Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 12 **Abgabe Mittwoch 29.06.2011**

(1) Sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\Phi(r, \theta, \phi) := (r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta).$$

Finden Sie die Punkte (r, θ, ϕ), in denen Φ lokal umkehrbar ist und berechnen Sie dort die Ableitung der jeweiligen Umkehrfunktionen. Geben Sie in einer Umgebung von $(0, 1, 0) = \Phi(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine lokale Umkehrfunktion an.

(2) Sei $E := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die gelochte Ebene und $f : E \to E$ definiert durch

$$f(x, y) := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Zeigen Sie, dass f in allen Punkten lokal umkehrbar ist. Zeigen Sie, dass f auch global umkehrbar ist und bestimmen Sie die Umkehrfunktion.

(3) Seien $s_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, und $f : (0, \infty)^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, \dots, x_n) := x_1^{s_1} \cdots x_n^{s_n}.$$

Bestimmen Sie die Extremwerte von f unter der Nebenbedingung

$$g(x) := x_1 + \cdots + x_n = 1.$$

Beweisen Sie damit für alle $y_j > 0$, $j = 1, \dots, n$, die Ungleichung

$$(y_1^{s_1} \cdots y_n^{s_n})^{\frac{1}{s_1 + \cdots + s_n}} \leq \frac{s_1 y_1 + \cdots + s_n y_n}{s_1 + \cdots + s_n}.$$

(4) Sei A eine symmetrische reelle $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie, dass die Extrema der quadratischen Form $Q(x) = x^T A x$ auf der Einheitskugel durch den größten und kleinsten Eigenwert gegeben sind.

Zusatzaufgabe
Seien $p, q > 1$ mit $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ gewählt. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f : (0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) := \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = xy = 1$. Beweisen Sie damit die Hölder Ungleichung: Für $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $x_k, y_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, n$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$