup_j A_j \text{ mit } A_j \in \mathcal{A} \right\}.$$

Dann ist $|\mu|$ ein beschraenktes Mass auf X mit

$$|\mu(E)| \leq |\mu|(E)$$

fuer alle messbaren E (und es ist $|\mu|$ das kleinste Mass auf X mit dieser Eigenschaft).

LEMMA (Polarzerlegung der komplexen Borelmaße). *Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und μ ein komplexes Mass auf X . Dann existiert ein (bis auf $|\mu|$ -Nullmengen eindeutig bestimmtes) messbares $h : X \longrightarrow \mathbb{C}$ in $L^1(X, |\mu|)$ mit $d\mu = hd|\mu|$ d.h.*

$$\mu(A) = \int 1_A h d|\mu|$$

fuer alle messbaren A . Weiterhin gilt $|h| \equiv 1$. Gilt umgekehrt $\mu = hd\nu$ mit $|h| \equiv 1$ und ν positiv, so folgt $|\mu| = \nu$.

Bemerkung. Das Lemma liefert eine Existenzaussage und die Eindeutigkeit der Polarzerlegung d.h. des Paares (h, ν) mit ν positives Mass, $|h| \equiv 1$, ν fast sicher und $\mu = h d\nu$.

Beweis. Zunaechst zur ersten Aussage.

Existenz. Wir zeigen zunachst die Existenz eines h in $L^1(|\mu|)$ mit $\mu = h|\mu|$. Offenbar gilt fuer jedes messbare A

$$|\mu(A)| \leq |\mu|(A).$$

Damit folgt aus dem Satz von Radon-Nikodym fuer komplexe Masse sofort die Existenz eines solchen h .

(Falls nur der Satz von Radon-Nikodym fuer positive Masse bekannt ist, kann man auch so vorgehen: Sei ohne Einschraenkung μ reellwertig (sonst Zerlegen in Realteil und Imaginaerteil). Sei $\nu := \mu + |\mu|$. Dann ist (offenbar) ν ein positives endliches Mass und $\nu \ll |\mu|$. Damit gibt es also nach dem Satz von Radon/Nikodym ein $\tilde{h} \in L^1(X, |\mu|)$ mit

$$\nu = \mu + |\mu| = \tilde{h}d|\mu|$$

und es folgt auch in diesem Fall

$$\mu = h|\mu|$$

mit $h = \tilde{h} - 1$.)

Es bleibt $|h| \equiv 1$ zu zeigen. Sei dazu fuer $0 < r < 1$ die Menge A_r definiert durch

$$A_r := \{x : |h(x)| \leq r\}.$$

Dann folgt aus $\mu = h|\mu|$ durch Betrachten von Zerlegungen

$$|\mu|(A_r) \leq r|\mu|(A_r).$$

Wegen $0 < r < 1$ ergibt sich also $|\mu|(A_r) = 0$. Aehnlich (aber etwas komplizierter) folgt

$$|\mu|(B_r) = 0$$

fuer

$$B_r := \{x : |h(x)| \geq r\}$$

fuer $r > 1$. Damit folgt die Aussage fuer (eine ggf auf einer Nullmenge geeignet modifizierte Version von) h .

Eindeutigkeit. Seien h_1 und h_2 solche Funktionen. Dann gilt

$$0 = \mu(A) - \mu(A) = \int 1_A(h_1 - h_2)d|\mu|$$

fuer alle messbaren A . Damit folgt $h_1 = h_2$ fast ueberall durch Betrachten von Mengen der Form

$$A = \{x : \Re(h_1 - h_2)(x) > \frac{1}{n}\} \text{ bzw. } A = \{x : \Im(h_1 - h_2) > \frac{1}{n}\}.$$

fuer natuerliche Zahlen n (bzw. die durch Vertauschen von h_1 und h_2 entstehenden Mengen).

Zur letzten Aussage: Offenbar gilt $|\mu|(A) \leq \nu(A)$ fuer alle messbaren A (da $|h| \equiv 1$.) Zerlegt man umgekehrt A in Teilmengen auf denen h sich beliebig wenig aendert, so kann man (vgl. Uebung) auch

$$|\mu|(A) \geq \nu(A)$$

zeigen. Damit folgt dann $\nu = |\mu|$. □

FOLGERUNG. Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Dann kann man jedes komplexe Borelmaß μ schreiben als

$$\mu = \nu_1 - \nu_2 + i\nu_3 - i\nu_4$$

mit positiven endlichen Borelmaßen ν_j .

Beweis. Das folgt direkt aus einer entsprechenden Zerlegung von h . \square

Bemerkung. Damit haben wir jetzt drei verschiedene Zugängen zu komplexen Massen:

- Komplexwertige σ -additive Funktionen.
- Masse der Form $h\nu$ mit ν positives endliches Mass und $|h| \equiv 1$ ν fast sicher.
- Linearkombination endlicher positiver Masse.

Nach diesem Lemma koennen wir nun folgendes definieren.

DEFINITION (Integration bzgl. komplexer Masse). Sei (X, \mathcal{A}) ein meßbarer Raum und μ ein komplexes Maß mit $\mu = h|\mu|$ fuer ein messbares h . Dann definiert man fuer beschraenkte messbare f

$$\int f d\mu := \int f h d|\mu|.$$

Wir betrachten nun die Gesamtheit aller komplexen Masse.

PROPOSITION (Vektorraum der komplexen Maße). Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Dann bilden die komplexen Maße auf X einen Vektorraum und es gilt fuer $a, b \in \mathbb{C}$ und μ, ν komplexe Borelmaße fuer jedes messbare $E \in X$

$$|a\mu + b\nu|(E) \leq |a||\mu|(E) + |b||\nu|(E).$$

Insbesondere wird dieser Vektorraum durch

$$\|\mu\| := |\mu|(X)$$

zu einem normierten Raum.

Bemerkung. Der Vektorraum ist sogar vollstaendig (Uebung).

Beweis. Offenbar bilden die komplexen Masse einen Vektorraum. Die angegebene Ungleichung ist einfach zu zeigen unter Betrachtung von Zerlegung betrachten. Damit folgen die Normeigenschaften leicht. \square

Wir betrachten nun die spezielle Situation eines lokalkompakten Hausdorffraumes.

DEFINITION. Sei (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch. Sei μ ein komplexes Borelmaß auf X . Dann heisst μ regulaer, wenn $|\mu|$ regulaer ist.

FOLGERUNG (Vektorraum der regulaeren komplexen Borelmasse). Sei (X, τ) lokalkompakt und hausdorffsch. Dann bilden die regulaeren komplexen Borelmaße auf X einen Vektorraum mit Norm $\|\mu\| = |\mu|(X)$.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass Regulaeritaet unter Linearkombinationen erhalten bleibt: Sei $E \subset X$ messbar. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren aufgrund der Regularitaet von μ und ν also Kompakta K_1, K_2 und offene Mengen U_1, U_2 mit

$$K_i \subset E \subset U_i$$

und

$$|\mu|(E \setminus K_1) \leq \varepsilon, |\mu|(U_1 \setminus E) \leq \varepsilon$$

und

$$|\nu|(E \setminus K_1) \leq \varepsilon, |\nu|(U_1 \setminus E) \leq \varepsilon.$$

Damit folgt (aus der Ungleichung)

$$|a\mu + b\nu|(E \setminus (K_1 \cup K_2)) \leq |a|\varepsilon + |b|\varepsilon$$

und

$$|a\mu + b\nu|((U_1 \cap U_2) \setminus E) \leq |a|\varepsilon + |b|\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Regularitaet. \square

2. Der Dualraum von $C(X)$

Ist X kompakt und hausdorffsch und μ ein komplexes Borelmaß auf X , so ist

$$\Lambda_\mu : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}, \Lambda_\mu(f) = \int f d\mu = \int f h d|\mu|$$

ein lineares Funktional mit

$$|\Lambda(f)| \leq \|f\|_\infty |\mu|(X).$$

Insbesondere ist also Λ stetig. Es gilt auch die Umkehrung.

THEOREM (Rieszscher Darstellungssatz). *Sei X kompakt und hausdorffsch. Dann ist die Abbildung*

$$\text{Regulaere komplexe Borelmasse auf } X \longrightarrow C(X)', \mu \mapsto \Lambda_\mu,$$

bijektiv und isometrisch. (Es existiert also zu jedem stetigen Φ auf $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ ein eindeutiges regulaeres komplexes Borelmaß μ mit

$$\Phi(f) = \int f d\mu$$

fuer alle $f \in C(X)$ und es gilt $\|\Phi\| = |\mu|(X)$.)

Bemerkung. Auch wenn μ nicht regulaer ist, liefert Λ_μ wie oben gesehen ein lineares stetiges Funktional. Die Regularitaet wird benoetigt, um die Eindeutigkeit zu erhalten.

← Ende der Vorlesung →

Beweis. Wie schon diskutiert bildet Λ nach $C(X)^*$ ab.

Λ ist injektiv. Seien μ_1 und μ_2 Masse mit gewuenschten Eigenschaften. Dann ist $\mu = \mu_1 - \mu_2$ ein regulaeres Borelmaß mit $\mu(f) = 0$ fuer alle $f \in C(X)$.

Idee. Waehle (f_n) in $C(X)$ mit $f_n \rightarrow h$. Dann gilt

$$|\mu|(X) = \int \bar{h} d\mu = \lim \int f_n d\mu = 0.$$

Hier sind die Details: Sei h messbar mit $|h| \equiv 1$ und $\mu = h|\mu|$. Da $|\mu|$ regulaer ist, existieren (f_n) in $C(X)$ mit $f_n \rightarrow \bar{h}$ (s.o.) in $L^2(X, |\mu|)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} |\mu|(X) &= \int_X 1d|\mu| \\ &= \int h\bar{h}d|\mu| \\ \left(\int f_n h d|\mu| = 0\right) &= \int (\bar{h} - f_n) h d|\mu| \\ &= \left| \int (\bar{h} - f_n) h d|\mu| \right| \\ \text{(C.-S. Ugl.)} &\leq \|\bar{h} - f_n\|_{L^2(|\mu|)} |\mu|(X)^{1/2} \\ &\rightarrow 0, n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Damit folgt $|\mu| = 0$ und daher $\mu = 0$.

Es ist Λ surjektiv Wir schildern zunaechst kurz die **Idee**. Wir definieren zuerst ein positives Funktional Λ^* auf $C^+(X)$ mit

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda^*(|f|).$$

Da Λ^* positiv ist, liefert es uns ein regulaeres positives Mass $\nu = |\mu|$ nach dem schon bewiesenen Satz von Riesz und es gilt

$$|\Phi(f)| \leq \Lambda^*(|f|) = \int |f| d\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

Damit gehoert dann Φ zu $L^\infty(\nu)$, d.h. es existiert ein $g \in L^\infty(\nu)$ mit

$$\Phi(f) = \int fg d\nu.$$

Dann ist $\mu = g\nu$ das gewuenschte regulaere Mass.

Hier sind die Details: Sei

$$\Lambda^* : C^+(X) := \{f \in C(X) : f \geq 0\} \longrightarrow [0, \infty)$$

definiert durch

$$\Lambda^*(f) := \sup\{|\Phi(h)| : h \in C(X), |h| \leq f\}.$$

(Diese Definition mag erst einmal verblueffen, laesst sich aber wie folgt gut motivieren:

- Gibt es ueberhaupt ein positives Λ^* mit $|\Phi(h)| \leq \Lambda^*(|h|)$ fuer alle h , so muss fuer jedes $f \geq 0$ und alle $h \in C(X)$ mit $|h| \leq f$ notwendig gelten

$$\Lambda^*(f) \geq \Lambda^*(|h|) \geq |\Phi(h)|.$$

Die angegebene Definition liefert also das 'minimale' moegliche Λ^* .

- Wenn es ueberhaupt ein regulaeres Mass μ gibt mit $\Phi(f) = \int f d\mu$, so muss (Uebung) gelten

$$\|\mu|(f) = \sup\{|\Phi(h)| : |h| \leq f\}.$$

Wir haben also eigentlich gar keine andere Wahl als diese Definition ;-)

Dann gilt fuer $f, g \geq 0$ und $c \geq 0$:

- $\Lambda^*(f) \geq 0$

- $\Lambda^*(cf) = c\Lambda^*(f)$ fuer $c \geq 0$.
- $\Lambda^*(f+g) = \Lambda^*(f) + \Lambda^*(g)$ fuer $f, g \geq 0$.

(Die ersten beiden Punkte sind klar. Zum letzten Punkt: \geq : Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren $h_1, h_2 \in C(X)$ mit

$$|h_1| \leq f \quad |h_2| \leq g$$

und

$$\Lambda^*(f) \leq |\Phi(h_1)| + \varepsilon, \quad \Lambda^*(g) \leq |\Phi(h_2)| + \varepsilon.$$

Waehle nun α_j mit $|\alpha_j| = 1$ und

$$|\Phi(h_j)| = \alpha_j \Phi(h_j)$$

$j = 1, 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \Lambda^*(f) + \Lambda^*(g) &\leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| + 2\varepsilon \\ &= \alpha_1 \Phi(h_1) + \alpha_2 \Phi(h_2) + 2\varepsilon \\ (\Phi \text{ linear}) &= \Phi(\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2) + 2\varepsilon \\ &\leq \Lambda^*(|\alpha_1 h_1| + |\alpha_2 h_2|) + 2\varepsilon \\ (|h_1| + |h_2| \leq f + g) &\leq \Lambda^*(f + g) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

\leq : Sei $h \in C(X)$ mit $|h| \leq f + g$. Sei

$$V := \{x \in X : f(x) + g(x) > 0\}.$$

Dann ist V offen. Definiere nun

$$h_1 := \frac{h}{f+g} f \quad \text{und} \quad h_2 = \frac{h}{f+g} g$$

auf V und $h_1 = h_2 = 0$ auf $X \setminus V$. Dann sind h_1 und h_2 stetig (NR!) $|h_j| \leq |h| \leq f + g$ mit

$$h_1 + h_2 = h \quad \text{und} \quad |h_1| \leq f, \quad |h_2| \leq g.$$

Dann gilt

$$|\Phi(h)| = |\Phi(h_1 + h_2)| \leq |\Phi(h_1)| + |\Phi(h_2)| \leq \Lambda^*(f) + \Lambda^*(g).$$

Nach Bilden des Supremum folgt die gewuenschte Ungleichung.)

Nun setzen wir Λ^* auf $C(X)$ fort: Sei $f \in C(X)$. Dann zerlegt man f in

$$f = f_1 - f_2 + if_3 - if_4$$

mit $f_i \geq 0$ und definiert

$$\Lambda(f) := \Lambda^*(f_1) - \Lambda^*(f_2) + i\Lambda^*(f_3) - i\Lambda^*(f_4).$$

Das ist wohldefiniert (!). Damit folgt dann leicht, dass Λ auch linear ist.

(!Wohldefiniert: $f_1 - f_2 + if_3 - if_4 = g_1 - g_2 + ig_3 - ig_4$ mit $f_j, g_j \geq 0$. Dann gilt

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2, \quad f_3 + g_4 = g_3 + f_4.$$

Damit folgt aus der Linearitaet von Λ^* also

$$\Lambda^*(f_1) + \Lambda^*(g_2) = \Lambda^*(g_1) + \Lambda^*(f_2) \dots$$

Das liefert die Wohldefiniertheit.)

Nun wendet man den Satz von Riesz an. Das liefert die Existenz eines regulären positiven ν mit

$$\Lambda^*(f) = \int f d\nu$$

für alle $f \in C(X)$.

Es geht nun darum das ursprüngliche Φ zu rekonstruieren und ein geeignetes h zu bestimmen. Wir betrachten also wieder

$$\Phi : C(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

Dann gilt nach Definition von Λ und ν

$$|\Phi(f)| \leq \sup\{|\Phi(h)| : h \in C(X) \text{ mit } |h| \leq |f|\} = \Lambda^*(|f|) = \int |f| d\nu = \|f\|_{L^1(\nu)}.$$

Damit ist also Φ ein stetiges (durch $\|\cdot\|_{L^1}$ beschränktes) Funktional auf einem Teilraum von $L^1(\nu)$. Dann kann man Φ mit Hahn-Banach zu einem stetigen durch $\|\cdot\|_{L^1}$ beschränkten Funktional auf ganz L^1 fortsetzen. Damit existiert also ein $g \in L^\infty(\nu)$ mit $\|g\|_\infty \leq 1$ und

$$\Phi(f) = \int f g d\nu$$

für alle $f \in C(X)$. Insbesondere gilt nach Definition von Λ und ν

$$\int |g| d\nu \geq \sup\{|\Phi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} = \Lambda^*(1) = \nu(X).$$

Damit folgt dann (wegen $\|g\|_\infty \leq 1$) also $|g| \equiv 1$ ν fast sicher. Setzt man nun $\mu = g\nu$, so ist μ ein komplexes Maß und es ist $\mu = g\nu$ die Polarzerlegung von μ . Damit gilt insbesondere $|\mu| = \nu$ und es ist μ regulär. Weiterhin gilt nach Definition

$$\Phi(f) = \int f g d\nu = \int f d\mu = \Lambda_\mu(f)$$

für alle $f \in C(X)$.

Es ist Λ isometrisch. Wir kommen nun zur Aussage über die Norm: Es gilt

$$\|\Phi\| = \sup\{|\Phi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} = \Lambda(1) = \nu(X) = |\mu|(X).$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. *Sei X lokalkompakt und hausdorffsch. Sei $\Phi : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ linear und stetig. Dann existiert ein eindeutiges reguläres Borelmaß μ auf X mit*

$$\Phi(f) = \int f d\mu$$

für jedes $f \in C_0(X)$. *Es gilt*

$$\|\Phi\| = |\mu|(X).$$

Beweis. Eindeutigkeit. Wie oben.

Zur Norm. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi\| &= \sup\{|\Phi(f)| : \|f\|_\infty \leq 1\} \\
&= \sup\left\{\int f h d|\mu| : \dots\right\} \\
&= |\mu|(X).
\end{aligned}$$

Existenz. Sei X^+ die Einpunktkompaktifizierung von X . Dann laesst sich $C_0(X)$ auffassen als Teilalgebra von $C(X)$. Mit Hahn-Banach kann man weiterhin das Funktional Φ unter Erhaltung der Norm zu einem Funktional Φ auf ganz $C(X^+)$ fortsetzen. Dieses ist nach dem Satz von Riesz durch ein regulare BorelmaB μ^+ auf X^+ gegeben. Die Einschraenkung von μ^+ auf X liefert das gewuenschte BorelmaB. \square

Bemerkung. Es gilt tatsaechlich $\mu^+(\{\infty\}) = 0$. (Denn

$$\|\Phi\| = \mu(X) \leq \mu^+(X^+) = \mu^+(X) + \mu^+(\{\infty\}) = \|\Phi^+\| = \|\Phi\|.)$$

FOLGERUNG. Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum. Dann ist der Raum der regularen BorelmaBe auf X mit der Norm $\|\mu\| := |\mu|(X)$ ein Banachraum.

Beweis. Es handelt sich gerade um den Dualraum von $C_0(X)$ mit der Supremumnorm. \square

Bemerkung: Dualraeume von $C_c(X) \subset C_0(X) \subset C_b(X)$ fuer nicht-kompakte, lokalkompaktes, hausdorffsches X .

- Der Dualraum von $C_b(X)$ laesst sich wie folgt bestimmen: Es gilt $C_b(X) = C(X_{SC})$ mit der Stone/Czech Kompaktifizierung X_{SC} . Tatsaechlich ist des gerade die Stone/Czech Kompaktifizierung gerade dadurch charakterisiert, dass diese Gleichheit gilt. Damit ist dann der Dualraum von $C_b(X)$ genau der Dualraum von $C(X_{SC})$ und besteht also aus den regularen komplexen Massen auf X_{SC} .
- Den Dualraum von $C_0(X)$ haben wir in der Folgerung oben bestimmt.
- Der Dualraum von $C_c(X)$ ist etwas aufwaendiger zu bestimmen. Tatsaechlich ist zunaechst nicht einmal die Frage klar, da wir festlegen muessen, welche Topologie wir auf $C_c(X)$ verwenden wollen. Betrachtet man $C_c(X)$ mit der Supremumsnorm, so ist $C_c(X)$ dicht in $C_0(X)$ und man erhaelt dann gerade wieder den Dualraum von $C_0(X)$. Typischerweise stattet man aber $C_c(X)$ mit der sogenannte induktiven Limes Topologie aus. Dann besteht der Dualraum aus gewissen unbeschraenkten Massen.

Netze, Filter und der Satz von Tychonoff

In einem topologischen Raum, dessen Umgebungsbasen nicht abzählbar sind, kann Konvergenz nicht adäquat mit Folgen beschrieben werden. In diesem Abschnitt lernen wir Netze kennen. Diese sind eine Verallgemeinerung von Folgen und können in topologischen Räumen (ohne Abzählbarkeitseigenschaften) verwendet werden. Als Anwendung wird der Satz von Tychonoff bewiesen.

1. Netze

DEFINITION. (a) Eine Relation \prec auf einer Menge heißt Halbordnung, wenn sie

- transitiv ist ($x \prec y$ und $y \prec z$ impliziert $x \prec z$)
- reflexiv ist ($x \prec x$).

(b) Eine halbgeordnete Menge (Λ, \prec) heißt aufwärts filtrierend, wenn zu allen $x, y \in \Lambda$ ein $z \in \Lambda$ existiert mit $x \prec z$ und $y \prec z$.

Notation. Oft wird eine halbgeordnete aufwärts filtrierende Menge als *gerichtet* bezeichnet. Manchmal wird in der Definition einer Halbordnung noch die *Antisymmetrie* ($x \prec y$ und $y \prec x$ impliziert $x = y$) dazugenommen.

DEFINITION. Ein Netz in einer Menge X ist ein Paar (Λ, ι) bestehend aus einer halbgeordneten aufwärts filtrierenden Menge Λ und einer Abbildung $\iota : \Lambda \rightarrow X$.

Notation. Ist (Λ, ι) ein Netz, so setzt man $x_\lambda := \iota(\lambda)$ und schreibt $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ für das Netz.

Beispiel (Folgen) Die Menge \mathbb{N} mit \leq ist halbgeordnet und aufwärts filtrierend. Ein Netz auf \mathbb{N} ist gerade eine Folge.

Beispiel.(Netze auf Umgebungen) Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei \mathcal{O}_x die Menge der Umgebungen von $x \in X$. Dann ist \mathcal{O}_x mit $U \prec V$ falls $V \subset U$ eine halbgeordnete aufwärts filtrierende Menge. Eine Abbildung $\iota : \mathcal{O}_x \rightarrow X$ ist dann ein Netz. Wählt (!) man zum Beispiel zu jedem $U \in \mathcal{O}$ ein $x_U \in U$, so ergibt sich das Netz

$$\mathcal{O}_x \longrightarrow X, U \mapsto x_U.$$

Beispiel. (Netze über Zerlegungen) Sei $I = [0, 1]$. Die Menge der Zerlegungen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ des Intervalls I ist bezgl. der Inklusion eine

aufwaerts filtrierende halbgeordnete Menge \mathcal{Z} . Zu jeder Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kann man dann das Netz \mathcal{Z}_f mit

$$\mathcal{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \mathcal{Z} \mapsto \sum_{j=1}^n (f(t_j) - f(t_{j-1}))(t_j - t_{j-1})$$

assoziiieren (vgl. Uebung).

DEFINITION. Sei $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Netz in X und $Y \subset X$.

(a) Es heisst (x_λ) schliesslich in Y , wenn ein $\lambda_Y \in \Lambda$ existiert mit $x_\lambda \in Y$ fuer alle $\lambda \in \Lambda$ mit $\lambda_Y \prec \lambda$.

(b) Es heisst (x_λ) hauefig in Y , wenn zu jedem $\lambda \in \Lambda$ ein μ mit $\lambda \prec \mu$ existiert mit $x_\mu \in Y$.

DEFINITION (Konvergenz eines Netzes). Sei X ein topologischer Raum und (x_λ) ein Netz in X . Dann heisst (x_λ) konvergent gegen x , wenn es zu jedem $U \in \mathcal{O}_x$ schliesslich in U ist. Ein $x \in X$ heisst Hauefungspunkt von (x_λ) , wenn (x_λ) in jedem $U \in \mathcal{O}_x$ hauefig ist.

Notation. Wir schreiben $x_\lambda \rightarrow x$ oder $\lim x_\lambda = x$, wenn das Netz (x_λ) gegen x konvergiert.

Netze koennen in topologischen Raeumen so eingesetzt werden wie Folgen in metrischen Raeumen:

PROPOSITION. Seien (X, τ) und (X', τ') topologische Raeume und $f : X \rightarrow X'$ gegeben. Fuer $x \in X$ sind aequivalent:

- (i) Es ist f stetig in x .
- (ii) $f(x_\lambda) \rightarrow f(x)$ fuer jedes $x_\lambda \rightarrow x$.

Beweis. (i) \implies (ii): Sei $U \in \mathcal{O}_{f(x)}$ beliebig. Dann existiert nach (i) ein $V \in \mathcal{O}_x$ mit $f(V) \subset U$. Wegen $x_\lambda \rightarrow x$, existiert ein λ_V mit $x_\lambda \in V$ fuer $\lambda_V \prec \lambda$. Das liefert

$$f(x_\lambda) \in f(V) \subset U$$

fuer $\lambda_V \prec \lambda$. Das liefert (ii).

(ii) \implies (i): Sei $U \in \mathcal{O}_{f(x)}$ beliebig. Angenommen: Es gibt ekein $V \in \mathcal{O}_x$ mit $f(V) \subset U$. Dann gibt es also zu jedem $V \in \mathcal{O}_x$ ein $x_V \in V$ mit $f(x_V) \notin U$. Betrachte nun das Netz $(x_V)_{V \in \mathcal{O}_x}$. Dann gilt nach Konstruktion

$$x_V \rightarrow x \text{ aber nicht } f(x_V) \rightarrow f(x).$$

Das ist ein Widerspruch. □

PROPOSITION. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Dann ist $A \subset X$ abgeschlossen genau dann, wenn jeder Grenzwert eines Netz in A auch zu A gehoert.

Beweis. Sei A abgeschlossen. Sei (x_λ) ein Netz in A mit $x_\lambda \rightarrow x$. Waere x nicht in A , so waere $X \setminus A$ eine offene Umgebung von x . Damit muesste $x_\lambda \in X \setminus A$ gelten fuer 'grosse' λ . Widerspruch.

Es habe umgekehrt A die genannte Eigenschaft bzgl. Netzen. Wir zeigen, dass das Komplement von A offen ist. Sei $x \in X \setminus A$. Waere in jeder Umgebung von x ein Punkt von A , so gaebe es ein Netz in A , das gegen x konvergiert. Damit gehoerte dann x zu A . Widerspruch. □

FOLGERUNG. Sei (X, τ) ein topologischer Raum. Sei $S \subset X$. Dann ist

$$\bar{S} = \{x \in X : \text{es existiert Netz } (x_\lambda) \text{ in } S \text{ mit } x_\lambda \rightarrow x\}.$$

Beweis. (Uebung) □

Wir kommen nun zum Analogon von Teilfolgen.

DEFINITION (Teilnetz). Ein Teilnetz des Netz (Λ, ι) in X ist ein Netz (M, j) zusammen mit einer Abbildung $h : M \rightarrow \Lambda$ so dass gilt:

- $j = \iota \circ h$ (Zeichnung)
- fuer jedes $\lambda \in \Lambda$ existiert in M ein μ mit $\lambda \prec h(\mu)$ fuer jedes $\mu \in M$ mit $\mu_\lambda \prec \mu$.

Bemerkungen.

- Es muss h nicht monoton sein d.h. $h(\mu) \prec h(\nu)$ erfuellen fuer $\mu \prec \nu$.
- Sogar wenn h monoton ist, impliziert die erste Eigenschaft nicht die zweite Eigenschaft. (Uebung)
- Eine Teilfolge (x_{l_k}) einer Folge (x_n) ist gegeben durch eine streng monoton wachsende Abbildung $l : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Aufgrund der Struktur von \mathbb{N} ist dann die zweite Eigenschaft automatisch.
- Ein Teilnetz einer Folge muss keine Folge sein (s.u.).

Wir kommen nun zum sogenannten Fundamentallemma.

LEMMA (Fundamentallemma). Sei X eine Menge. Sei \mathcal{B} ein System von Teilmenge von X , das aufwaerts filtrierend unter umgekehrter Inklusion ist (d.h. zu $A, B \in \mathcal{B}$ existiert ein $C \in \mathcal{B}$ mit $C \subset A \cap B$.) Ist das Netz (x_λ) haeufig in jedem $B \in \mathcal{B}$, so existiert ein Teilnetz $(x_{h(\mu)})$, das schliesslich in jedem $B \in \mathcal{B}$ ist.

Beweis. Wir muessen eine aufwaerts filtrierende Menge zusammen mit einer geeigneten Abbildung konstruieren: Betrachte die Menge

$$M := \{(\lambda, B) \in \Lambda \times \mathcal{B} : x_\lambda \in B\}$$

mit der Halbordnung

$$(\lambda, B) \prec (\lambda', B') \iff \lambda \prec \lambda' \text{ und } B' \subset B.$$

Dann ist \prec aufwaerts filtrierend. (Bew. Seien (λ, U) und (μ, V) in M . Sei $W \in \mathcal{B}$ mit $W \subset U \cap V$ gegeben. Sei ρ mit $\lambda, \mu \prec \rho$ gegeben. Da nach Voraussetzung (x_λ) haeufig in $W \in \mathcal{B}$ ist, existiert ein ν mit $\rho \prec \nu$ mit $x_\nu \in W$. Dann ist also $(\nu, W) \in M$ und $(\lambda, U), (\mu, V) \prec (\nu, W)$.)

Wir definieren nun

$$h : M \rightarrow \Lambda \text{ durch } h(\lambda, U) := \lambda$$

und

$$j : M \rightarrow X, \quad \mu = (\lambda, U) \mapsto x_\lambda = x_{h(\mu)}.$$

Dann ist (M, j) mit h ein Teilnetz. (Bew. Es ist $j = \iota \circ h$ nach Konstruktion. Ist $\lambda \in \Lambda$ beliebig und $U \in \mathcal{B}$, so existiert nach Voraussetzung ein $\lambda \prec \nu$ mit $x_\nu \in U$. Damit ist insbesondere $(\nu, U) \in M$ und $h(\nu, U) = \nu$ mit $\lambda \prec \nu$.)

Nach Konstruktion von (M, \prec) und h ist (M, j) schliesslich in jedem U aus \mathcal{B} . □

FOLGERUNG (Charakterisierung Haeufungspunkt). *Sei (X, τ) ein topologischer Raum und (x_λ) ein Netz in X . Dann sind aequivalent:*

- (i) *Es ist x ein Haeufungspunkt von (x_λ) .*
- (ii) *Es gibt ein Teilnetz von (x_λ) , das gegen x konvergiert.*

Beweis. (i) \implies (ii): Setze $\mathcal{B} := \mathcal{O}_x$ (= Umgebungen von x) und wende das Fundamentallemma an.

(ii) \implies (i): Eigentlich klar: Sei (M, j) mit h das entsprechende Teilnetz. Sei $U \in \mathcal{O}_x$. Dann existiert $\mu_U \in M$ mit $j(\mu) \in U$ fuer alle μ mit $\mu_U \prec \mu$. Sei nun $\lambda \in \Lambda$ beliebig. Dann existiert (Teilnetz!) ein $\mu(\lambda) \in M$ mit $\lambda \prec h(\mu)$ fuer jedes μ mit $\mu(\lambda) \prec \mu$. Fuer μ mit $\mu_U, \mu(\lambda) \prec \mu$ gilt also $\lambda \prec h(\mu)$ sowie

$$x_{h(\mu)} = \iota \circ h(\mu) = j(\mu) \in U.$$

(Hier gilt die letzte Aussage, da $\mu_U \prec \mu$. □