Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Mittwoch 04.05.2011**

(1) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z + e^{-z} \in \mathbb{R}$.

(2) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für $A \subset M$ gilt:

(a) $A^\circ = \{x \in M \mid \exists r > 0 : B_r(x) \subset A\} = \{x \in M \mid \exists r > 0 : U_r(x) \subset A\}$,

(b) $\overline{A} = \{x \in M \mid \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset\} = \{x \in M \mid \forall \epsilon > 0 : U_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset\}$,

(c) $\partial A = \{x \in M \mid \forall \epsilon > 0 : B_\epsilon(x) \cap A \neq \emptyset \text{ und } B_\epsilon(x) \cap A^c \neq \emptyset\}$.

(3) Bestimmen Sie $\partial\mathbb{Q}$ im metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

(4) Sei $e(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$. Zeigen Sie:

(a) $e(x, y)$ definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

(b) Eine Folge $(x_n)_n \in \mathbb{R}$ konvergiert bzgl. der euklidischen Metrik gegen $x \in \mathbb{R}$, genau dann wenn sie bzgl. e gegen $x \in \mathbb{R}$ konvergiert.

(c) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, e)$ ist nicht vollständig.

Zusatzaufgaben

- Beweisen Sie den folgenden Vertauschungssatz für uneigentliche Riemannintegrale: Es seien $f_n, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definierte, reellwertige, uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen. Die Folge (f_n) konvergiere auf jedem kompakten Teilintervall von $[0, \infty)$ gleichmäßig und es gelte $|f_n(t)| \leq g(t)$ für alle $t > 0$. Dann ist $f(t) := \lim_{n\to\infty} f_n(t)$ auf $[0, \infty)$ uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(t)\, dt.$$

Viel Erfolg!