

Analysis III - Notizen ¹

Daniel Lenz

Jena - Wintersemester 2011 / 2012

¹Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Besonderer Dank an Erik Hebestreit, Fabian Heisler und Jürgen Reiter für die Arbeit an einer früheren Fassung und das Anfertigen der Zeichnungen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Etwas zu Kurvenintegralen	5
Kapitel 2. Determinanten und Volumina	19
Kapitel 3. Untermannigfaltigkeiten und Oberflächenintegrale	25
Kapitel 4. Der Satz von Stokes	41
Kapitel 5. Die klassischen Integralsaetze	47
1. Grundlegende Groessen der Vektoranalysis	47
2. Die Saetze von Gauss und Green	48
3. Der Satz von Stokes in der Ebene	50
4. Der Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 .	51
Kapitel 6. Etwas Fourieranalysis	53
1. Die Fouriertransformation auf \mathbb{R}^N	53
2. Die Fouriertransformation auf \mathbb{T}^N	65
3. Die allgemeine Fouriertransformation	73
Kapitel 7. Etwas Hilbertraumtheorie	75
1. Vektorraeume mit Semiskalarprodukt	75
2. Hilbertraeume	80
3. Kleiner Ausblick	88
Kapitel 8. Die Waermeleitungsgleichung	91
1. Herleitung der Waermeleitungsgleichung und formale Loesung	91
2. Die Waermeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^N .	92
3. Waermeleitungsgleichung auf einem Wuermel - periodische Randbedingungen	96
4. Waermeleitungsgleichung auf einem Wuermel - Dirichlet Randbedingungen	98
Kapitel 9. Die Wellengleichung	99
Kapitel 10. Die Laplacegleichung	103

KAPITEL 1

Etwas zu Kurvenintegralen

In diesem Kapitel geht es um Kurven und Kurvenintegrale. Kurven spielen eine Rolle in verschiedenen Bereichen der Mathematik und Physik. Sie treten zum Beispiel bei der Beschreibung von Massepunkten in der klassischen Mechanik auf. Die Kurve beschreibt die Bewegung eines solchen Punktes und ihre Ableitung die Geschwindigkeit. Mit dieser Anwendung im Sinn werden wir meist Differenzierbarkeit der Kurve voraussetzen. Wesentliche Themen des Kapitels sind die folgenden:

- Kurven und ihre Laenge.
- Kurvenintegrale ueber Vektorfelder und ihre Wegunabhaengigkeit.
- Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen.

DEFINITION. (*Kurve*) Eine Kurve in \mathbb{R}^N ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, wobei I ein Interval in \mathbb{R} ist.



Bemerkung. Man kann auch Kurven in der komplexen Ebene \mathbb{C} betrachten. Wegen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wird dieser Fall hier nicht separat diskutiert. Die unten gezeigten Aussagen gelten entsprechend.

Bemerkung - Interpretation. Kurven beschreiben die Bewegungen von Massepunkten im Raum. Die Ableitung der Kurve (falls existent) beschreibt dann die Geschwindigkeit des Massepunktes. (---> Klassische Mechanik).

Weitere Notation und Definitionen zu Kurven:

- Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ heisst stueckweise stetig differenzierbar, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und Intervalle I_j , $j = 1, \dots, n$, gibt mit $I = \cup_{j=1}^n I_j$, sodass die Einschränkungen von γ auf die I_j stetig differenzierbar sind.

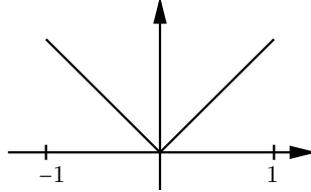
- Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve, so heisst $\gamma(a)$ der Anfangspunkt von γ und $\gamma(b)$ der Endpunkt.

- Stimmen Anfangs- und Endpunkt der Kurve ueberein, so heisst die Kurve geschlossen.

- Zu einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (oder \mathbb{C}) definieren wir die inverse Kurve $\tilde{\gamma} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$. Ist γ (stueckweise) stetig diffbar, so auch $\tilde{\gamma}$,

Bemerkung - Vorsicht! Auch wenn γ stetig diffbar ist, kann doch $\gamma([a, b])$ einen Knick haben.

- *Beispiel - Neilsche Parabel*: $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (Zeichnung).
- *Betragspotenz* $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3, |t|^3)$



Physikalische Interpretation: Massepunkt wird immer langsamer und dreht sich dann bei Geschwindigkeit Null auf der Stelle.

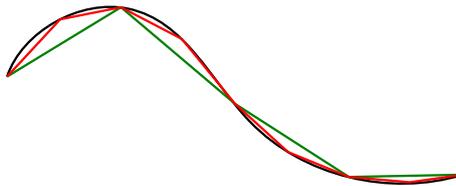
Es ist sinnvoll Kurven als 'gleich' aufzufassen, wenn das Bild uebereinstimmt und sich nur die Geschwindigkeit beim Durchlaufen verschieden ist. Das fuehrt auf folgende Definition.

DEFINITION. Zwei Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $\rho : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ heissen *aequivalent*, wenn es ein strikt wachsendes stetiges bijektives $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ gibt mit $\gamma = \rho \circ \varphi$.

Wir kommen nun zum Begriff der Kurvenlaenge (= Wegstrecke, die von einem Massepunkt zurueckgelegt wird).

Idee.

- Approximiere Kurve durch Polygonzug. (Zeichnung.)
- Berechne Laenge des Polygonzugs.
- Bilde Grenzwert.



Hier sind die Details: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (bzw. $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) eine Kurve und $Z = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ (d.h. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$), so definiert man

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|.$$

DEFINITION. Die Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$) heisst *rektifizierbar*, wenn

$$\sup_Z L_Z(\gamma) < \infty.$$

In diesem Fall definiert man die Laenge $L(\gamma)$ der Kurve als das angegebene Supremum.

Das Supremum in der Definition kann man sich als eine Art Grenzwert vorstellen (und das passt zu der anfangs geschilderten Idee zur Kuvenlaenge). Um das genauer fassen zu koennen, erinnern wir zunaechst kurz an den Begriff des Grenzwertes ueber Zerlegungen: Sei I ein beschaenktes abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} und F eine komplexwertige Funktion auf den Zerlegungen von I . Dann heisst c der Grenzwert von F ueber die Zerlegungen, geschrieben als

$$A = \lim_{|Z| \rightarrow 0} F(Z),$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\delta > 0$ existiert mit

$$|F(Z) - A| \leq \varepsilon$$

fuer alle Zerlegungen Z von I mit Feinheit $|Z| \leq \delta$. Hierbei ist die Feinheit $|Z|$ einer Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ definiert als

$$|Z| = \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \dots, n\}.$$

THEOREM. Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve. Dann sind aequivalent:

- (i) Es ist γ rektifizierbar.
- (ii) Es existiert $\lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$.

In diesem Fall gilt $L(\gamma) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$.

Beweis. Uebungsaufgabe. □

In dieser Vorlesung werden wir das vorangehende Theorem nicht benutzen, sondern stattdessen mit (stueckweise) stetig differenzierbaren Kurven arbeiten. Das folgende Theorem zeigt, dass diese Kurven rektifizierbar sind und liefert auch eine Formel zur Berechnung der Laenge. Fuer die Anwendung ist es meist keine Einschraenkung, nur (stueckweise) stetig differenzierbaren Kurven betrachten.

THEOREM. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ stueckweise stetig diffbar, so ist γ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^d \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2} dt.$$

Beweis. Ohne Einschraenkung γ stetig diffbar. (Sonst stueckweise argumentieren). Mit dem Mittelwertsatz folgt dann:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|}{t_{j+1} - t_j} (t_{j+1} - t_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} \left| (\gamma_1'(\tilde{t}_j^1), \dots, \gamma_N'(\tilde{t}_j^N)) \right| (t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

mit geeigneten $t_j \leq \tilde{t}_j^s \leq t_{j+1}$ fuer $s = 1, \dots, N$.

Aufgrund der Stetigkeit von γ' gilt dann

$$\begin{aligned} \sup_Z \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| &= \sup_Z \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|}{t_{j+1} - t_j} (t_{j+1} - t_j) \\ &= \sup_Z \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma'(t_j)| (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

In der letzten Formel kann man das Supremum durch den Grenzwert ersetzen (wie man sich leicht klarmacht). Damit erhält man dann

$$\sup_Z \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| = \lim_Z \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{t_{j+1} - t_j} |\gamma'(t_j)| (t_{j+1} - t_j) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Hierbei folgt die letzte Gleichung, da es sich um Riemannsummen handelt. \square

Bemerkung. Es ist γ' die Geschwindigkeit des Massepunktes. Der Satz sagt also, dass der Weg das Integral über den Betrag der Geschwindigkeit ist.

Wir kommen nun zum Kurvenintegral. Das Kurvenintegral beschreibt (zum Beispiel) die Arbeit/Energie die die Bewegung eines Massepunktes in einem Vektorfeld kostet / liefert. Wie üblich nennen wir dabei eine auf $U \subset \mathbb{R}^N$ definierte Funktion F mit Werten in \mathbb{R}^N ein Vektorfeld (oder auch 'Kraftfeld').

Idee. Ist die Kraft konstant so gilt

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft (in Wegrichtung)} \times \text{Weg} = \langle \text{Kraft}, \text{Weg} \rangle.$$

Sei nun ein stetiges Kraftfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ gegeben und ein Partikel, der sich entlang dem stetigen γ bewegt. Dann sind approximativ (da F stetig und γ stetig) F und γ lokal konstant und die Arbeit gegeben (Zeichnung)

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle F(\gamma(t_j)), \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \rangle (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Macht man die Zerlegungen immer feiner so erhält man ein Integral.

DEFINITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein stetiges Vektorfeld. Dann definiert man für jedes $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ stückweise stetig diffbar das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} F d\gamma := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{j=1}^d F_j(\gamma(t)) \gamma_j'(t) dt.$$

←
Ende der 1. Vorlesung

Bemerkung. Man kann tatsächlich das Kurvenintegral für alle rektifizierbaren Kurven definieren. Dazu geht man wie folgt vor (Übung): Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt von beschränkter Variation, wenn

$$\sup_Z \sum_{j=1}^n |f(t_j) - f(t_{j-1})| < \infty$$

gilt. (Dabei wird das Supremum ueber alle Zerlegungen \mathcal{Z} von $[a, b]$ genommen.) Man kann nun zeigen:

- Die Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann von beschränkter Variation, wenn es monoton wachsende f_+ und f_- gibt mit $f = f_+ - f_-$.
- Die Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist genau dann rektifizierbar, wenn jede einzelne Komponente γ_j von beschränkter Variation ist.

Damit kann man fuer eine rektifizierbare Kurve γ jede einzelne Komponente γ_j schreiben als $\gamma_j = \gamma_{j,+} - \gamma_{j,-}$ mit monoton wachsenden $\gamma_{j,\pm}$. Zu diesen Funktionen gehoeren aber Masse $\mu_{j,\pm}$ (vgl. Analysis II). Anschliessend definiert man

$$\int F d\gamma := \sum_{j=1}^N \left(\int_{[a,b]} F_j d\mu_{j,+} - \int_{[a,b]} F_j d\mu_{j,-} \right).$$

Wir werden dies in dieser Vorlesung nicht verwenden, da es fuer die Anwendungen kaum von Belang ist.

Kurvenintegrale aendern sich nicht, wenn man dieselbe Kurve mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlauft:

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $\rho : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ aquivalente, stetig differenzierbare Kurven, so gilt $\int F d\gamma = \int F d\rho$.

Beweis. Sei $\gamma = \rho \circ \varphi$. Sei $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Sei $t'_k := \varphi(t_k)$. Dann ist $Z' : c = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n = d$ eine Zerlegung von $[c, d]$. Da φ und φ^{-1} stetig sind wird die Feinheit von Z beliebig klein, wenn die Feinheit von Z' beliebig klein wird und umgekehrt. Damit sind dann (fuer genuegend feine Z, Z')

$$S_Z(\gamma) := \sum_{k=1}^n \langle F(\gamma(t_k)), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle$$

eine gute Naehung von $\int F d\gamma$ und

$$S_{Z'}(\rho) := \sum_{k=1}^n \langle F(\rho(t'_k)), \rho(t'_k) - \rho(t'_{k-1}) \rangle$$

eine gute Naehung von $\int F d\rho$. Es gilt aber nach Konstruktion

$$S_Z(\gamma) = S_{Z'}(\rho).$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Ersetzt man in einem Kurvenintegral die Kurve durch ihr Inverses so aendert sich lediglich das Vorzeichen:

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ stueckweise stetig differenzierbar so auch die inverse Kurve $\tilde{\gamma}$ und es gilt $\tilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(-t)$, also insbesondere

$$\int_{\gamma} F d\gamma = - \int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}.$$

Im uebrigen Teil des Kapitels geht es darum, ob (bei gegebenem Vektorfeld) das Kurvenintegral nur von Anfangs und Endpunkt der Kurve (und nicht dem Verlauf der Kurve) abhaengt. Wenn das der Fall ist, spricht man von 'Wegunabhaengigkeit des Kurvenintegrals'. Dabei handelt es sich also um eine Eigenschaft des Vektorfeldes.

Wenn es um Vektorfelder geht, die zur Beschreibung von Arbeit/ Energie verwendet werden ('Kraftfelder'), sollte diese Eigenschaft gelten, da man sonst Energie gewinnen kann.

Fuer unsere Untersuchungen benoetigen wir noch ein weiteres Konzept:

DEFINITION. (*Gradientenfeld*) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine stetige Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ heisst Gradientenfeld, wenn es ein stetig differenzierbares $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla\varphi = F$. Ein solche φ heisst dann Potential von F .

Ist φ ein Potential zu F , so ist offenbar auch $\varphi + \text{const}$ ein Potential zu F . Im wesentlichen ist das die einzige Freiheit.

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhaengend und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Sind φ_1 und φ_2 Potentiale zu F , so gilt $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{constant}$.

Beweis. Sei $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$. Dann gilt $\nabla\psi = F - F = 0$. Seien x und y beliebige Punkte in U . Zu zeigen: $\psi(x) = \psi(y)$.

Da U offen und zusammenhaengend ist, existiert eine stueckweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ von x nach y . Dann gilt

$$\psi(y) - \psi(x) = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \int_a^b (\psi \circ \gamma)'(t) dt = 0$$

(da $(\psi \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla\psi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$). Damit folgt die Behauptung. \square

Damit koennen wir die folgende Charakterisierung beweisen.

THEOREM. (*Abstrakte Charakterisierung Gradientenfeld bzw. Wegunabhaengigkeit des Kurvenintegral*) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Dann sind aequivalent:

- (i) Fuer jedes (stueckweise) stetig diffbare γ haengt $\int_\gamma F d\gamma$ nur von Anfangs und Endpunkt von γ ab.
- (ii) Ist γ eine geschlossene (stueckweise) stetig diffbare Kurve, so gilt $\int_\gamma F d\gamma = 0$.
- (iii) Es ist F ein Gradientenfeld, d.h. es existiert ein stetig diffbares $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $F = \nabla\varphi$.

In diesem Fall gilt $\int_\gamma F d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$.

Beweis. (i) \implies (ii): Sei γ eine geschlossene Kurve. Offenbar hat $\tilde{\gamma}$ denselben Anfangs/Endpunkt wie γ . Damit folgt aus (i)

$$\int_\gamma F d\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}.$$

Wie wir oben gesehen hatten gilt ausserdem

$$\int_\gamma F d\gamma = - \int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}.$$

Damit folgt $\int_\gamma F d\gamma = 0$.

(ii) \implies (i): Sind γ, ρ zwei (stueckweise) stetig diffbare Kurven mit gleichem Anfangs und Endpunkt so kann man γ mit $\tilde{\rho}$ zu einer geschlossenen Kurve σ zusammensetzen (Zeichnung). Dann gilt natuerlich

$$\int_{\sigma} F d\sigma = \int_{\gamma} F d\gamma + \int_{\tilde{\rho}} F d\tilde{\rho}.$$

Damit folgt dann nach (ii)

$$0 = \int_{\sigma} F d\sigma = \int_{\gamma} F d\gamma + \int_{\tilde{\rho}} F d\tilde{\rho} = \int_{\gamma} F d\gamma - \int_{\rho} F d\rho.$$

(i) \implies (iii): Ohne Einschränkung sei U wegzusammenhaengend (sonst auf jeder Komponente einzeln argumentieren). Sei $p \in U$ fest. Fuer jedes $x \in U$ sei γ_x eine stetig diffbare Kurve von p nach x . Definiere $\varphi(x) := \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$. Aufgrund der Voraussetzung (ii) gilt

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_{\gamma_h} F d\gamma_h$$

mit $\gamma_h : [0, h] \rightarrow U, \gamma_h(t) = x + te_j$. (Zeichnung.) Es gilt (wie wir schon beweisen haben) $\gamma_h'(t) = e_j$. Damit folgt also

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_0^h \langle F(\gamma_h(t)), e_j \rangle dt = \int_0^h F_j(x + te_j) dt.$$

Da $t \mapsto F_j(x + te_j)$ stetig ist, folgt aus dem HDI

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_j(x + te_j) dt = F_j(x).$$

(iii) \implies (i): Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F d\gamma &= \int_a^b \langle \nabla(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ (s.o.) &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\ (HDI) &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Die letzte Aussage wurde im Beweis von (iii) \implies (i) mitbewiesen. \square

Aus dem Theorem folgt eine Vorschrift zum Berechnen des Potentials eines Vektorfeldes (wenn ein solches Potential existiert).

FOLGERUNG. (Berechnung des Potentials) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhaengend und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Gradientenfeld. Sei $p \in U$ beliebig und zu jedem $x \in U$ eine stetig diffbare Kurve γ_x von p nach x gewaehlt. Dann definiert $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$$

ein Potential von F .

Beweis. Variante 1: Das wurde im Beweis von (iii) \implies (i) des vorigen Theorems mitbewiesen.

Variante 2: Sei ψ ein Potential von F (d.h. $\nabla\psi = F$). Dann gilt nach der letzten Aussage des vorigen Theorem also

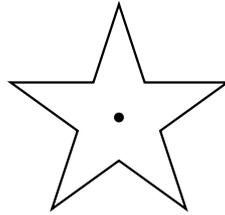
$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x = \psi(x) - \psi(p).$$

Damit folgt $\nabla\varphi = \nabla\psi = F$. □

← Ende der 2. Vorlesung

Das Hauptziel ist nun, ein einfach nachprüfbares Kriterium zu geben, wann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist (äquivalent: Kurvenintegrale über geschlossene Kurven verschwinden). Das erfordert noch einige Vorbereitung.

DEFINITION. Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $p \in U$ gibt, so dass für jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von p nach x ganz in U liegt. Dann heißt p Zentrum von U .



Beispiele.

- Jede Kugel ist sternförmig.
- Ist U konvex, so ist U sternförmig (mit $p \in U$ beliebig).
- Stern in \mathbb{R}^2 (s.o.)
- Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht sternförmig. (Bew. Die Verbindung von p zu $-p$ enthält 0. Widerspruch).
- Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-t, 0) : t \geq 0\}$ ist sternförmig (zu $p = (1, 0)$ beispielsweise). Zeichnung.

Bemerkung. Die beiden letzten Beispiele zeigen: Eine Menge kann durch 'Weglassen von Punkten' sternförmig werden. Man kann z.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ersetzen durch $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$. So kann man oft Potentiale auf Teilmengen von U erhalten.

THEOREM. (Lemma von Poincaré) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und sternförmig. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist F genau dann ein Gradientenfeld wenn gilt $\partial F_j / \partial x_i = \partial F_i / \partial x_j$ für alle i, j .

Beweis. \implies : Sei $F = \nabla\Phi$ stetig diffbar. Dann ist also Φ zweimal stetig diffbar und es gilt nach dem Satz von Schwarz und der Voraussetzung:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Phi}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

\impliedby : Ohne Einschränkung sei 0 das Zentrum von U . Zu $x \in U$ wählen wir die stetig differenzierbare Kurve $\gamma(t) = tx$ und definieren

$$\phi(x) := \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^N F_j(\gamma(t)) x_j dt.$$

(Wenn F ein Potential besitzt, so muss es durch dieses ϕ gegeben sein.) Nun müssen wir die Ableitung von ϕ nach den x_k bestimmen. Die Summe liefert

eine Funktion, deren Ableitung nach x_k stetig in x_k und t ist. Daher koennen wir Integration und Differentiation (nach x_k) vertauschen und erhalten

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (F_j(tx)x_j) dt.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^N F_j(tx)x_j &= F_k(tx) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx)tx_j \\ \text{(Voraussetzung)} &= F_k(tx) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx)tx_j \\ \text{(Produktregel)} &= \frac{d}{dt}(tF_k(tx)). \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \int_0^1 \frac{d}{dt}(tF_k(tx)) dt = tF_k(tx)|_0^1 = F_k(x).$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung.

- Ist U nicht sternfoermig, so folgt aus $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$ fuer alle i, j im allgemeinen nicht, dass F ein Gradientenfeld ist (Uebung).
- Auch auf nichtsternfoermigen Mengen kann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld sein. Z.B. ist das Gravitationsfeld $F(x) = x/|x|^3$ definiert auf $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ein Gradientenfeld (Uebung).

Zur weiteren Untersuchung fuehren wir eine abgeschwaechte Version des Konzeptes des Gradientenfeldes ein.

DEFINITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ heisst lokales Gradientenfeld, wenn zu jedem $x \in U$ ein $R > 0$ existiert, so dass $F|_{B_R(x)}$ ein Gradientenfeld ist.

Da jede Kugel sternfoermig ist, folgt aus dem Lemma von Poincaré sofort folgende Folgerung.

FOLGERUNG. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Dann sind äquivalent:

- F ist ein lokales Gradientenfeld.
- Es gilt $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$ fuer alle i, j .

Wir untersuchen nun Invarianz des Kurvenintegrals fuer lokale Gradientenfelder. Die Grundidee ist dabei, dass Kurven, die stetig ineinander ueberfuehrt werden koennen, gleiche Kurvenintegrale haben und dass in Mengen 'ohne Loecher' Kurven gut ineinander ueberfuehrt werden koennen. Das wird schliesslich auf den Satz fuehren, dass in Mengen 'ohne Loecher' jedes lokale Gradientenfeld auch ein globales Gradientenfeld ist. In Mengen mit Loechern gilt diese Aussage nicht. *Zeichnung* Um das praezise auszufuehren brauchen wir den Begriff der Homotopie.

DEFINITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamen Endpunkt B heissen homotop in U , wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$$

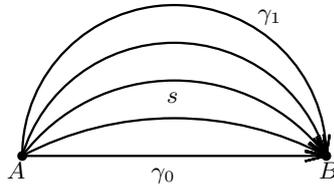
gibt mit

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

fuer alle $t \in [a, b]$ sowie

$$H(a, s) = A, \quad H(b, s) = B$$

fuer alle $s \in [0, 1]$.



Beispiel. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ Kurven mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt, so dass fuer jedes $t \in [a, b]$ die Verbindungsstrecke von $\gamma_0(t)$ nach $\gamma_1(t)$ ganz in U liegt, so sind γ_0 und γ_1 homotop mit

$$H(t, s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t).$$

Das gilt zum Beispiel immer, wenn U konvex ist.

THEOREM. (Homotopieinvarianz des Kurvenintegral - I) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ Kurven mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamen Endpunkt B . Sind γ_0 und γ_1 homotop in U , so gilt fuer jedes lokale Gradientenfeld F auf U

$$\int_{\gamma_0} F d\gamma_0 = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1.$$

Beweis. Sei $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in U . Sei $\mathcal{B} := \{B_i\}$ eine Ueberdeckung von U durch offenen Kugeln, so dass F auf jedem Element von \mathcal{B} ein Potential besitzt.

Behauptung. Es gibt Zerlegungen $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ und $Z' : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_q = 1$, so dass jedes $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ ganz in einer Kugel aus \mathcal{B} enthalten ist.

Bew. Angenommen nein. Dann unterteilen wir fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ sowohl $[a, b]$ also auch $[0, 1]$ in m gleichlange Intervalle und damit $[a, b] \times [0, 1]$ in m^2 Rechtecke. Nach Annahmen koennen wir dann ein Rechteck R_m finden, so dass $H(R_m)$ nicht in einer der Kugeln aus \mathcal{B} enthalten ist. Die Mittelpunkte x_m der R_m liegen alle in der kompakten Menge $[a, b] \times [0, 1]$. Sie haben also eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschraenkung

$$x_m \rightarrow p.$$

Sei nun B_0 eine Kugel aus \mathcal{B} mit $H(p) \in B_0$. Aufgrund der Stetigkeit von H liegt dann $H(R_m)$ in B_0 fuer alle genuegend grossen m . *Zeichnung.*

← Ende der Vorlesung →

Seien Z, Z' gemaess der Behauptung gewaehlt. Seien

$$P_{ij} := H(t_i, s_j)$$

$\Gamma_{ij} :=$ Strecke von P_{ij} nach $P_{i+1,j}$.

$\sigma_{ij} :=$ Strecke von P_{ij} nach $P_{i,j+1}$.

Zeichnung. y -Achse entspricht j - Achse, x -Achse entspricht i -Achse.

Es liegen nach Voraussetzung $P_{ij}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}$ alle in einer Kugel aus \mathcal{B} . Mit $I(\alpha) := \int F d\alpha$ und $I_j := \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{ij})$ gilt dann (Zeichnung! Nullwege addieren!)

$$I_j = I_{j+1}$$

fuer alle $j = 0, \dots, q-1$. Also folgt $I_0 = I_q$. Nach Konstruktion gilt aber

$$\int F d\gamma_0 = I_0 = I_q = \int F d\gamma_1.$$

□

Bemerkung. H wird lediglich als stetig vorausgesetzt. Daher sind im allgemeinen fuer s die Abbildungen $t \mapsto H(s, t)$ keine stetig differenzierbaren Kurven. Aus diesem Grund muessen wir mit den Verbindungsstrecken arbeiten.

Wir stellen nun noch eine Variante dieses Satzes fuer geschlossenen Kurven vor.

DEFINITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ heissen frei homotop in U , wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$$

gibt mit

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

fuer alle $t \in [a, b]$ sowie

$$H(a, s) = H(b, s)$$

fuer alle $s \in [0, 1]$. *Zeichnung.* 'Rechteck' Abbildung H 'kreisringige Kurven'.

Ganz aehnlich wie oben, kann man dann folgenden Satz beweisen:

THEOREM. (Homotopieinvarianz des Kurvenintegral - II) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ geschlossene Kurven. Sind γ_0 und γ_1 frei homotop in U so gilt fuer jedes lokale Gradientenfeld F auf U

$$\int F d\gamma_0 = \int F d\gamma_1.$$

Beweis. Der Beweis kann analog zum Beweis des vorigen Theorems gefuehrt werden. Wir geben nur eine Zeichnung. □

DEFINITION. Eine Menge U in \mathbb{R}^N heisst einfach zusammenhaengend, wenn jede geschlossene Kurve frei homotop in U zu einer Kurve ist, die nur einen Punkt enthaelt.

Bemerkung. (a) Grob gesprochen bedeutet 'einfache zusammenhaengend', dass die Menge keine Loecher besitzt.

(b) Jede sternfoermige Menge ist einfach zusammenhaengend. (Jede geschlossene Kurve kann zum Zentrum zusammengezogen werden.) Es gibt aber einfach zusammenhaengende Mengen, die nicht sternfoermig sind (Beispiel: Zeichnung nichtkonvexe Deformation einer Kreisscheibe.)

Damit kommen wir nun zum ultimativen Satz ueber Gradientenfelder.

THEOREM. (*Charakterisierung Gradientenfelder*) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und einfach zusammenhaengend. Dann ist ein stetig differenzierbare $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn gilt $\partial F_j / \partial x_k = \partial F_k / \partial x_j$ fuer alle $j, k = 1, \dots, N$.

Beweis. Gilt $\partial F_j / \partial x_k = \partial F_k / \partial x_j$ fuer alle $j, k = 1, \dots, N$, so ist nach dem Poincaréschen Lemma F ein lokales Gradientenfeld. Sei nun γ eine geschlossene Kurve. Dann ist γ nach Voraussetzung in U frei homotop zu einer Kurve ρ , die nur aus einem Punkt besteht. Aufgrund des vorigen Satzes gilt dann

$$\int F d\gamma = \int F d\rho.$$

Da ρ nur einen Punkt trifft, verschwindet die rechte Seite. Damit verschwinden also alle Kurvenintegrale ueber geschlossene Wege. Nach der abstrakten Charakterisierung ist also F ein Gradientenfeld.

Die umgekehrte Implikation folgt sofort (und hat nichts mit Einfachem Zusammenhang zu tun). \square

FOLGERUNG. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhaengend. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbares Vektorfeld. Dann ist F genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Rotation von F

$$\operatorname{rot} F : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

identisch verschwindet.

Bemerkung. Die vorangehenden Betrachtungen liefern bemerkenswerte Zusammenhaenge zwischen topologischen Eigenschaften einer Teilmenge U von \mathbb{R}^N und Loesbarkeit von Differentialgleichungen auf dieser Menge:

- Die Dimension des Raumes der Loesungen von $\nabla\varphi = 0$ (auf U) ist gerade die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von U . Insbesondere ist der Raum der Loesungen eindimensional, wenn U zusammenhaengend ist.
- Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhangend, so ist die Gleichung $\nabla\varphi = F$ fuer alle F mit $\operatorname{rot} F = 0$ loesbar.

Zum Abschluss des Abschnittes geben wir noch einen Hinweis wie man ein Potential auffinden kann.

Hinweis zum Auffinden des Potential.

Variante 1: Integrieren entlang 'schoener' Wege.

Variante 2: Anwenden des HDI auf einzelne Komponenten und anschliessen des Vergleichen (mit Probe!)

Beispiel. (a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Dann gilt $\partial F_1/\partial x_2 = 0 = \partial F_2/\partial x_1$. Daher besitzt F nach dem Theorem ein Potential Φ . Wir haben

$$\partial_1 \Phi = x_1 \rightarrow \Phi(x) = x_1^2/2 + C(x_2).$$

$$\partial_2 \Phi = x_2 \rightarrow \Phi(x) = x_2^2/2 + D(x_1).$$

Das fuhrt auf $\Phi = 1/2(x_1^2 + x_2^2) + C$. Probe zeigt, dass es sich tatsaechlich um ein Potential handelt.

(b) $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(x) = c$ (mit einem $c \in \mathbb{R}^N$). Dann gilt

$$0 = \partial F_j/\partial x_i$$

fuer alle i, j . Tatsaechlich ist in diesem Fall $\varphi(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^N c_j x_j$ ein Potential, wie eine Probe zeigt.

KAPITEL 2

Determinanten und Volumina

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Determinanten und Volumina. Die Ergebnisse sind wesentlich fuer das Verstaendnis der Faktoren, die bei Oberflaechenintegralen auftreten.

Erinnerung - Determinante auf $V = \mathbb{R}^N$. Es gibt genau eine lineare, alternierende normierte N -Form σ auf V . Hierbei bedeutet:

- *Alternierend:* $\sigma(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\sigma(\dots, w, \dots, v, \dots)$
- *Normiert:* $\sigma(e_1, \dots, e_n) = 1$
- *Multilinear:* $\sigma(\dots, \lambda u + v, \dots) = \lambda \sigma(\dots, u, \dots) + \sigma(\dots, w, \dots)$

Diese ist gegeben durch die Determinanten \det . Es gilt

$$\det(v_1, \dots, v_N) = \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{\text{sgn}\pi} (v_1)_{\pi(1)} \cdots (v_N)_{\pi(N)}.$$

THEOREM. Sei $A = (v_1, \dots, v_N)$ eine $N \times N$ -Matrix und $I := [0, 1]^N$. Sei

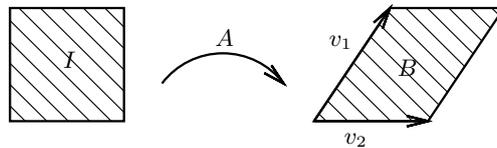
$$B := B(v_1, \dots, v_N) := \{t_1 v_1 + \dots + t_N v_N : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, N\}.$$

Dann ist

$$B = AI = \{Ax : x \in I\} \text{ und } |B| = |\det A| = (\det A^T A)^{1/2}.$$

Hierbei bezeichnet $|B|$ das Volumen von B .

Notation. Die Menge $B = AI$ aus dem Satz heisst der von v_1, \dots, v_N aufgespannte Spat, Block, oder Parallelepiped.



Bemerkung.

- Der Satz besagt, dass das Volumen eines Spats durch den Betrag der Determinante gegeben ist. Der Betrag ist noetig, da Volumina positiv sein muessen und invariant unter Vertauschung von Spalten sind.
- Das Volumen eines Spates kann man als Riemannsches oder Lebesguesches Volumen auffassen (da diese beiden uebereinstimmen fuer Mengen, denen eine Riemannsches Volumen zugeordnet werden kann).

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung der Determinante und zeigen, dass die Funktion

$$\delta : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}, \delta(v_1, \dots, v_N) := \begin{cases} |B| & : \det(v_1, \dots, v_N) > 0 \\ -|B| & : \text{sonst.} \end{cases}$$

N -linear, alternierend und normiert ist.

Dazu verwenden wir im wesentlichen folgende Eigenschaften des Volumens:

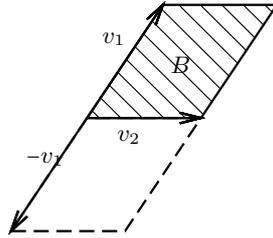
- Translationinvarianz ($|B| = |x + B|$).
- Nullmengeneigenschaft von Hyperebenen. (Jede Kompakte Teilmenge eines $N - 1$ -dimensionalen Teilraumes hat verschwindendes Volumen.)
- Gilt $B \subset B'$ so folgt $|B| \leq |B'|$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten gefuehrt:

Schritt 0. (Alternierend) Es gilt $\delta(-v_1, v_2, \dots, v_N) = -\delta(v_1, \dots, v_N)$ und $\delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\delta(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$.

Bew. 1. Formel: $B(-v_1, \dots, v_N) = -v_1 + B(v_1, \dots, v_N)$ (Zeichnung.) Mit Translationsinvarianz folgt:

$$|B(-v_1, \dots, v_N)| = |B(v_1, \dots, v_N)|.$$



Ausserdem

$$\det(-v_1, v_2, \dots, v_N) = -\det(v_1, \dots, v_N).$$

Mit diesen beiden Formeln folgt die Aussage.

2. Formel: Offenbar gilt $B(\dots v_i \dots v_j \dots) = B(\dots v_j \dots v_i \dots)$. Damit folgt

$$|B(\dots v_i \dots v_j \dots)| = |B(\dots v_j \dots v_i \dots)|.$$

Ausserdem

$$\det(\dots v_i \dots v_j \dots) = -\det(\dots v_j \dots v_i \dots).$$

Mit diesen beiden Formeln folgt die zweite Formel.

← Ende der Vorlesung

Schritt 1. Fuer $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, N\}$ ist

$$\delta(v_1, \dots, mv_i, \dots, v_N) = m\delta(v_1, \dots, v_N).$$

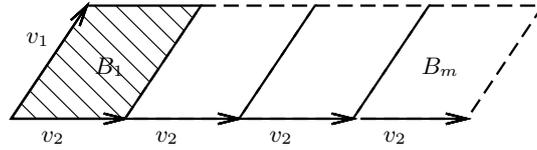
Bew. Das folgt aus der Translationsinvarianz.

Sei

$$B_1 := (v_1, \dots, v_N)I, B_m := (v_1, \dots, mv_i, \dots, v_N)I.$$

Dann gilt

$$B_m = \cup_{k=0}^{m-1} [B(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N) + kv_i] = \cup_{k=0}^{m-1} (kv_i + B_1).$$



Daher gilt $|B_m| = m|B_1|$.

Schritt 2. Fuer $q \in \mathbb{Q}_+$ ist $\delta(v_1 \dots qv_i \dots v_N) = q\delta(v_1 \dots v_N)$.

Bew. Sei $q = \frac{m}{l}$ mit $m, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Schritt 1 $l\delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, v_N) = \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N)$. Also

$$(*) \delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, v_N) = \frac{1}{l}\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N).$$

Damit folgt

$$\delta(v_1, \dots, \frac{m}{l}v_i, \dots, v_N) \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} m\delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, v_N) \stackrel{(*)}{=} \frac{m}{l}\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N).$$

Schritt 3. (Erster Teil der Linearitaet) Fuer $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\delta(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_N) = \lambda\delta(v_1, \dots, v_N)$.

Bew. Ohne Einschraenkung $\lambda \geq 0$ (sonst: $\lambda \mapsto -\lambda$ und Schritt 0). Sei $B_s := B(v_1, \dots, sv_i, \dots, v_N)$. Seien $q, q' \in \mathbb{Q}_+$ gegeben mit $q \leq \lambda \leq q'$. Dann gilt $B_q \subset B_\lambda \subset B_{q'}$ und damit

$$q|B_1| \stackrel{\text{Schritt 2}}{=} |B_q| \leq |B_\lambda| \leq |B_{q'}| \stackrel{\text{Schritt 2}}{=} q'|B_1|.$$

Da q, q' mit $q \leq \lambda \leq q'$ beliebig war folgt

$$|B_\lambda| = \lambda|B_1|.$$

Schritt 4. Falls v_1, \dots, v_N linear abhaengig sind, so gilt $\delta(v_1, \dots, v_N) = 0$.

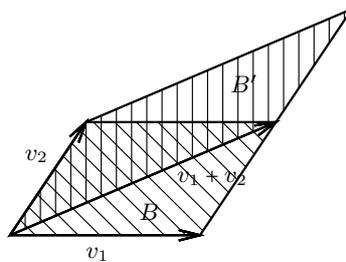
Bew. Es ist dann B eine kompakte Teilmenge eines $N - 1$ -dimensionalen Teilraumes.

Schritt 5. Es gilt $\delta(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_N) = \delta(v_1, \dots, v_N)$.

Bew. Seien B' und B die beiden Spate. Dann gilt

$$B' \setminus B = B \setminus B' + v_2$$

(bis auf Raender).



Damit folgt die Behauptung aus Translationsinvarianz.

Schritt 6. (Zweiter Teil der Linearitaet) $\delta(v+w, v_2, \dots, v_N) = \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(w, v_2, \dots, v_N)$.

Bew. Wir zeigen zunaechst

$$(\#) \delta(x + cv_i, v_2, \dots, v_N) = \delta(x, v_2, \dots, v_N).$$

fuer $i = 2, 3, \dots, N$. Dazu $i = 2$: Es gilt

$$\begin{aligned} \delta(x + cv_2, v_2, \dots, v_N) &\stackrel{\text{Schritt3}}{=} \frac{1}{c} \delta(x + cv_2, cv_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\text{Schritt5}}{=} \frac{1}{c} \delta(x, cv_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\text{Schritt3}}{=} \delta(x, v_2, \dots, v_N). \end{aligned}$$

$i \geq 3$. Nach Schritt 0 gilt $\delta(x + cv_i, v_2, \dots, v_N) \stackrel{\text{Schritt0}}{=} -\delta(x + cv_i, v_i, \dots, v_2, \dots, v_N)$. Nun kann man weiter wie im Fall von $i = 2$ argumentieren und erhaelt

$$\delta(x + cv_i, v_2, \dots, v_N) = -\delta(x, v_i, \dots, v_2, \dots, v_N) \stackrel{\text{Schritt0}}{=} \delta(x, v_2, \dots, v_N).$$

Nun nehmen wir ohne Einschraenkung an, dass $\{v, v_2, \dots, v_N\}$ linear unabhängig also eine Basis sind (Wenn weder $\{v, v_2, \dots, v_N\}$ noch $\{w, v_2, \dots, v_N\}$ linear unabhängig sind, ist auch $\{v + w, v_2, \dots, v_N\}$ linear unabhängig und alle Terme sind 0 nach Schritt 4.) Damit gilt dann also

$$w = cv + \sum_{j=2}^N \lambda_j v_j$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta(v + w, v_2, \dots, v_N) &= \delta(v + cv + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_N v_N, v_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\#}{=} \delta((1+c)v + \sum_{j=2}^{n-2} \lambda_j v_j + \lambda_{N-1} v_{N-1}, v_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\#}{=} \dots \\ &= \delta((1+c)v, v_2, \dots, v_N) \\ \text{Schritt3, } v + cv = (1+c)v &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + c\delta(v, v_2, \dots, v_N) \\ \text{Schritt3,} &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(cv, v_2, \dots, v_N) \\ (\# \text{ im zweiten Term}) &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(cv + \lambda_2 v_2, v_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\#}{=} \dots \\ &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(cv + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_N v_N, v_2, \dots, v_N) \\ &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(w, v_2, \dots, v_N). \end{aligned}$$

Schritt 7. Es gilt $\delta(e_1, \dots, e_N) = 1$.

Bew. Das ist klar, da dann $A = \text{Identitaet}$ also $AI = I$.

Damit haben wir gezeigt, dass δ alternierend (Schritt 0), linear (Schritt 3 und Schritt 6, plus alternierend) und normiert (Schritt 7) ist. Als folgt $\delta = \det$

aus der abstrakten Charakterisierung der Determinanten. Damit folgt die Aussage des Theorems. \square

FOLGERUNG. (*Verzerrung von Volumina unter linearen Abbildungen*) Sei J ein Translat eines Spates. Dann gilt $|AJ| = |\det A||J|$. Insbesondere gilt diese Formel, falls Q ein Intervall (d.h. achsenparalleler Spat) ist.

Beweis. Es gilt $J = x + BI$ mit geeigneter linearer Abbildung B und Vektor x . Damit folgt $AJ = A(x + BI) = Ax + ABI$ also

$$|AJ| = |Ax + ABI| = |ABI| = |\det(AB)| = |\det A||\det B| = |\det A||x + BI|.$$

Das beendet den Beweis. \square

Wir untersuchen nun, wie man Volumina in Unterräumen messen kann. Dazu betrachten wir folgende Situation. Seien a_1, \dots, a_k linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^N (also insbesondere $N \geq k$). Sei b_1, \dots, b_k eine ONB von $V := \text{Lin}\{a_i : i = 1 \dots k\}$. Mittels dieser Orthonormalbasis kann V mit \mathbb{R}^k identifiziert werden durch

$$\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow V, x \mapsto \sum_{j=1}^k x_j b_j.$$

Sei

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^k t_i a_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\} \subset V$$

und sei $|S|$ das Volumen des Spates S in V bzgl. der durch Φ gegebenen ONB.

THEOREM. Sei oben geschilderte Situation gegeben. Sei die $N \times k$ Matrix A definiert durch $A = (a_1 \dots a_k)$ und die $k \times k$ Matrix C durch $C := (\langle b_i, a_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k}$. Dann gilt

$$A^t A = (\langle a_i, a_j \rangle) = C^t C$$

und

$$\det A^t A = \det(\langle a_i, a_j \rangle) = \det C^t C = (\det C)^2.$$

Weiterhin gilt $S = CI$ mit $I = [0, 1]^k$ und

$$|S| := \sqrt{\det(\langle a_i, a_j \rangle)}.$$

Insbesondere ist also $|S|$ unabhängig von der Wahl der ONB.

Beweis. Es ist $A^t A = (\langle a_i, a_j \rangle)$ nach Definition der Matrixmultiplikation. Entwickeln von $a_i = \sum_l \langle a_i, b_l \rangle b_l$ liefert dann einfach $(\langle a_i, a_j \rangle) = C^t C$.

Nun zur Berechnung von $|S|$: Es gilt

$$\sum_i t_i a_i = \sum_i t_i \sum_l \langle a_i, b_l \rangle b_l = \sum_l \left(\sum_i \langle a_i, b_l \rangle t_i \right) b_l = \sum_l C(t_1, \dots, t_k)^t(l) b_l.$$

Damit wird also S in den neuen Koordinaten (bzgl. Φ) gerade durch CI beschrieben mit $I = [0, 1]^k$. Die Aussage ueber $|S|$ folgt nun aus dem Satz ueber Volumina und dem bisher Bewiesenen. Wegen $|S|^2 = \det A^t A$ ist $|S|$ unabhängig von der ONB b_1, \dots, b_k , da A unabhängig von dieser ONB ist. \square

KAPITEL 3

Untermannigfaltigkeiten und Oberflächenintegrale

In diesem Abschnitt führen wir Integrale über parametrisierte Gebilde im Raum ein. Das erlaubt es insbesondere über Untermannigfaltigkeiten zu integrieren. Untermannigfaltigkeiten sind die glatten Gebilde im Raum. Sie sind lokal Nullstellenmengen von glatten Funktionen oder äquivalent lokale Graphen.

Wir beginnen mit etwas Notation.

Notation.

- Die Nullstellenmenge einer Funktion g bezeichnen wir mit $N(g)$, d.h. zu $g : W \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definieren wir

$$N(g) := \{z \in W : g(z) = 0\} = \bigcap_{j=1}^k N(g_j).$$

- Den Graphen einer Funktion f bezeichnen wir mit $G(f)$ d.h. zu $f : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definieren wir

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$

- Eine stetig diffbare Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ heißt regulär in x , wenn $Df(x)$ maximalen Rang hat. (Also $\text{Rang} Df(x) = M$ falls $M \leq N$ und $\text{Rang} Df(x) = N$ falls $N \leq M$.) Ist die Funktion in jedem $x \in U$ regulär, so heißt sie regulär.

← Ende der Vorlesung

Beispiel. Ist $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar, so ist g genau dann regulär in $x \in W$, wenn $\nabla g(x) \neq 0$ gilt.

Beispiel. $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig diffbar. Dann ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $F(x) = (x, f(x))$ regulär. (Denn $DF(x) = (1, Df(x))^t$.)

DEFINITION. (*Parameterdarstellung/Parametrisierung*) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ geben. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen $k \leq N$, und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Gilt $M = \varphi(U)$, so heißt (U, φ) eine Parameterdarstellung von M . Dann heißt k die Dimension der Parameterdarstellung. Die Funktion

$$G_\varphi : U \rightarrow [0, \infty), G_\varphi(x) := \sqrt{\det(D\varphi(x)^T D\varphi(x))} = \sqrt{\det(\langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle)}$$

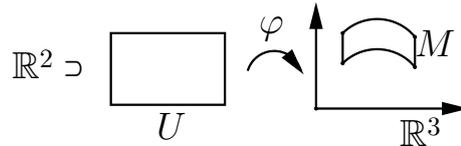
heißt Gramsche Determinante der Parameterdarstellung.

Die Parameterdarstellung heißt regulär, wenn $D\varphi$ überall Rang k hat. In diesem Fall bezeichnet man M als k -dimensional.

Bemerkung.

- Statt von Parameterdarstellung spricht man auch manchmal von Parametrisierung. Die Gramsche Determinante ist auch als Flächenelement bekannt.
- (Übung) Die Parameterdarstellung ist genau dann regulär, wenn G_φ nirgends verschwindet. (Entwickle $D\varphi(x)$ nach ONB...).

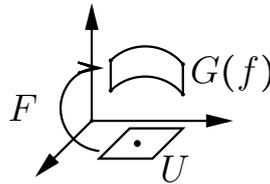
Beispiel. Allgemeine Parameterdarstellung:



Beispiel. (Graphen sind reguläre Parameterdarstellungen) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist

$$\text{Bild} F = G(f)$$

und (U, F) ist eine reguläre Parameterdarstellung. Für die Gramsche Determinante gilt $G_F(x)^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)$.



Bew. Aus dem oben Diskutierten folgt, dass (U, F) eine reguläre Parameterdarstellung ist. Es bleibt, die Aussage zur Gramschen Determinante zu zeigen. Das kann man (mit etwas Mühe) direkt nachrechnen. Wir lernen zum Ende dieses Abschnittes einen strukturellen Zugang kennen

Beispiel. (Kurven als Parameterdarstellungen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist γ eine Parameterdarstellung. Sie ist regulär, wenn γ' nirgends verschwindet. Es ist $G_\gamma(t) = |\gamma'(t)|$.

Bew. Die Aussagen zur Parameterdarstellung sind klar. Es bleibt, die Aussage zur Gramschen Determinante zu zeigen: Es gilt $D\gamma = \gamma'(t)$. Damit folgt

$$D\gamma^t D\gamma = \gamma'^t \gamma' = \langle \gamma', \gamma' \rangle = |\gamma'|^2.$$

Beispiel. (Kreis) Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus \{(1, 0)\}$. Dann gilt $D\varphi(t) = R(-\sin t, \cos t)$ und für die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t)^2 = R^2.$$

Bew. Es handelt sich um eine Kurve.

Beispiel. (Sphaere) Sei $S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_R, \psi(\varphi, \vartheta) = R(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus N$ mit $N = \{(x, y, z) \in S_R : x \geq 0, y = 0\}$ (vgl. Globus: Laengengrade und Breitengrade). Es gilt (Uebung)

$$D\psi(\varphi, \vartheta) = \dots$$

Damit folgt

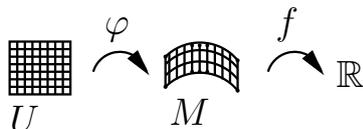
$$D\psi^T D\psi = R^2 \text{diag}(1, \sin^2 \vartheta)$$

und

$$G_\varphi^2 = R^4 \sin^2 \vartheta.$$

Auf Gebilden, die durch (regulaere) Parameterdarstellungen gegeben sind, koennen wir Funktionen integrieren (vgl. Kurvenintergral). Darum geht es als naechstes:

Idee. $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben und $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei (U, φ) eine Parameterdarstellung von M . Dann koennen wir U in sehr kleine disjunkte Wuerfel Q_j zerlegen. In jedem Wuerfel koennen wir nun einen Punkt p_j waehlen. *Zeichnung.* $p_j, Q_j, \varphi(Q_j), D\varphi(Q_j)$.



Dann sollte das gesuchte Integral im wesentlichen durch seine Riemannsumme

$$\sum_j \text{vol}(\varphi(Q_j)) f(p_j)$$

gegeben sein (und der Fehler umso kleiner, je kleiner die Q_j sind). Da φ stetig diffbar ist, ist fuer kleine Wuerfel Q_j aber $\varphi(Q_j) \sim \varphi(p_j) + D\varphi(p_j)Q_j$. Entsprechend folgt

$$\begin{aligned} \int f d\sigma &\simeq \sum_j \text{vol}(\varphi(Q_j)) f(\varphi(p_j)) \\ &\simeq \sum_j \text{vol}(D\varphi(p_j)Q_j) f(\varphi(p_j)) \\ &= \sum_j \sqrt{\det(D\varphi^T(p_j)D\varphi(p_j))} |Q_j| f(\varphi(p_j)) \\ &\simeq \int_U f(\varphi(p)) \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi(p))} dp. \\ &= \int_U f(\varphi(p)) G_\varphi(p) dp. \end{aligned}$$

(Hier: Erste Gleichung: Riemann summe; zweite Gleichung : linear Approximation; dritte Gleichung: Betrachtungen zu Volumina und Determinanten im vorigen Kapitel; vierte Gleichung: Riemann Summe.)

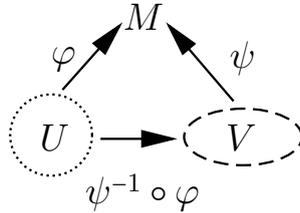
Wir wollen also definieren

$$\int_M f d\sigma := \int_U f(\varphi(p)) \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)(p)} dp = \int_U f(\varphi(p)) G_\varphi(p) dp.$$

Das so definiert Integral haengt nicht von der Parameterdarstellung ab (und damit handelt es sich wirklich um eine sinnvolle Definition).

PROPOSITION. (*Unabhaengigkeit des Integrals von der Parameterdarstellung*) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ mit einer regularen injektiven Parameterdarstellung (V, ψ) gegeben. Dann gilt fuer jede weitere injektive Parameterdarstellung (U, φ) von M , dass

$$\int_V f(\psi(x)) G_\psi(x) dx = \int_U f(\varphi(y)) G_\varphi(y) dy.$$



Bemerkung. Um die Unabhaengigkeit des Integrals von allen injektiven Parameterdarstellungen zu erhalten, reicht Existenz einer einzigen injektiven regularen Parameterdarstellung.

Beweis. Sei $T := \psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$. Dann ist T bijektiv (klar, da φ, ψ bijektiv sind) und stetig diffbar (! hier nutzt man Regularitaet von ψ s.u.), und es gilt $\varphi = \psi \circ T$. Entsprechend folgt

$$D\varphi = D\psi \circ DT$$

und damit

$$D\varphi^t D\varphi = DT^t (D\psi^t \circ D\psi) DT$$

also nach Bilden der Determinante

$$G_\varphi^2 = |\det DT|^2 G_\psi^2.$$

Zieht man die Wurzel erhaelt man

$$G_\varphi = |\det DT| G_\psi$$

und die gewuenschte Aussage folgt aus der Substitutionsregel.

(! Noch zu zeigen: T stetig diffbar: Sei $V \subset \mathbb{R}^k$. Da ψ regulär, also $\text{Rang } D\psi = k$ gilt, koennen wir ohne Einschraenkung voraussetzen, dass die letzten k Zeilen von $D\psi$ linear unabhaengig sind. Dann ist

$$G : V \times \mathbb{R}^{N-k} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad G(x, y) := \psi(x) + (y, 0)$$

stetig diffbar und lokal invertierbar. (Denn: $DG(x, y) = \dots$, Zeichnung: Parametrisiere durch ψ und 'Verschiebung'). Es gilt $G(x, 0) = \psi(x) \in M$, also folgt fuer

$$\begin{aligned} z &= \psi(x) = G(x, 0) \in M \\ \psi^{-1}(z) &= x = 1\text{-Komponente von } G^{-1}(z) \end{aligned}$$

für $z \in M$. Damit ist

$$T(u) = \psi^{-1} \circ \varphi(u) = 1\text{-Komponente von } G^{-1}(\varphi(u))$$

als Verknüpfung stetig diffbarer Funktionen, ebenfalls stetig diffbar.) \square

← Ende der Vorlesung →

DEFINITION. (*Oberflächenintegral einer Parameterdarstellung*) Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben, so dass M das Bild einer regulären injektiven Parameterdarstellung ist, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so definiert man

$$\int_M f(p) d\sigma(p) := \int_M f d\sigma := \int_U f(\varphi(x)) G_\varphi(x) dx$$

wobei (U, φ) eine beliebige injektive Parameterdarstellung von M ist.

DEFINITION. (*Volumen*) Sei M wie in vorangehender Definition. Dann ist das Volumen von M definiert als

$$\int_M 1 d\sigma(x).$$

Bemerkung.

- Das Volumen einer eindimensionalen Parameterdarstellung heißt auch Länge.
- Das Volumen einer zweidimensionalen Parameterdarstellung heißt auch Fläche.
- Das Volumen einer dreidimensionalen Parameterdarstellung heißt auch Volumen.

Wir betrachten nun das Oberflächenintegral für die von oben schon bekannten Beispiele. Dabei verwenden wir die von oben bekannte Notation und auch die dort berechneten Gramschen Determinanten.

Beispiel. (Kurve) Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist (s.o.) $G_\gamma(t)^2 = |\gamma'(t)|^2$. Entsprechend gilt für die Länge der Kurve

$$\text{Vol}(\gamma) = \int_I 1 dS = \int_I |\gamma'(t)| dt,$$

wie wir es ja schon hatten.

Beispiel. (Graph einer Funktion). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist (U, F) eine reguläre Parameterdarstellung. Für die Gramsdeterminante gilt $G_F(x)^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)$. Damit folgt für das Oberflächenintegral also

$$\int_M g(p) d\sigma(p) = \int_U g(F(u)) G_F(u) du.$$

Beispiel. (Kreis) Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus \{(1, 0)\}$. Für die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t)^2 = R^2.$$

Damit gilt fuer das Oeberflaechenintegral einer Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p) d\sigma(p) = \int_0^{2\pi} R f(R \cos t, R \sin t) dt.$$

Insbesondere folgt fuer das Volumen der Kreislinie (Laenge der Kreislinie) also

$$Laenge = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Beispiel. (Sphaere) Sei $S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S_R, \psi(\varphi, \vartheta) = R(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus N$ (s.o.). Es gilt

$$G_\varphi^2 = R^4 \sin^2 \vartheta.$$

Damit gilt fuer das Oberflaechenintegral einer Funktion $f : S_R \rightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p) d\sigma(p) = \int_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} f(\psi(\varphi, \vartheta)) R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Insbesondere folgt fuer das Volumen der Sphaere (Oberflaechenintegral der Kugel)

$$Oberflaechenintegral = \int_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} 1 R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = 4\pi R^2.$$

DEFINITION. Ist (φ, U) eine Parameterdarstellung von $M = \varphi(U)$, so bezeichnen wir das Bild von $D\varphi(x)$ als den Tangentialraum von M in x bzgl. φ . Das orthogonale Komplement von des Tangentialraumes bezeichnen wir als den Normalenraum. *Zeichnung.*

Besonders wichtig sind Oberflaechenintegrale ueber Gebilde der Dimension $N - 1$ im \mathbb{R}^N . (Solche Gebilde werden wir spaeter unter dem Namen Hyperflaechen kennenlernen). Dazu gehoeren insbesondere die Gebilde, die durch Graphen gegeben werden. In diesem Fall koennen wir die Gramschen Determinanten und die Normalenraeume leicht ausrechnen. Dazu ist die folgende Definition sehr nuetzlich.

DEFINITION. Seien a_1, \dots, a_{N-1} Vektoren in \mathbb{R}^N . Sei $A^{(k)}$ die $(N - 1) \times (N - 1)$ -Matrix, die aus $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ durch Streichen der k -ten Zeile entsteht ($k = 1, \dots, N$). Dann heisst

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1} := (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$$

mit $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A^{(k)}$ das aeuessere Produkt von a_1, \dots, a_{N-1} .

Bemerkung. Fuer jede natuerliche Zahl k gilt $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.

LEMMA. Seien a_1, \dots, a_{N-1} Vektoren in \mathbb{R}^N , $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ und $\nu := a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$. Dann gilt $\nu \neq 0$ genau dann, wenn a_1, \dots, a_{N-1} linear unabhaengig sind. Weiterhin gilt:

- (a) $\langle b, \nu \rangle = \det(b, a_1, \dots, a_{N-1})$ fuer alle $b \in \mathbb{R}^N$.
- (b) (1) $\nu \perp a_j$, $j = 1, \dots, N - 1$. (Richtung modulo Vorzeichen)
- (2) $\|\nu\|^2 = \det(a_1, \dots, a_{N-1})^T (a_1, \dots, a_{N-1})$. (Laenge)
- (3) $\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) \geq 0$. (Vorzeichen)

Sowohl durch (a) als auch durch (b) ist ν eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Charakterisierung von $\nu \neq 0$: Sind die Vektoren a_1, \dots, a_{N-1} linear unabhängig, so hat $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ genau $N-1$ linear unabhängige Spalten und damit auch $(N-1)$ linear unabhängige Zeilen. Damit gibt es also ein k , so dass $A^{(k)}$ invertierbar ist. Dann verschwindet dann die k -te Komponente von ν nicht. Ist umgekehrt $\nu \neq 0$, so gibt es ein k so dass $A^{(k)}$ invertierbar ist und damit hat A (mindestens) den Rang $(N-1)$ und damit sind die Spalten linear unabhängig.

Wir zeigen nun die letzte Aussage: Die letzte Aussage ist klar.

(a) Das folgt durch Entwickeln von $\det(b, a_1, \dots, a_{N-1})$ nach der ersten Spalte.

(b) Es folgen (1) aus (a) (wegen $\langle a_j, \nu \rangle = \det(a_j, a_1, \dots, a_{N-1}) = 0$). Es folgt (3) aus (a) (wegen $\det(\nu, a_1, \dots, a_N) = \langle \nu, \nu \rangle$).

Zu 2. Ist $\nu = 0$ so sind (vgl. Beginn des Beweises) die Vektoren a_1, \dots, a_{N-1} linear abhängig und darum gilt (vgl. Übung) $\det A^t A = 0$, und es folgt (2). Es reicht also den Fall $\nu \neq 0$ zu betrachten: Es gilt (unter Nutzen von (1)):

$$(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) = \text{Blockmatrix}(\nu^T \nu, A^T A).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})|^2 &= \det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) \\ &= \det \text{Blockmatrix}(\nu^T \nu, A^T A) \\ &= \|\nu\|^2 \det A^T A. \end{aligned}$$

Mit (a) ergibt sich

$$(\|\nu\|^2)^2 \stackrel{(a)}{=} |\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})|^2 = \|\nu\|^2 \det A^T A.$$

Das liefert nach Division durch $\|\nu\| \neq 0$ dann

$$\|\nu\| = \sqrt{\det A^T A}.$$

□

Wir können das nun auf Parameterdarstellung von Hyperflächen anwenden.

FOLGERUNG. (*Normale einer Hyperfläche*) Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine (reguläre) Parametrisierung von $\varphi(U)$. Sei $\nu := \partial_1 \varphi \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} \varphi$. Dann gilt:

- $\nu \perp \partial_j \varphi$ d.h. ν ist normal zu der Fläche. (vgl. (b), 1. des vorigen Lemma).
- $\|\nu\| = G_\varphi$ d.h. Länge von ν ist Flächenelement. (vgl. (b), 2. des vorigen Lemma.)

Bemerkung. In Worten besagt die Folgerung: Der Vektor ν ist senkrecht auf der Fläche und seine Länge ist gerade das Flächenelement.

Damit können wir die Gramschen Determinanten und zusätzlich noch die Normalenvektoren für die beiden wichtigsten Darstellungen von Hyperflächen (nämlich als Graphen bzw. als Nullstellenmengen) explizit bestimmen. (Die Berechnung der Normalenvektoren ist für später nützlich. In diesem Abschnitt interessieren uns hauptsächlich die Gramschen Determinanten.)

← Ende der Vorlesung

Beispiel - Graphen. Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(u) = (u, f(u))$ die zugehörige Parameterdarstellung. Dann gilt fuer $\nu := \partial_1 F(u) \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F$ die Formel

$$\nu = (-1)^N (\partial_1 f(u), \dots, \partial_{N-1} f(u), -1).$$

Insbesondere ist also

$$G_F(u) = \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}.$$

Bew. Das 'Insbesondere' ist klar nach der vorangehenden Folgerung.

Es reicht also die erste Aussage zu beweisen. Es gilt $DF(x) = (1, \nabla f(x))^t$.

Nun gilt nach Definition

$$\nu_j := j\text{-te Komponente von } \partial_1 F(u) \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F = (-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)}.$$

Es ist $(DF)^{(j)} = \dots$. Damit folgt (fuer $j = 1, \dots, N-1$) durch Entwickeln nach der j -ten Spalte

$$\nu_j = \det(-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)} = (-1)^{j+1} (-1)^{j+N-1} \partial_j f = (-1)^N \partial_j f$$

und

$$\nu_N = (-1)^{N+1} \det 1 = (-1)^N (-1).$$

Das liefert die Behauptung.

Beispiel - Nullstellenmenge. Sei $g : V \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\partial_N g(x) \neq 0$ fuer alle $x \in V$ gegeben. Sei

$$M := \text{Nullstellenmenge von } g$$

als Graph einer Funktion f gegeben. (Zumindest lokal ist das immer der Fall.) Es gibt also $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M = \text{Graph}(f)$ also $g(u, f(u)) \equiv 0$. Fuer die zugehörige Parameterdarstellung (F, U) mit $F(u) = (u, f(u))$ gilt dann

$$\nu := \partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F = (-1)^{N+1} (\partial_N g(F(u)))^{-1} \nabla g(F(u)).$$

Insbesondere ist also

$$G_F = \frac{1}{|\partial_N g|} \|\nabla g\|.$$

Bew. Das 'Insbesondere' ist klar nach der vorigen Folgerung. Es reicht also die erste Aussage zu beweisen.

Wir schreiben u fuer (x_1, \dots, x_{N-1}) . Die implizit definierte stetig diffbare Funktion f erfuehlt

$$g(u, f(u)) \equiv 0.$$

Damit gilt also nach Kettenregel

$$0 = \nabla_u g + \partial_N g \nabla_u f.$$

Daraus folgt

$$\nabla f = -(\partial_N g)^{-1} \nabla_u g.$$

Damit gilt fuer das zugehörige $F(u) = (u, f(u))$ also nach dem vorigen Beispiel

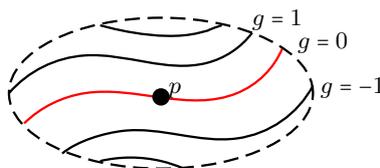
$$\nu = (-1)^N ((-\partial_N g)^{-1} \nabla_u g, -1) = (-1)^{N+1} (\partial_N g)^{-1} \nabla g.$$

Es folgt die Behauptung.

Bisher haben wir Mengen betrachtet, die global (d.h. als Ganze) durch eine Parametrisierung gegeben sind. Wir betrachten nun Mengen, die lediglich lokal durch Parametrisierungen gegeben sind.

LEMMA. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $p \in M$ und $k \leq N$. Äquivalent:

- (i) Es existiert eine offene Umgebung W von p in \mathbb{R}^N und reguläres $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ mit $M \cap W = N(g)$. (M ist lokal eine Nullstellenmenge.)



- (ii) Es existiert eine offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$, und eine Permutation $P : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit

$$M \cap W = PG(f).$$

(M ist lokal Graph.)

- (iii) Es existiert eine offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und ein bijektives stetig differenzierbares reguläres $\varphi : U \rightarrow W \cap M$, dessen Inverse wieder stetig ist.

Beweis. Die Richtung (i) \implies (ii) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Die andere Implikation (ii) \implies (i) folgt (für ohne Einschränkung $P = Id$) einfach durch Betrachten von $g(x, y) = y - f(x)$. (Hier $x \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^{N-k}$.)

Die Implikation (ii) \implies (iii) ist klar (da man für φ gerade die Abbildung $P \circ F$ wählen kann, wobei $F(u) = (u, f(u))$ ist.

Der Beweis der Implikation (iii) \implies (ii) wird nur skizziert. \square

DEFINITION. (*Untermannigfaltigkeit*) Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^N heißt *Untermannigfaltigkeit* (des \mathbb{R}^N) der Dimension k , wenn sie in jedem Punkt $p \in M$ eine der Bedingungen des Lemma erfüllt.

Bemerkung.

- Der Fall $k = N$ kann auch zugelassen werden. Dann erhält man offene Teilmengen des \mathbb{R}^N . Insbesondere ist \mathbb{R}^N selber eine (Unter)mannigfaltigkeit. Das erklärt die Bezeichnung.
- Eine UMK ist also lokal durch reguläre, injektive Parameterdarstellungen mit stetiger Inverser gegeben.
- UMK der Dimension $N - 1$ heißen Hyperflächen. Sie sind also (lokal) Nullstellengebilde von reellwertigen Funktionen.
- Untermannigfaltigkeiten sind lokal Schnitte von Hyperflächen (da $N(g) = \cap_i^{N-k} N(g_i)$).

Beispiel. (Affiner) Unterraum.

Beispiel. Einheitskreislinie.

Beispiel. Die Sphaere $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x|^2 - 1 = 0\}$ ist eine Hyperflaeche.

Beispiel. Torus

Beispiel. (Uebung) $SL(n)$, $Gl(n)$.

← Ende der Vorlesung

Wir geben nun den schon aufgetretenen Verallgemeinerungen von Parametrisierung durch Graphen einen Namen.

DEFINITION. Ist U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^k und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar, regulaer und injektiv mit stetiger Inversen, so heisst φ eine Einbettung.

Bemerkung. Aus Regularitaet und Injektivitaet folgt nicht die Stetigkeit der Inversen, wie man an Beispielen sieht.

Damit erhaelt man aus dem obigen Lemma sofort die Folgerung.

FOLGERUNG. Es ist $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge W existiert sowie eine Einbettung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $p \in W$ und $\varphi(U) = M \cap W$.

Bemerkung. Die Inversen der in der Folgerung auftretenden Abbildungen φ heissen 'Karten' (da sie die Situation einer Landkarte als Parametrisierung eines Stueckes der Erdoberflaeche verallgemeinern).

Wir fuehren nun die Tangentialflaechen und Normalen an UMK ein. *Zeichnung.*

DEFINITION. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine UMK und $p \in M$. Dann heisst

$T_p M := \{\gamma'(0) : \gamma : (-\delta_\gamma, \delta_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig diffbar, } \gamma(0) = p, \gamma((-\delta_\gamma, \delta_\gamma)) \subset M\}$ der Tangentialraum von M in p . Der Normalraum $N_p M$ ist definiert als

$$N_p M := T_p M^\perp.$$

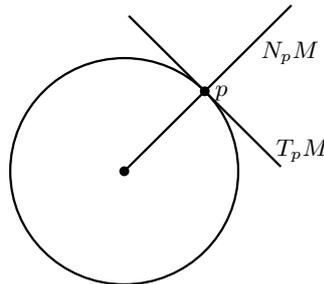


ABBILDUNG 1. Tangential- und Normalraum einer zweidimensionalen Sphäre in p

THEOREM. (*Beschreibung Tangentialraum und Normalraum*) Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ UMK gegeben. Sei $p \in M$ und $W \subset \mathbb{R}^N$ offen mit

$$p \in M \cap W = N(g) = G(f) = \text{Bild}(F),$$

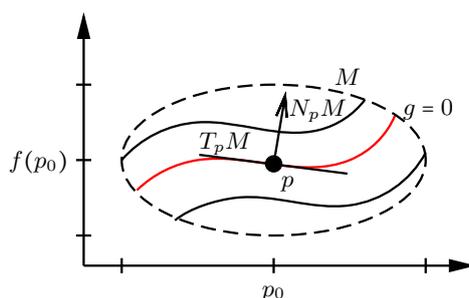
wobei $U \subset \mathbb{R}^k$, offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ stetig diffbar, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(x) = (x, f(x))$, $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$, stetig diffbar und regulär (d.h. $\text{Rang} Dg = N - k$). Dann gilt

$$T_p M = \text{Ker} Dg(p) = \text{Bild} DF(p_0)$$

für $p = F(p_0)$. Insbesondere gilt

$$T_p M = \bigcap_{j=1}^{N-k} \{\nabla g_j(p)\}^\perp, \quad N_p M = \text{Lin}\{\nabla g_j(p) : j = 1, \dots, N - k\}$$

sowie $\dim T_p M = k$, $\dim N_p M = N - k$.



Beweis. $T_p M \subset \text{Ker} Dg$: Sei $v \in T_p M$ beliebig und γ zugehörige Kurve d.h. $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$, $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Dann gilt $g \circ \gamma \equiv 0$ also

$$0 = (g \circ \gamma)'(0) = Dg(\gamma(0))\gamma'(0) = Dg(p)v.$$

$\text{Bild} DF \subset T_p M$: Sei $L = DF(p_0) = (1, Df(p_0))^t$. Sei $w \in \mathbb{R}^k$ beliebig, $\gamma : (-1, 1) \rightarrow M$, $\gamma(t) = F(p_0 + tw)$. Dann gilt

$$DF(p_0)w = \gamma'(0) \in T_p M.$$

Damit folgt die Aussage.

Insgesamt zeigt dies

$$\text{Bild} DF(p_0) \subset T_p M \subset \text{Ker} Dg(p).$$

Mit

$$\dim \text{Ker} D(g) = k$$

(g regulär also $\text{Rang} Dg = N - k$) und

$$\dim \text{Bild} DF(p_0) = k$$

(klar, betrachte Ableitung) folgt die Gleichheit der Räume und die Aussage über die Dimensionen.

Zum 'Insbesondere': Mit $T_p M = \text{Ker} Dg(p)$ folgt sofort

$$T_p M = \bigcap_j \{\nabla g_j(p)\}^\perp.$$

Damit folgt aus Standardsätzen der linearen Algebra die Aussage über $N_p M$. \square

Bemerkung.

- Linearisierte Version von $M = \text{Ker}(g) = \text{Bild} F$ liefert $T_p M = \text{Ker} Dg = \text{Bild} DF$.

- Der Satz zeigt, dass $T_p M$ in der Tat ein Vektorraum ist.
- In Richtung ∇g_i stärkstes Wachstum von g_i . In Richtung $T_p M$ kein Wachstum der g_i (da Nullstellenmenge). *Zeichnung.*

Beispiel - $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. In diesem Fall ist $M = U$ eine Untermannigfaltigkeit und der Tangentialraum ist in jedem Punkt $p \in M$ durch \mathbb{R}^N gegeben. (Betrachte die Kurven $\gamma(t) = p + tv$ fuer beliebiges $v \in \mathbb{R}^N \dots$)

Beispiel - *Sphaere* in \mathbb{R}^2 . Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Dann gilt in jedem $p \in S$

$$T_p S = \{p\}^\perp \text{ und } N_p M = \text{Lin}\{p\}.$$

Bew. Eine Kurve γ durch p in M erfuehlt $\langle \gamma, \gamma \rangle \equiv 1$. Nun ableiten....

Beispiel - *Sphaere* in \mathbb{R}^N . Sei $S^N := \{x \in \mathbb{R}^N : \langle x, x \rangle = 1\}$. Dann gilt in jedem $p \in S^N$

$$T_p S^N = \{p\}^\perp \text{ und } N_p M = \text{Lin}\{p\}.$$

Bew. Eine Kurve γ durch p in M erfuehlt $\langle \gamma, \gamma \rangle \equiv 1$. Nun ableiten....

Beispiel - $GL(n)$. (Uebung). Es ist $GL(n) :=$ Invertierbare $n \times n$ Matrizen = $n \times n$ Matrizen mit nichtverschwindender Determinante eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} . Fuer den Tangentialraum in I gilt $T_I GL(n) = n \times n$ Matrizen.

Beispiel - $SL(n)$. (Uebung). Es ist $SL(n) := n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} . Fuer den Tangentialraum in I gilt $T_I SL(n) = n \times n$ Matrizen mit verschwindender Spur.

Um Integrale ueber Untermannigfaltigkeiten sauber einzufuehren, brauchen wir noch ein weiteres Hilfsmittel: die Partition der Eins. Dazu erinnern wir zunaechst an zwei Konzepte.

Erinnerung - *Kompaktheit*: Es gibt verschiedene aequivalente Definitionen von Kompaktheit. Hier diskutieren wir die drei gaengigsten Varianten.

THEOREM. Sei (K, d) ein metrischer Raum. Dann sind aequivalent:

- Jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge. 'K ist folgenkompakt'.
- Jede offenen Ueberdeckung von K hat eine endliche Teilueberdeckung (d.h. Zu allen U_α , $\alpha \in A$, offen mit $K \subset \cup U_\alpha$ existiert $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ mit $K \subset \cup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$.) 'K ist ueberdeckungskompakt'.
- Es ist K vollstaendig und total beschaenkt. 'Nicht zu klein und nicht zu gross.'

Wir geben an dieser Stelle keinen Beweis und diskutieren das Ergebnis stattdessen kurz.

Bemerkungen.

- Fuer einen metrischen Raum ist Totalbeschaenktheit gerade aequivalent zur Eigenschaft, dass jede Folge eine Teilfolge enthaelt, die eine Cauchy Folge ist. Das ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Bolzano-Weierstrass.

- Ist der metrische Raum (M, d) eine Teilmenge des Euklidischen Raumes \mathbb{R}^N (und d die Einschränkung der Euklidischen Metrik) so gilt:

(M, d) total beschränkt $\iff M \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt.

(M, d) vollständig $\iff M \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen.

Damit ergibt sich aus dem vorigen Theorem insgesamt folgende Charakterisierung der Kompaktheit fuer Teilmengen des Euklidischen Raumes:

(M, d) kompakt $\iff M \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt und abgeschlossen.

← Ende der Vorlesung. →

Erinnerung - C_c^∞ . Der Traeger der Funktion $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Damit ist dann $\text{supp}(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^N und es verschwindet f auf dem Komplement von $\text{supp}(f)$. Tatsächlich (Uebung) ist $\text{supp}(f)^c$ die größte offene Teilmenge von \mathbb{R}^N auf der f verschwindet. Man definiert

$C_c^\infty(\mathbb{R}^N) := \{f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beliebig oft diffbar und hat kompakten Traeger}\}.$

Nach diesen Erinnerungen koennen wir nun die Partition der Eins einfuehren.

THEOREM. (*Untergeordnete Partition der Eins*) Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und O_1, \dots, O_n eine offene Ueberdeckung von K . Dann gibt es Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = 1 \text{ fuer } x \in K$$

und $\text{supp } \varphi_j \subset O_j$ fuer jedes $j = 1, \dots, n$. Diese Funktionen werden eine der Ueberdeckung O_j untergeordnete Partition der Eins genannt.

Beweis. Der Beweis nutzt führt zwei voneinander unabhaengige Ideen zusammen.

Ohne Einschränkung sei K eine endliche Vereinigung von abgeschlossenen achsenparallelen Quadern. (Sonst: Vergroessern von K ...)

Ohne Einschränkung sei jedes O_j eine endliche Vereinigung von offenen achsenparallelen Quadern (Sonst: ...)

Damit sind also die charakteristischen Funktionen der O_j und von K Riemann-integrierbar und Lebesgue-integrierbar.

Fuer $\delta > 0$ und $j = 1, \dots, n$ sei

$$O_j^\delta := \{x \in O_j : \inf_{y \in \mathbb{R}^N \setminus O_j} |x - y| > \delta\}$$

die Menge der Punkte von O_j , die vom Rand von O_j einen Abstand groesser als δ haben. Dann kann man O_j auch beschreiben, als die Menge der Punkte um die eine Kugel mit Radius groesser als δ in O_j existiert. Dann ist O_j^δ offenbar offen.

Behauptung. Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$K \subset O^\varepsilon := \bigcup_{j=1}^n O_j^{3\varepsilon}$$

gilt.

Bew. Ist $x \in K$ beliebig, so gehoert x zu einem O_j . Da O_j offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset O_j$. Damit gilt also $x \in O_j^\varepsilon$. Damit folgt, dass $\{O^\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ eine offene Ueberdeckung von K ist. Aufgrund der Kompaktheit von K gibt es dann eine endliche Teilueberdeckung $\{O^{\varepsilon_1}, \dots, O^{\varepsilon_k}\}$. Mit

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$$

folgt dann die Behauptung.

Definiere nun fuer jedes $R > 0$ die Funktion $\psi_R(x) = c_R \exp(\frac{-1}{R^2 - |x|^2})$ fuer $|x| < R$ bzw. 0 sonst mit c_R , so dass gilt $\int \psi_R dx = 1$. Dann ist (vgl. Analysis I) die Funktion ψ_R beliebig oft differenzierbar und hat Traeger $B_R(0)$.

Sei nun 1_j die charakteristische Funktion von $O_j^{2\varepsilon}$ und 1_0 die charakteristische Funktion von $\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_{j=1}^n O_j^{2\varepsilon}$. Man definiert

$$\tilde{\psi}_j(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x-y) 1_j(y) dy$$

fuer $j = 0, 1, \dots, n$.

Dann sind (offenbar) alle $\tilde{\psi}_j$ nichtnegativ. Weiterhin sind sie beliebig oft differenzierbar, und es gilt fuer die entsprechenden Ableitungen (Uebung, bzw. Kapitel 7):

$$\partial_\alpha(\tilde{\psi} * 1_j)(x) = \int (\partial_\alpha \psi_\varepsilon(x-y)) 1_j(y) dy.$$

Fuer $j = 1, \dots, n$ gilt

$$\tilde{\psi}_j(x) = 1 \text{ in } O_j^{3\varepsilon} \text{ und } \tilde{\psi}_j(x) = 0 \text{ ausserhalb } O_j^\varepsilon$$

also

$$\text{supp}(\tilde{\psi}_j) \subset \overline{O_j^\varepsilon} \subset O_j.$$

Fuer $n = 0$ gilt

$$\tilde{\psi}_j = 0 \text{ in } O_j^{3\varepsilon}.$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{j=0}^n \tilde{\psi}_j(x) \geq 1$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$ aufgrund von

$$1 = \int \psi_\varepsilon(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^N \setminus \bigcup_j O_j^{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x-y) dy + \int_{\bigcup_j O_j^{2\varepsilon}} \psi_\varepsilon(x-y) dy.$$

Fuer

$$\varphi_j(x) := \frac{\tilde{\psi}_j(x)}{\sum_{j=0}^n \tilde{\psi}_j(x)}$$

folgt dann die Behauptung. □

Damit koennen wir nun zur *Integration von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten* kommen: Wir föhren Oberflaechenintegrale ueber stetige Funktionen mit kompaktem Traeger auf Untermannigfaltigkeiten ein. Sei M eine Untermannigfaltigkeit. Waehle zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge V_p in \mathbb{R}^N , so dass $V_p \cap M$ gerade das Bild einer regulaeren Parameterdarstellung (U_p, ϱ_p) ist. Den kompakten Traeger von f koennen wir mit endliche vielen dieser V 's ueberdecken. Diese seien mit V_1, \dots, V_n bezeichnet. Seien (U_j, ϱ_j) , $j = 1, \dots, n$ die zugehoerigen Parameterdarstellungen. Sei φ_j , $j = 1, \dots, n$ eine der Ueberdeckung (V_j) untergeordnete Partition der Eins. Dann definieren wir

$$\int_M f d\sigma := \sum_{j=1}^n \int_{V_j \cap M} (f \varphi_j) d\sigma = \sum_{j=1}^n \int_{U_j} (f \varphi_j)(\varrho_j(u)) \sqrt{G_{\varrho_j}}(u) du.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition weder von der gewaehlten Ueberdeckung noch von der gewaehlten Partition der Eins abhaengt:

Seien φ_j , $j = 1, \dots, n$ zu V_i , $i = 1, \dots, n$ und ψ_i , $i = 1, \dots, m$ zu W_i , $i = 1, \dots, m$ untergeordnete Partitionen der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{V_j \cap M} f \varphi_j d\sigma &= \sum_j \int_{V_j \cap M} f \varphi_j (\sum_i \psi_i) d\sigma \\ &= \sum_{i,j} \int_{V_j \cap M} f \varphi_j \psi_i d\sigma \\ (\text{supp } \psi_i \subset W_i) &= \sum_{i,j} \int_{V_j \cap W_i \cap M} f \varphi_j \psi_i d\sigma \\ (\text{supp } \varphi_j \subset V_j) &= \sum_{i,j} \int_{W_i \cap M} f \varphi_j \psi_i d\sigma \\ &= \sum_i \int_{W_i \cap M} f \psi_i \sum_j \varphi_j d\sigma \\ (\text{Part.d.Eins}) &= \sum_i \int_{W_i \cap M} f \psi_i d\sigma. \end{aligned}$$

Beispiel - Kreislinie. Sei $S_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Wir waehlen eine Ueberdeckung bestehend aus einer Umgebung V_1 von $(1, 0)$ mit

$$V_1 \cap S_R = \{R(\cos(s), \sin(s)) : -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

fuer ein $\varepsilon > 0$ und $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ und den dazu passenden Parametrisierungen

$$\varrho_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_R, \varrho_1(s) = R(\cos(s), \sin(s))$$

und

$$\varrho_2 : (0, 2\pi) \longrightarrow S_R, \varrho_2(t) = R(\cos(t), \sin(t)).$$

Sei φ_1, φ_2 eine untergeordnete Partition der Eins. Dann gilt fuer stetiges $f : S_R \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\begin{aligned} \int f d\sigma &= \int f \varphi_1 d\sigma + \int f \varphi_2 d\sigma \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f \circ \varrho_1(s) \varphi_1 R ds + \int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) \varphi_2(t) R dt. \end{aligned}$$

(Hier nutzen wir die uns schon bekannte Tatsache, dass die entsprechende Gramsche Determinante gerade konstant gleich R ist.) Wir untersuchen nun den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$. Offensichtlich hängt die linke Seite nicht von ε ab. Für die beiden Terme auf der rechten Seite gilt: Da f beschränkt ist, konvergiert der erste Term gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$. Wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ und $\text{supp}(\varphi_1) \subset \{R(\cos(s), \sin(s)) : -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ gilt $\varphi_2 = 1$ auf $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Damit sieht man leicht, dass der zweite Term gegen

$$\int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) \varphi_2(t) R dt$$

konvergiert. Insgesamt folgt also

$$\int f d\sigma = \int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) R dt.$$

Damit kommt man also in diesem Beispiel effektiv mit einer Parametrisierung aus.

Ähnlich kann man sehen, dass auch für die Sphäre in drei Dimensionen oder den Torus effektiv eine Parametrisierung ausreicht.

DEFINITION. Sei M eine Untermannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\nu(x) \in N_x M \setminus \{0\}$ für alle $x \in M$ heißt *Normale*.

Bemerkung. Oft ist man an normierten Normalen interessiert. Ist ν eine Normal, so ist $\mu := \frac{\nu}{\|\nu\|}$ eine normierte Normale.

KAPITEL 4

Der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt lernen wir einen der grossen Sätze der Analysis kennen: Den Satz von Stokes. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des HDI auf höhere Dimensionen verstanden werden. Tatsächlich ist der HDI auch ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis, der unten gegeben wird. Es gibt verschiedene allgemeine Versionen des Satzes von Stokes. Wir präsentieren eine mittelallgemeine Version. Zur Einstimmung formulieren wir den HDI noch einmal um: Die Gleichung

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

können wir mit $I = (a, b)$, also $\partial I = \{a, b\}$ und $f' = \partial f$ und der 'Normalen' $n : \{a, b\} \rightarrow \{-1, 1\}$, $n(a) = -1$, $n(b) = 1$ auch schreiben als

$$\int_I \partial f dt = \int_{\partial I} f n.$$

Das Integral der Ableitung wird zu einem Integral ueber den Rand der Funktion.

Wir brauchen also Mengen mit gutem Rand.

Es geht um offene Teilmengen des \mathbb{R}^N deren Rand 'schoen' ist und ein 'klares Aeusseres' erlaubt.

DEFINITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann hat U einen glatten Rand, wenn der Rand ∂U von U eine Untermannigfaltigkeit ist, und es ein 'Aussen' gibt, d.h. eine stetige Funktion

$$\mu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^N$$

mit

- $\mu(x) \in N_x U$
- $\|\mu(x)\| \equiv 1$
- $x + s\mu(x) \notin U$ fuer alle kleinen $s > 0$ und $x + s\mu(x) \in U$ fuer alle grossen $s < 0$,

fuer alle $x \in \partial U$. Die Funktion μ ist dann eindeutig bestimmt und heisst die aussere Normale von U .

Bemerkung. Da der Rand eine Untermannigfaltigkeit ist, kann er als Nullstellenmenge einer reellen Funktion dargestellt werden. Daher hat der Normalenraum $N_x M$ die Dimension 1. Die Funktion μ ist also durch die ersten beiden Bedingungen bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt. Das Vorzeichen wird durch die letzte Bedingung festgelegt.

Beispiel. (Offene Menge ohne aussere Normale.)

Beispiel. (Offene Menge mit aeusserer Normale)

Beispiel. Generisches Beispiel. *Zeichnung.*

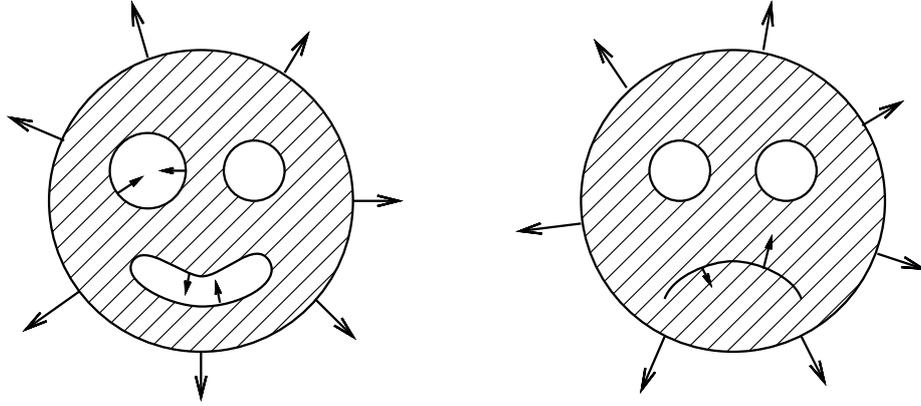


ABBILDUNG 1. Teilmengen mit und ohne „klares“ Äußeres

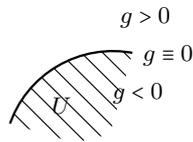
Liegt der Rand als Nullstellenmenge vor, so ist die Berechnung der aeusseren Normalen nicht schwer.

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $p \in \partial U$. Es gelte in einer Umgebung W von p , dass

$$W \cap U = \{x : g(x) < 0\}, \quad W \cap \partial U = \{x : g(x) = 0\}$$

für ein stetig differenzierbares und reguläres $g : W \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist lokal die äußere Normale gegeben durch

$$\mu(x) := \frac{1}{\|\nabla g(x)\|} \nabla g(x).$$



Beweis. Nach Konstruktion ist $\partial U \cap W = N(g)$. Damit gilt also (s.o.) $\nabla g(x) \in N_x \partial U$ für alle $x \in \partial U$. Insbesondere ist also $\mu(x) \in N_x \partial U$. Nach Konstruktion ist μ normiert. Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor

$$g(x + s\mu(x)) = g(x) + s\langle \nabla g(x), \mu(x) \rangle + \text{kleiner Fehler} \sim s\|\nabla g(x)\|.$$

Damit folgt die dritte Eigenschaft der aeusseren Normalen. \square

Wir beginnen nun mit einer Vorversion des Satzes von Stokes.

LEMMA (Kleiner Stokes). Sei $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_N, b_N) \subset \mathbb{R}^N$ offen und nichtleer. Sei $Q' := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{n-1}, b_{n-1})$ und $h : Q' \rightarrow (a_N, b_N)$ stetig diffbar und

$$\Omega := \{(x', x_N) \in Q' \times (a_N, b_N) = Q : x_N > h(x')\},$$

$M :=$ Graph von h und μ die aeussere Normale an M d.h.

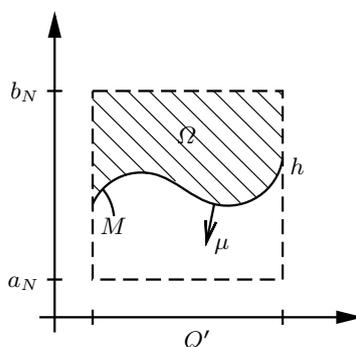
$$\mu(x) := \frac{1}{\|(\nabla h(x'), -1)\|} (\nabla h(x'), -1).$$

Sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit kompaktem Traeger in Q . Dann gilt fuer jedes $j = 1, \dots, N$

$$\int_{\Omega} \partial_j f(x) dx = \int_M f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).$$

Geometrische Situation:

← Ende der Vorlesung



- $g = h - x_N = 0$ auf M , < 0 auf Ω , > 0 auf Ω^c . Entsprechend der vorigen Proposition ist $\nabla g = (\nabla h, -1)$ die aeussere Normale.
- Die Funktion $f : f$ mit Traeger in Q .

Beweis. Wir unterscheiden zwei Faelle fuer den Wert von j .

Es ist $j = N$. Wir rechnen unter Nutzen des Satzes von Fubini im ersten Schritt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_N f(x) dx &= \int_{Q'} \int_{h(x')}^{b_N} \partial_N f(x', x_N) dx_N dx' \\ (HDI) &= \int_{Q'} (f(x', b_N) - f(x', h(x')) dx' \\ (f \text{ kpt Traeger}) &= - \int_{Q'} f(x', h(x')) dx' \\ &= \int_{Q'} f(x', h(x')) \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}} \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx' \\ (Def \mu) &= \int_{Q'} f(x', h(x')) \mu_N(x) \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx' \\ (Def. Oberflaechenintegral) &= \int_M f(x) \mu_N(x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage in diesem Fall.

Es ist $j < N$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \partial_j f(x) dx &= \int_{Q'} \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y, t) dt dy \\
(1) &= \int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt \right) dy + \int_{Q'} (\partial_j h)(y) f(y, h(y)) dy \\
(\text{Erster Term verschwindet !!}) &= \int_{Q'} (\partial_j h)(y) f(y, h(y)) dy \\
&= \int_{Q'} f(y, h(y)) \frac{\partial_j h(y)}{\sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}} \sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2} dy \\
(\text{Def } \mu) &= \int_{Q'} f(y, h(y)) \mu_j(y) \sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2} dy \\
(\text{Def Oberflaechenintegral}) &= \int_M f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Es bleibt (!) und (!!) zu zeigen.

Zu (!): Fuer Funktionen F auf Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ gilt nach Kettenregel

$$\partial_{y_j}(y \mapsto F(h(y), y)) = (\partial_1 F)(h(y), y) \partial_j h(y) + (\partial_j F)(h(y), y).$$

Betrachtet man nun die Funktion $(s, y) \mapsto F(s, y) := \int_s^{b_N} f(y, t) dt$ also

$$F(h(y), y) = \int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt,$$

so gilt

$$(\partial_1 F)(h(y), y) = -f(y, h(y))$$

und

$$(\partial_j F)(h(y), y) = \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y, t) dt.$$

Damit folgt (!). (Hier bezeichnen wir die Ableitung von F nach der j -ten Koordinate mit ∂_j und die 'totale' Ableitung nach y_j mit ∂_{y_j} .)

Zu (!!): Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt \right) dy &= \int_{Q''} \int_{a_j}^{b_j} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y'', y_j, t) dt \right) dy_j dy'' \\
(\text{HDI}) &= \int_{Q''} \left(\int_{h(y'', b_j)}^{b_N} f(y'', b_j, t) dt - \int_{h(y'', a_j)}^{b_N} f(y'', a_j, t) dt \right) dy'' \\
(\text{f kpt Traeger}) &= 0.
\end{aligned}$$

(Der letzte Schritt folgt, da f kompakten Traeger hat, also $f(\cdot, a_j, \cdot) = f(\cdot, b_j, \cdot) = 0$ gilt.) \square

Notation. Eine Funktion $f : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}^k$ heisst stetig diffbar, wenn es eine offene Umgebung W von $U \cup \partial U$ und eine stetig diffbare Fortsetzung von f auf W gibt.

THEOREM. (*Allgemeiner Satz von Stokes*) Sei U eine beschraenkte offene Teilmenge von \mathbb{R}^N mit glattem Rand M und aeusserer Normale μ . Ist $f : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbare Funktion. Dann gilt fuer $j = 1, \dots, N$

$$\int_U \partial_j f(x) dx = \int_{\partial U} f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).$$

Sonderfall $N = 1$. HDI (siehe Diskussion am Anfang des Kapitels).

Beweis. Es ist \bar{U} abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Für jedes $x \in \bar{U}$ wählen wir nun einen offenen achsenparallelen Quader Q_x mit (Zeichnung)

- $Q_x \cap M$ ist als Graph darstellbar, falls $x \in M$.
- $Q_x \cap M = \emptyset$, falls $x \notin M$.

Dann ist Q_x , $x \in \bar{U}$, eine offene Überdeckung des kompakten \bar{U} . Daher gibt es $x_1, \dots, x_n \in \bar{U}$ mit

$$\bar{U} \subset \bigcup_{k=1}^n Q_{x_k}.$$

Setze $Q_k := Q_{x_k}$ und wähle eine dazu untergeordnete Partition der Eins $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, d.h. $\text{supp } \varphi_k \subset Q_k$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \partial_j f dx &= \int_U \partial_j \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k f \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_U \partial_j (\varphi_k f) dx \\ (\text{supp } \varphi_k \subset Q_k) &= \sum_{k=1}^n \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die einzelnen Summanden und zeigen

$$(*) \quad \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx = \int_M \mu_j(x) (\varphi_k f) d\sigma(x)$$

für alle k .

$Q_k \cap M = \emptyset$, d.h. $Q_k \subset U$. Da $Q_k \subset U$, also $Q_k \cap U = Q_k$ und da $\varphi_k f$ in Q_k getragen ist, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx &= \int_{Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx \\ (HDI) &= 0. \end{aligned}$$

Ebenso folgt, da $\varphi_k = 0$ auf M , dass

$$\int_M (\varphi_k f) d\sigma(x) = 0.$$

Das zeigt (*) in diesem Fall. (Bemerke, dass alle 'inneren Integrale' verschwinden).

$Q_k \cap M \neq \emptyset$ d.h. $Q_k \cap M$ als Graph darstellbar. Dann folgt aus dem 'kleinen Stokes' und $\text{supp } \varphi_k \subset Q_k$ also

$$\int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx = \int_{M \cap Q_k} \mu_j(x) (\varphi_k f) d\sigma(x) = \int_M \mu_j(x) f \varphi_k(x) d\sigma(x).$$

Das zeigt (*) auch in diesem Fall.

Aus (*) und der obigen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_U \partial_j f dx &= \sum_{k=1}^n \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx \\
(*) &= \sum_{k=1}^n \int_M \mu_j(x) (\varphi_k f) d\sigma(x) \\
(\textit{Part Eins}) &= \int_M \mu_j(x) f d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Das beweist den Satz. □

Bemerkung. Auch wenn die Menge U keinen glatten Rand hat, kann man unter Umstaenden den Satz von Stokes noch anwenden unter Zuhilfenahme von geeigneten Approximationen. *Zeichnung.* Glaetten eines Quadrates durch Abrunden der Ecken. Die Eckpunkte sind eine 'Nullmenge'.

KAPITEL 5

Die klassischen Integralsaetze

Hier lernen wir eine Reihe von Folgerungen aus dem allgemeinen Satz von Stokes des letzten Abschnittes kennen.

1. Grundlegende Groessen der Vektoranalysis

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so wird die Funktion

$$U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{j=1}^N \partial_j F_j(x)$$

die Divergenz des Vektorfeldes F genannt und mit $\operatorname{div} F$ bezeichnet. Fuer ein zweimal stetig diffbares reelles $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Laplace von f als die Funktion $\Delta f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^N \partial_j^2 f(x).$$

Es gilt

$$\Delta f = \nabla \cdot (\nabla f).$$

Ist $N = 2$ oder $N = 3$ so fuehren wir noch die Rotation des Vektorfeldes F ein durch

$$\operatorname{rot} F(x) = \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)$$

falls ($N = 2$) und

$$\operatorname{rot} F(x) = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

(falls $N = 3$). (Es handelt sich um zyklische Vertauschungen von 1, 2, 3 beginnend mit der 'Koordinate'.)

(*Notation.* Man schreibt auch $\nabla \cdot F$ statt $\operatorname{div} F$ bzw. $\nabla \times F$ statt $\operatorname{rot} F$.)

Ist $N = 3$ so gilt fuer alle zweimal stetig diffbaren Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0$$

sowie fuer alle zweimal stetig diffbaren Vektorfelder $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} F \equiv 0.$$

(Uebung)

Schliesslich erweist sich noch der Begriff des Flusses als nuetzlich.

DEFINITION (Fluss). Ist M eine Hyperflaeche und $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine normierte stetige Normale. Ist F eine Vektorfeld in einer Umgebung von M , so nennt man

$$\int_M \langle F, \mu \rangle d\sigma(x)$$

← Ende der Vorlesung →

den Fluss von F durch M (in Richtung von μ).

2. Die Saetze von Gauss und Green

In diesem Abschnitt lernen wir zwei wichtige Saetze der Analysis kennen, die einfache Folgerungen aus dem Satz von Stokes sind.

THEOREM (Satz von Gauss). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschaenkt mit glattem Rand. Sei μ die aeussere Normale. Sei $F : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} F dx = \int_{\partial U} \langle F(x), \mu(x) \rangle dS(x).$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stokes durch Summieren:

$$\int_U \operatorname{div} F dx = \int_U \sum_{j=1}^N \partial_j F_j dx = \int_{\partial U} \sum_{j=1}^N F_j \mu_j d\sigma.$$

□

Bemerkung. Der Satz von Gauss erscheint hier als direkte Folge des Satzes von Stokes. Man kann auch die umgekehrte Implikation einfach zeigen, indem man fuer ein festes $j \in \{1, \dots, N\}$ das Vektorfeld $F = (0, \dots, 0, f, 0, \dots)$ mit f an der j -ten Komponenten betrachtet...

Bemerkung - Rechenhilfe. Ist ∂U durch die Funktion $\psi : V \rightarrow \partial U$ parametrisiert, so gilt nach der oben diskutierten Folgerung zur Normalen einer Flaechen mit $\nu := \partial_1 \psi \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} \psi$ also $\mu = \frac{1}{|\nu|} \nu$ und $|\nu| = G_\psi$. Damit folgt

$$\int_{\partial U} \langle F(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x) = \int_{\partial U} \langle F(x), \frac{1}{|\nu|} \nu \rangle d\sigma(x) = \int_V \langle F(x), \nu(x) \rangle dv$$

(bis auf evtl. ein Vorzeichen). Fuer das Ausrechnen solcher Oberflaechenintegrale muss also nicht die Gramsche Determinanten berechnet werden, sondern es reicht also ν zu berechnen.

Wir geben nun zwei Deutungen des Satzes von Gauss.

Deutung - statische inkompressible Situation. (Quellen, aber keine Verdichtung moeglich)

Betrachte einen zeitunabhaengigen Fluss $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit einer Quellendichte $q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt im inkompressiblen Fall

$$\text{Nettofluss aus } U = \text{Nettoerzeugnis in } U.$$

Wir rechnen beide Seiten aus

$$\text{Nettofluss} = \int_{\partial U} \langle F, \mu \rangle d\sigma \stackrel{\text{(Gauss)}}{=} \int_U \nabla \cdot F dx$$

und

$$\text{Nettoerzeugnis} = \int_U q(x) dx.$$

Gleichsetzen ergibt (da U beliebig, Uebung) also

$$q = \operatorname{div} F.$$

Die Divergenz ist also eine Quellendichte.

Deutung - dynamische Situation mit Substanzerhaltung (Keine Quellen, aber Verdichtung moeglich)

Es fliesse eine Substanz im \mathbb{R}^N beschrieben durch den Strom $j = j(x, t)$ und die Dichte $\varrho(x, t)$. Dann ist die Masse m in einer Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ also

$$m = m_U = \int_U \varrho dx.$$

Fuer die zeitliche Aenderung der Masse gilt bei Substanzerhaltung also

$$\text{Fluss aus } U = \text{Zeitliche Aenderung der Masse in } U.$$

Es gilt

$$\text{Aenderung der Masse} = \partial_t m = \int_U \partial_t \varrho dx$$

sowie nach Gausschem Satz

$$\text{Fluss aus } U = \int_{\partial U} \langle j, \mu \rangle d\sigma(x) = \int_U \text{div} j dx.$$

Gleichsetzen ergibt (da U beliebig) also

$$\partial_t \varrho = \text{div} j.$$

Das ist als Kontinuitaetsgleichung bekannt.

THEOREM (Greensche Formel). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen mit glattem Rand. Sei μ die aeuessere Normale. Seien $f, g : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Dann gilt*

$$\int_U (f(x)\Delta g(x) - \Delta f(x)g(x)) dx = \int_{\partial U} f(x)\langle \nabla g(x), \mu(x) \rangle - g(x)\langle \nabla f(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x).$$

Bemerkung. Es ist $\langle \nabla g(x), \mu(x) \rangle$ gerade die Richtungsableitung von f in Richtung der aeuesseren Normale. Diese wird oft auch als Normalenableitung von f bezeichnet und als $\partial_\mu f$ geschrieben. Damit lautet dann der Satz

$$\int_U (f\Delta g - \Delta f g) dx = \int_{\partial U} f\partial_\mu g - g\partial_\mu f dS(x).$$

Beweis. Direkte Rechnung (Produktregel) zeigt, dass

$$\nabla \cdot (f(x)\nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + f(x)\Delta g(x)$$

und entsprechend

$$\nabla \cdot (g(x)\nabla f(x)) = \langle \nabla g(x), \nabla f(x) \rangle + g(x)\Delta f(x).$$

Bilden der Differenz und Anwenden des Gausschen Satzes liefert die Behauptung. \square

FOLGERUNG. *Situation wie im vorigen Satz. $\varphi : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Dann gilt*

$$\int_U \Delta \varphi(x) dx = \int_{\partial U} \langle \nabla \varphi(x), \mu(x) \rangle dS(x).$$

Beweis. Setze $f \equiv 1$ und $g = \varphi$ im vorigen Satz. \square

Bemerkung - Interpretation. Sei φ Potential des Kraftfeldes $\nabla \varphi$. Dann ist

$$\int_{\partial U} \langle \nabla \varphi(x), \mu(x) \rangle dS(x)$$

der Fluss des Feldes durch den Rand (nach aussen). Mit dem Satz von Gauss erhaelt man dann die Gleichheit dieses Flusses mit $\int_U \Delta \phi dx$. Damit kann man dann Δu als Quellendichte interpretieren.

3. Der Satz von Stokes in der Ebene

Wir betrachten eine Menge, die durch eine Kurve berandet ist. Zeichnung.

THEOREM. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhaengend mit glattem Rand M , der eine regulaere injektive Parametrisierung durch eine geschlossene (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$) stetig diffbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt (so dass U 'links' von γ liegt). Ist $F : U \cup M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig diffbares Vektorfeld, so gilt

$$\int_U \text{rot} F dx = \int_\gamma F d\gamma.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer kleinen Vorueberlegung: Ist (μ_1, μ_2) die aeussere Normale an M , so ist $(-\mu_2, \mu_1)$ also ein normierter Tangentialvektor, der durch Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht. Da das Gebiet U links von γ liegt, ist dann $(-\mu_2, \mu_1)$ der normalisierte Tangentialvektor in Richtung der Kurve γ . (Zeichnung) Es gilt also

$$\frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) = (-\mu_2, \mu_1).$$

Nun zum eigentlichen Schluss: Mit dem Satz von Stokes (oder dem Satz von Gauss) und der Parametrisierung γ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_U \text{rot} F dx &= \int_U (\partial_1 f_2(x) - \partial_2 f_1(x)) dx \\ (\text{Gauss}) &= \int_M (f_2(x) \mu_1(x) - f_1(x) \mu_2(x)) d\sigma(x) \\ &= \int_M \langle (f_1, f_2), (-\mu_2, \mu_1) \rangle d\sigma(x) \\ (\text{Parametrierung}) &= \int_a^b \langle (f_1, f_2)(\gamma(t)), (-\mu_2, \mu_1) \rangle |\gamma'(t)| dt \\ (\text{Vorueberlegung}) &= \int_a^b \langle (f_1, f_2)(\gamma(t)), \frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \rangle |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \langle f \circ \gamma, \gamma' \rangle dt. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. Seien U und γ wie im Satz. Dann ist die Flaechen $F(U)$ von U gleich der Haelfte des Kurvenintegrals ueber das Vektorfeld $k(x, y) = (-y, x)$ ueber γ d.h. es gilt

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_\gamma k(x, y) d\gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \langle (-\gamma_2, \gamma_1), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Beweis. Uebung. □

Bemerkung. Die Formel kann man (zeichnerisch) interpretieren. Dabei nutzt man, dass $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$ gilt: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle (-\gamma_2, \gamma_1), \gamma'(t) \rangle dt &= \frac{1}{2} |(-\gamma_2, \gamma_1)(t)| |\gamma'(t)| dt \cos(\text{eingeschlossener Winkel } (-\gamma_2, \gamma_1), \gamma') \\ &= \|\gamma(t)\| |\gamma'(t)| \sin(\text{eingeschlossener Winkel } (\gamma(t), \gamma'(t))) \\ &= \frac{1}{2} |a| |b| \sin(a, b) \\ &= \text{Fläche des infinitesimalen Dreiecks mit Seiten } a = \gamma \text{ und } b = \gamma' dt \end{aligned}$$

←
Ende der Vorlesung

4. Der Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 .

Wir betrachten folgende Situation: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit glattem Rand M , der eine reguläre injektive Parametrisierung durch eine stetig diffbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt (so dass U 'links' von γ liegt). Sei $\varphi : U \cup M \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig diffbare reguläre Parametrisierung. Das Bild von φ (die 'Haube') werde mit H bezeichnet. Dann gilt mit $\varrho := \varphi \circ \gamma$ und $\mu := \frac{1}{|\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi|} (\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi)$

$$\int_H \langle \text{rot} F, \mu \rangle d\sigma(x) = \int_{\varrho} F d\varrho$$

für jedes stetig diffbare Vektorfeld $F : H \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Diese Aussage kann man mittels einer etwas länglichen Rechnung auf die zweidimensionale Version des Satz von Stokes zurückführen. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Details.

Etwas Fourieranalysis

In diesem Abschnitt lernen wir ein wichtiges Hilfsmittel fuer viele Bereiche der Mathematik und Physik kennen: Die Fouriertransformation.

1. Die Fouriertransformation auf \mathbb{R}^N

Wir geben kurz einen Ueberblick der kommenden Attraktionen: Fuer geeignete Funktionen f auf \mathbb{R}^N ist die Fouriertransformation Ff definiert durch

$$Ff : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, Ff(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Die Fouriertransformation ist dann invertierbar mit Inverser gegeben durch

$$F^{-1}g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} g(y) dy.$$

Hier gilt natuerlich

$$e^{ixy} = e^{i \sum_{j=1}^N x_j y_j}, \quad e^{-ixy} = e^{-i \sum_{j=1}^N x_j y_j}.$$

Die Fouriertransformation vertauscht Differentiation mit Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen und daher ruehrt ihre Bedeutung in der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen.

Wir werden die eben skizzierten Ideen nun praezise fassen.

Dazu *erinnern* wir zunaechst an die Multiindexnotation. Ein Multiindex der Dimension N ist ein $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Fuer einen solchen Multiindex definiert man

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j \text{ Betrag oder Laenge des Multiindex}$$

und die Funktion

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha := \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} \text{ fuer } x \in \mathbb{R}^N.$$

Diese Funktionen bilden eine Basis der Vektorraumes der Polynome. Weiterhin assoziiert man zu einem Multiindex α den Operator M_α der Multiplikation mit x^α d.h.

$$M_\alpha f = x^\alpha f$$

fuer $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$ und den Operator D^α der α -Ableitung

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^N D_j^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^N \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

mit $D_j := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j}$. Dieser Operator wirkt auf ein beliebig oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ in der schon aus dem zweiten Semester bekannten (induktiv definierten) Weise durch

$$D^0 f = f \quad D^{\alpha+e_j} := D_j(D^\alpha f)$$

(fuer die standard Orthonormalbasis e_j , $j = 1, \dots, N$, in \mathbb{R}^N). (Hier heisst eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar, wenn sowohl Realteil als auch Imaginaerteil von f beliebig oft differenzierbar sind.)

Der *Schwartzsche Raum* (nach Laurent Schwartz) $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ der schnell fallenden Funktionen auf \mathbb{R}^N ist der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein $C = C_{\alpha,\beta}(f)$ existiert mit

$$|x^\beta| |D^\alpha f(x)| \leq C$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$. Eine aequivalente Charakterisierung definiert den Schwartzraum als diejenigen beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R}^N , fuer die gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|)^p |D^\alpha f(x)| < \infty$$

fuer alle $p \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Es ist nicht schwer zu sehen (Uebung), dass der Raum \mathcal{S} invariant ist under Anwendung von D^α und M_α (d.h. fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ gehoeren auch $D^\alpha f$ und $M_\alpha f$ zu \mathcal{S} fuer jeden Multiindex α).

Fuer Funktionen aus \mathcal{S} koennen wir die Fouriertransformation definieren.

PROPOSITION. *Fuer $f \in \mathcal{S}$ existiert*

$$g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$$

fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ und die Funktion $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto g(x)$ ist stetig und beschaenkt.

Beweis. Sei (fuer festes $x \in \mathbb{R}^N$) die Funktion h definiert durch $h(y) := e^{-ixy} f(y)$. Dann ist h stetig und es gilt

$$|h(y)| = |f(y)|(1 + |y|)^{N+1} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} \leq \frac{C}{(1 + |y|)^{N+1}}$$

(da $f \in \mathcal{S}$). Daher existiert g als uneigentliches Integral bzw. als Lebesgueintegral, und es gilt

$$|g(x)| \leq C \int \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy < \infty$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$. Es ist also g beschraenkt. Weiterhin gilt mit einer aehnlichen Argumentation

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| |f(y)| dy \\ &\leq (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| |f(y)| (1 + |y|)^{N+1} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy \\ &\rightarrow 0 \quad , x \rightarrow x'. \end{aligned}$$

(Zum letzten Schritt: Zerlege \mathbb{R}^N in B_R und $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ mit R so gross, dass

$$C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nutze nun die gleichmaessige Konvergenz von $|e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \rightarrow 0$ auf B_R , um (auf B_R den Grenzwert mit der Integration zu vertauschen.) \square

DEFINITION. Fuer $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die Fouriertransformation Ff von f durch $Ff(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$.

Notation. Man schreibt auch \widehat{f} statt Ff .

LEMMA. (Grundlegende Eigenschaften von F) Es gilt $F\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ und

$$D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} F M_\alpha f \quad \text{und} \quad M_\alpha Ff = F D^\alpha f$$

fuer alle $f \in \mathcal{S}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Beweis. Sei M_j die Multiplikation mit x_j und e_j der j -te Einheitsvektor in \mathbb{R}^N . Mit f gehoert auch $M_j f$ zu \mathcal{S} (klar!). Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} Ff(x + he_j) - Ff(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} (e^{-ihy_j} - 1) f(y) dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) \left(\int_0^h (-iy_j) e^{-ity_j} dt \right) dy \\ \text{(Fubini)} &= -i(2\pi)^{-N/2} \int_0^h \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x+te_j)y} y_j f(y) dy \right) dt \\ &= -i \int_0^h (FM_j f)(x + te_j) dt. \end{aligned}$$

Damit folgt nach dem HDI (da die Fouriertransformation nach der schon bewiesenen Proposition stetig ist)

$$\partial_j Ff(x) = -i(FM_j f)(x)$$

also

$$D_j Ff = -FM_j f.$$

Es ist also $D_j Ff$ wieder das Fourierbild einer Funktion aus \mathcal{S} naemlich $M_j f$ und wir koennen das Verfahren iterieren. Induktiv erhaelt man dann

$$D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} (FM_\alpha f).$$

Damit ergibt eine kleine Rechnung

$$\begin{aligned}
(M_\beta D^\alpha Ff)(x) &= x^\beta (2\pi)^{-N/2} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} y^\alpha f(y) dy \\
(D_y^\beta e^{-ixy} = (-1)^{|\beta|} x^\beta e^{-ixy}) &= (2\pi)^{-N/2} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int (D_y^\beta e^{-ixy})(y^\alpha f(y)) dy \\
(\text{part.Int}) &= (2\pi)^{-N/2} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} D^\beta (y^\alpha f(y)) dy \\
(D^\beta (y^\alpha f(y)) \in \mathcal{S}) &= (-1)^{|\alpha|} (FD^\beta M_\alpha f)(x).
\end{aligned}$$

Damit folgen sofort die beiden im Lemma genannten Gleichungen (indem man die Faelle $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ betrachtet).

Es bleibt $F\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ zu zeigen: Sei $f \in \mathcal{S}$ gegeben. Da $D^\beta M_\alpha f$ zu \mathcal{S} gehoert, ist die Fouriertransformation $F(D^\beta M_\alpha f)$ beschaenkt nach der vorigen Proposition fuer alle Multiindices α und β . Damit ist dann also nach der kleinen Rechnung $(M_\beta D^\alpha Ff)$ beschaenkt fuer alle Multiindices α und β . Damit gehoert Ff zu \mathcal{S} . \square

Wir berechnen nun eine spezielle Fouriertransformation. Damit koenen wir dann die Bijektivitaet der Fouriertransformation auf \mathcal{S} anschliessend leicht beweisen.

PROPOSITION. Sei $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$. Dann gehoert φ zu \mathcal{S} , und es gilt $F\varphi = \varphi$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst $\varphi \in \mathcal{S}$: Offenbar (vgl. Analysis I) ist φ beliebig oft differenzierbar, und es ist $\partial^\alpha \varphi = P_\alpha(x)\varphi(x)$ mit einem Polynom P_α . Da die Exponentialfunktion schneller waechst als jedes Polynom, folgt die gewuenschte Beschaenktheit.

Wir kommen nun zu der Aussage ueber die Fouriertransformation von φ .

Die Aussage gilt fuer $N = 1$. Die Funktion $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ loest offenbar das Anfangswertproblem

$$\varphi_1'(x) + x\varphi_1(x) = 0, \varphi_1(0) = 1.$$

Fuer $\psi := F\varphi_1$ gilt nach dem vorigen Satz aber ebenfalls:

$$\begin{aligned}
\psi' + M_x \psi &= iDF\varphi_1 + MF\varphi \\
(\text{voriger Satz}) &= -iFM\varphi_1 + FD\varphi_1 \\
&= -iF(M\varphi + iD\varphi) \\
(\varphi \text{ loest DGL}) &= -iF(\text{Nullfunktion}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

und (wegen $1 = e^{-i0y}$)

$$\psi(0) = F\varphi_1(0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

(Die letzte Gleichheit wurde im letzten Semester gezeigt: Quadrieren, Fubini, Polarkoordinaten...) Damit loesen φ_1 und ψ das gleiche Anfangswertproblem. Nach dem Eindeutigkeitsatz gilt also

$$F\varphi_1 = \psi = \varphi_1.$$

Die Aussage gilt fuer beliebiges N . Offenbar gilt

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^N \varphi_1(x_j).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} F\varphi(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} \prod_{j=1}^N \varphi_1(y_j) dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^N e^{-ix_j y_j} \varphi_1(y_j) dy \\ (\text{Produkt}) &= \prod_{j=1}^N (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j y_j} \varphi_1(y_j) dy_j \\ &= \prod_{j=1}^N F\varphi_1(x_j) \\ (N=1) &= \prod_{j=1}^N \varphi_1(x_j) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM. Die Fouriertransformation $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist bijektiv. Es gilt

$$F^{-1}f(x) = Ff(-x) = \int e^{ixy} f(y) dy.$$

Inbesondere folgt also $F^2 f(x) = f(-x)$ und $F^4 f = f$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst einige Hilfsformeln:

Formel (A) ('Umschaeffeln' der Fouriertransformation und Nutzen, dass die Fouriertransformation Multiplikation mit $e^{i\cdot}$ in Translation ueberfuehrt):

$$\begin{aligned} \int e^{ixy} g(y) (Ff)(y) dy &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} g(y) \left(\int e^{-iyz} f(z) dz \right) dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int f(z) \left(\int e^{-i(z-x)y} g(y) dy \right) dz \\ &= \int f(z) (Fg)(z-x) dx \\ &= \int (Fg)(z) f(z+x) dz. \end{aligned}$$

Formel (B) (Verhalten der Fouriertransformation unter Skalierung): Mit $g_\varepsilon(x) := g(\varepsilon x)$ fuer $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (Fg_\varepsilon)(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixy} g(\varepsilon y) dy \\ (\text{Trafo } z = \varepsilon y, y = \frac{1}{\varepsilon} z) &= (2\pi)^{-N/2} \varepsilon^{-N} \int e^{-ixy/\varepsilon} g(y) dy \\ &= \varepsilon^{-N} (Fg)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Formel (C) (Kombination von (A) und (B)):

$$\begin{aligned} \int e^{ixy} g(\varepsilon y) (Ff)(y) dy &= \int e^{ixy} g_\varepsilon(y) (Ff)(y) dy \\ (A) &= \int (Fg_\varepsilon)(z) f(z+x) dz \\ (B) &= \varepsilon^{-N} \int (Fg)\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) f(z+x) dz \\ (\text{Trafo } y = \frac{1}{\varepsilon} z, z = \varepsilon y) &= \int (Fg)(y) f(\varepsilon y + x) dy \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int e^{ixy} g(\varepsilon y) (Ff)(y) dy = \int (Fg)(y) f(\varepsilon y + x) dy.$$

Wir setzen nun in (C) die Funktion $g = \varphi$ aus der vorangehenden Proposition und nutzen $F\varphi = \varphi$ und $\varphi(0) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} (Ff)(y) dy &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} \varphi(0) (Ff)(y) dy \\ (!) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} \varphi(\varepsilon y) (Ff)(y) dy \\ (C) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-N/2} \int (F\varphi)(z) f(\varepsilon z + x) dz \\ (F\varphi = \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-N/2} \int \varphi(z) f(\varepsilon z + x) dz \\ (!!) &= (2\pi)^{-N/2} f(x) \int \varphi(z) dz \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(Zu (!) und (!!): Die Integrale auf $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ sind klein fuer grosse R . Auf B_R liegt gleichmaessige Konvergenz vor (s.o. fuer einen aehnlichen Schluss).)

Die vorangehende Rechnung zeigt

$$f(x) = F(Ff)(-x)$$

also

$$(*) \quad f(-x) = (F^2 f)(x).$$

Damit folgt sofort $F^4 = I$. Damit ist F bijektiv mit Inverser F^3 . Weiterhin folgt aus der Formel (*) (mit $g = F^{-1}f$ statt f und $-x$ statt x) noch

$$(F^{-1}f)(x) = (Ff)(-x) = \int e^{ixy} f(y) dy$$

fuer alle $f \in \mathcal{S}$. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. \square

← Ende der Vorlesung

Die bisher bewiesenen Saetze lassen sich zur Untersuchung des Laplaceoperator verwenden:

Beispiel/Anwendung. Es gilt

$$-\Delta = F^{-1} M_{|x|^2} F \text{ auf } \mathcal{S}$$

(d.h. $-\Delta f = F^{-1}(|x|^2 Ff)$ fuer alle $f \in \mathcal{S}$.)

Bew. Bijektivitaet von F und vorige Formeln.

Fuer die Berechnung von $-\Delta$ ist das nicht unbedingt nuetzlich, aber zur Berechnung von Inversen kann man es gut verwenden:

Beh. Fuer gegebenes $g \in \mathcal{S}$ hat die Gleichung $(-\Delta + 1)f = g$ in \mathcal{S} genau eine Loesung. Diese ist gegeben durch $F^{-1} \frac{1}{1+|\cdot|^2} Fg$.

Bew. Da F den Raum \mathcal{S} in sich selber abbildet ist $(-\Delta + 1)f = g$ nach Anwenden von F und der obigen Aussage also aequivalent zu

$$(M_{|\cdot|^2} + 1)Ff = Fg$$

und damit

$$Ff = \frac{1}{1+|\cdot|^2} Fg.$$

Mit g gehoert auch Fg und (!) $\frac{1}{1+|\cdot|^2} Fg$ zu \mathcal{S} . Damit ist letztere Gleichung aequivalent zu

$$f = F^{-1} \left(\frac{1}{1+|\cdot|^2} \right) Fg.$$

Das zeigt die gewuenschte Behauptung.

Bemerkung. Entsprechendes gilt wenn man die 1 durch ein $\alpha > 0$ ersetzt.

Zur Berechnung des Inversen von $-\Delta$ reicht das nocht nicht. Das liegt tatsaechlich daran, dass $-\Delta$ in einem spaeter noch zu praezisierenden Sinne nicht invertierbar ist. Immerhin erhalten wir aus unseren Betrachtungen eine notwendige Bedingung.

Beispiel/Anwendung. Hat die Gleichung $-\Delta f = g$ fuer ein $g \in \mathcal{S}$ eine Loesung $f \in \mathcal{S}$, so ist diese gegeben durch $F^{-1} \frac{1}{|\cdot|^2} Fg$. (Dabei bezeichnet $\frac{1}{|\cdot|^2} Fg$ die dann existierende eindeutige Funktion in \mathcal{S} , die fuer $x \neq 0$ mit $\frac{1}{|x|^2} Fg(x)$ uebereinstimmt.)

Bew. Wie eben. (Wichtig: Es gehoert zu den Voraussetzungen der Aussage, dass f also auch $Ff = \frac{1}{|\cdot|^2} Fg$ zu \mathcal{S} gehoert.)

Bemerkung. Es kann mehrere Loesungen geben, die aber nicht alle in \mathcal{S} liegen. Etwa

$$\Delta 1 \equiv 0 = \Delta 0.$$

Fuer weitergehende Betrachtungen erweist sich noch das Konzept der Faltung als nuetzlich. Wir fuehren es als naechstes ein.

PROPOSITION. *Fuer $f \in \mathcal{S}$ und $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ beschraenkt, so dass die Einschraenkung von g auf jeden Wuerfel Riemann / Lebesgue integrierbar ist, existiert fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ das Integral*

$$g * f(x) := \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy (= g * f(x)).$$

Beweis. Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Substitutionsregel ($S : y \mapsto x-y$, $|\det DS| = |(-1)^N| = 1$). Existenz des Integrals folgt, da f schnell faellt. \square

Notation. Man nennt $g * f$ die Faltung von g und f .

Die Faltung zweier Funktionen vereinigt 'das Beste' der beiden Funktionen auf sich.

PROPOSITION. (*Glaetten durch Falten*) Sei $f \in \mathcal{S}$ und $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, so dass die Einschränkung von g auf jeden Wuerfel Riemann/Lebesgue integrierbar ist. Dann gilt:

- (a) Es ist $f * g$ beliebig oft diffbar und es gilt $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f * g)$.
 (b) Fallt g schneller als jedes Polynom, so faellt auch $f * g$ schneller als jedes Polynom.
 (c) Haben f und g kompakten Traeger, so hat auch $f * g$ kompakten Traeger.

Beweis. (a) Es reicht die Formel fuer die Ableitung zu zeigen. Wir zeigen das induktiv, nach $|\alpha|$. Hier diskutieren wir nur den Fall $|\alpha| = 1$. Zu zeigen ist also :

$$\frac{1}{h}(f * g(x + he_j) - f * g(x)) \rightarrow (\partial_j f) * g(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(x + he_j) - (f * g)(x) &= \int (f(x + he_j - y) - f(x - y))g(y)dy \\ &= \int g(y) \left(\int_0^h \partial_j f(x + se_j - y) ds \right) dy \\ &= \int_0^h \left(\int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy \right) ds. \end{aligned}$$

Es ist nun die Funktion $s \mapsto \int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy$ stetig in s (!). Daher folgt aus dem HDI die Behauptung (a).

Noch zu zeigen (!): Ueblicher Schluss: Ausserhalb einer (grossen) Kugel ist das Integral sowieso klein. Auf dieser Kugel hat man gleichmaessige Konvergenz.

(b) Offenbar gilt

$$(1 + |x + y|^2) \leq 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2).$$

Damit kann man abschaetzen

$$\begin{aligned} |(1 + |x|^2)^N f * g(x)| &= \left| \int (1 + |x|^2)^N f(x - y)g(y)dy \right| \\ &\leq \int (1 + |x - y + y|^2)^N |f(x - y)||g(y)|dy \\ &\leq 2^N \int (1 + |x - y|^2)^N |f(x - y)|(1 + |y|^2)^N |g(y)|dy. \end{aligned}$$

Der Faktor $(1 + |x - y|^2)^N |f(x - y)|$ ist beschränkt, da $f \in \mathcal{S}$. Da g schneller faellt als jedes Polynom ist

$$(1 + |y|^2)^N |g(y)| \leq (1 + |y|)^{-N-1}$$

integrierbar. Das liefert die Behauptung.

(c) Ist f in K getragen und g in L so ist $f * g$ im kompakten $K + L$ getragen: Damit

$$f * g(x) = \dots \int f(y)g(x - y)dy$$

nicht verschwindet muss auf jeden Fall ein $y \in K$ mit $x - y \in L$ existieren und damit

$$x \in y + L \in K + L$$

gelten.

□

FOLGERUNG. Sind $f, g \in \mathcal{S}$, so gehoert auch $f * g$ zu \mathcal{S} .

Beweis. Das folgt sofort aus (a) und (b) der vorangehenden Proposition. □

Beispiel/Anwendung. Ist $f \in \mathcal{S}$ gegeben und $u \in \mathcal{S}$ eine Loesung von $(-\Delta + \alpha)u = f$, so erfuehlt $w = u * \varrho$ fuer jedes beschraenkte ϱ (das auf allen Wuerfeln Riemann / Lebesgue integrierbar ist) die Gleichung

$$(-\Delta + \alpha)w = f * \varrho.$$

Bew. Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$(-\Delta + \alpha)w = (-\Delta + \alpha)(u * \varrho) = (-\Delta + \alpha)u * \varrho = f * \varrho.$$

Damit kommen wir nun zu Faltungen und Fouriertransformation.

← Ende der Vorlesung.

LEMMA. Seinen $f, g \in \mathcal{S}$ gegeben. Dann gilt:

(a) Es gehoert $g * f$ zu \mathcal{S} und es gilt $F(g * f) = (2\pi)^{N/2} FgFf$ sowie $F^{-1}(g * f) = (2\pi)^{N/2} F^{-1}fF^{-1}g$.

(b) Es gehoert fg zu \mathcal{S} und es gilt $(2\pi)^{N/2} F(fg) = Fg * Ff$ sowie $(2\pi)^{N/2} F^{-1}(fg) = F^{-1}g * F^{-1}f$.

Beweis. Es reicht (a) zu zeigen. (Dann folgt (b), da F bijektiv ist). Wir haben in der vorigen Proposition schon gezeigt, dass $f * g$ zu \mathcal{S} gehoert. Es bleibt die Aussage ueber die (inverse) Fouriertransformation zu beweisen. Das folgt durch eine direkte Rechnung. Wir behandeln nur die Aussage ueber die Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} F(g * f)(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixy} (g * f)(y) dy \\ (Def) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixy} \int g(y-z) f(z) dz dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int \int e^{-ix(y-z)} g(y-z) e^{-ixz} f(z) dz dy \\ (Sortieren) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixz} f(z) \left(\int e^{-ix(y-z)} g(y-z) dy \right) dz \\ (Substitution y - z \rightarrow y) &= \int e^{-ixz} f(z) Fg(x) dz \\ &= (2\pi)^{N/2} Ff(x) Fg(x). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Die Fouriertransformation 'vertauscht' Translationen mit Multiplikationen mit $e^{i\cdot}$ (vgl. Uebung). Das ist eine fundamentale Eigenschaft der Fouriertransformation. Eine differentielle Form dieser Eigenschaft liefert, dass die Fouriertransformation Ableitungen mit Multiplikation mit Polynomen 'vertauscht'. Eine integrale Form dieser Eigenschaft liefert, dass die Fouriertransformation Faltungen mit Multiplikationen 'vertauscht'.

Fuer f auf \mathbb{R}^N wird \tilde{f} definiert durch $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$.

LEMMA. Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt $F(\tilde{f}) = \overline{Ff}$.

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} F\tilde{f}(x) &= \dots \int e^{-ixy} \tilde{f}(y) dy \\ &= \dots \int e^{-ixy} \bar{f}(-y) dy \\ (y < -- > -y) &= \dots \int e^{ixy} \bar{f}(y) dy \\ &= \overline{\dots \int e^{-ixy} f(y) dy}. \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG. (*Parsevalsche Gleichung fuer \mathcal{S}*) Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt die Gleichung

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |Ff(x)|^2 dx.$$

Bemerkung. Die Folgerung liefert die Isometrie der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ (s.u.).

Beweis. Sei $g = f * \tilde{f}$. Dann gilt nach direkter Rechnung

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx$$

und nach voriger Prop

$$F(g) = (2\pi)^{N/2} |F(f)|^2.$$

Damit koennen wir $g(0)$ auf zwei Arten ausrechnen:

$$\int |f(x)|^2 dx = g(0) = F^{-1}(Fg)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int 1 Fg(x) dx = \int |Ff|^2 dx.$$

Das beendet den Beweis. □

Die bisherigen Betrachtungen koennen sehr stark verallgemeinert werden. Das deuten wir zum Abschluss dieses Abschnittes an. (Eine detailliertere Diskussion wird in Vorlesungen zu Distributionentheorie gegeben.) Sei \mathcal{S}^* der algebraische Dualraum von \mathcal{S} d.h. der Vektorraum der linearen Abbildungen von \mathcal{S} nach \mathbb{C} .

Wir geben zunaechst einige Beispiele von Elementen von \mathcal{S}^* :

Die Auswertung in einem festen Punkt gehoert zu \mathcal{S}^* . Genauer ist fuer $x \in \mathbb{R}^N$

$$\delta_x : \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x),$$

ein Element von \mathcal{S}^* .

Jede stetige polynomiell beschaenkte Funktion kann als Element von \mathcal{S}^* aufgefasst werden mittels der kannonischen Abbildung

$$j : \{\text{Beschaenkte stetige Funktionen}\} \longrightarrow \mathcal{S}^*, h \mapsto j_h$$

mit

$$j_h(f) := \int h(x) f(x) dx.$$

Diese Abbildung ist injektiv (Uebung). Insbesondere kann man alle Elemente aus \mathcal{S} auffassen als Element von \mathcal{S}^* . Auf der konzeptuellen Ebene ist es ein

wesentlicher Schritt eine Funktion nicht mehr als Abbildung auf \mathbb{R}^N sondern als Abbildung auf \mathcal{S} aufzufassen!

Notation: Fuer $u \in \mathcal{S}^*$ und $f \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$(u|f) := u(f).$$

(Diese Notation gibt wieder, dass u und f recht 'gleichberechtigt' sind.)

Wir werden nun auf \mathcal{S}^* Ableitungen, Multiplikation mit Polynomen und Fouriertransformation eingefuehrt. Sei dazu $u \in \mathcal{S}^*$ gegeben.

(∂^α) Fuer $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ definiert man $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}^*$ via

$$(\partial^\alpha u|f) := (-1)^{|\alpha|}(u|f).$$

(M_α) Fuer $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ definiert man $M_\alpha u \in \mathcal{S}^*$ via

$$(M_\alpha u|f) := (u|M_\alpha f).$$

Entsprechend definiert man fuer ein strikt positives Polynom P noch $\frac{1}{P}u \in \mathcal{S}^*$ via $(\frac{1}{P}u|f) := (u|\frac{1}{P}f)$.

(F) Man definiert $Fu \in \mathcal{S}^*$ via

$$(Fu|f) := (u|Ff)$$

und $F^{-1}u$ via

$$(F^{-1}u|f) := (u|F^{-1}f).$$

Damit haben wir fuer \mathcal{S} die entsprechenden Operationen doppelt definiert. Die jeweiligen Definitionen sind miteinander vertraeglich. Genauer gilt fuer $f \in \mathcal{S}$:

- $\partial^\alpha j_f = j_{\partial^\alpha f}$.
- $M_\alpha j_f = j_{M_\alpha f}$.
- $F j_f = j_{Ff}$.

(Diese Formeln lassen sich einfach durch eine direkte Rechnung zeigen.)

Wir berechnen nun einige Fouriertransformationen: Es gilt

$$F(\delta_x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-ix}.$$

$$F(e^{-ix}) = (2\pi)^{N/2} \delta_{-x}.$$

(Bew: Das folgt durch direkte Rechnung.)

← Ende der Vorlesung →

Die Betrachtungen zur Fouriertransformation auf \mathcal{S} liefern nun folgendes:

$$D^\alpha Fu = (-1)^{|\alpha|} FM_\alpha u \text{ und } M_\alpha Fu = FD^\alpha u$$

fuer alle $u \in \mathcal{S}^*$.

(Bew. Direkte Rechnung.)

Damit folgt (wie oben): Ist $w \in \mathcal{S}^*$ (z.B. $u = \delta_0$), so hat die Gleichung

$$(-\Delta + \alpha)u = w$$

genau eine Lösung $u \in \mathcal{S}^*$ und diese ist gegeben durch

$$u = F^{-1} \left(\frac{1}{1 + |\cdot|^2} Fw \right).$$

Weiterhin definiert man Translationen und Reflexion auf \mathcal{S}^* wie folgt: Zu $u \in \mathcal{S}^*$ und $x \in \mathbb{R}^N$ ist das Element $T_x u \in \mathcal{S}^*$ via

$$(T_x u | f) := (u | f(\cdot + x))$$

definiert. Für $u \in \mathcal{S}^*$ wird $\tilde{u} \in \mathcal{S}^*$ durch

$$(\tilde{u} | f) := \overline{(u | \tilde{f})}$$

definiert. (Es ist dann \tilde{u} in der Tat ein lineares Funktional auf \mathcal{S} .) Diese Definition ist mit der entsprechenden Definition auf \mathcal{S} verträglich. Genauer gilt

$$j_{\tilde{f}} = \tilde{j}_f.$$

(Bew. Direkte Rechnung.)

Wir werden nun die Faltung auf den Raum \mathcal{S}^* uebertragen. Dazu definiert man zu $u \in \mathcal{S}$ und $f \in \mathcal{S}$ die Funktion $u * f$ auf \mathbb{R}^N durch noch

$$(u * f)(x) := (u | f(x - \cdot)).$$

Diese Definition ist wieder mit der entsprechenden Definition auf \mathcal{S} verträglich d.h. es gilt

$$(j_f * g)(x) = f * g(x).$$

An dieser Stelle entsteht aber ein *Problem*: Es ist nicht klar, ob

- $u * f$ stetig ist,
- $u * f$ zu \mathcal{S}^* gehoert,
- $\partial^\alpha (u * f) = (\partial^\alpha u) * f = u * \partial^\alpha f$ gilt, (falls $u * f$ zu \mathcal{S}^* gehoert).

Es zeigt sich nach harter Arbeit (vgl. Vorlesung Distributionentheorie!), dass es einen Unterraum \mathcal{S}' von \mathcal{S}^* gibt, der \mathcal{S} und alle δ_x , $x \in \mathbb{R}^N$, und viele weitere Elemente enthaelt, invariant unter Bilden von Ableitungen, Multiplikation mit (inversen) Polynomen und (inverser) Fouriertransformation ist und fuer dessen Elemente u die Faltung $u * f$ sogar zu C^∞ gehoert und

$$\partial^\alpha (u * f) = (\partial^\alpha u) * f = u * \partial^\alpha f$$

erfuellt.

← Ende der Vorlesung →

Damit erhaelt man eine sehr wichtigen Methode zum Loesen von partiellen DGL: Dazu berechnet man zunaechst $u \in \mathcal{S}^*$ mit

$$(-\Delta + \alpha)u = \delta_0.$$

Es gilt (s.o.)

$$u = F^{-1} \left(\frac{1}{1 + |\cdot|^2} F\delta_0 \right).$$

Dieses u heisst *Fundamentallösung*. Dieses u gehoert dann zu \mathcal{S}' (da \mathcal{S}' entsprechende Invariantzeigenschaften hat und δ_0 zu \mathcal{S}' gehoert.) Für geeignete (!) $\varrho \in \mathcal{S}'$ laesst sich weiterhin zeigen, dass $u * \varrho$ existiert und

$$(-\Delta + \alpha)(u * \varrho) = ((-\Delta + \alpha)u) * \varrho = \delta_0 * \varrho = \varrho$$

gilt. In dieser Weise kann man (wie auf \mathcal{S} s.o.) aus der Fundamentallösung, die Lösungen zu anderen rechten Seiten gewinnen (und daher stammt auch die Bezeichnung Fundamentallösung).

Bemerkung. Ist $P(x_1, \dots, x_N) = \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha x^\alpha$ ein beliebiges Polynom vom Grad höchstens K in N - Variablen, so definiert man den Operator $P(D)$ auf \mathcal{S} durch

$$P(D)f := \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha D^\alpha f$$

und entsprechend auf \mathcal{S}^* . Dann gilt nach dem bisher gezeigten

$$FP(D)u = PFu$$

für alle $u \in \mathcal{S}^*$. Entsprechend lässt sich ein Grossteil der obigen Überlegungen verallgemeinern.

2. Die Fouriertransformation auf \mathbb{T}^N

In diesem Abschnitt studieren wir Entwicklung von periodischen Funktionen auf \mathbb{R}^N in der Form

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{ikx}.$$

Eine solche Entwicklung ist formal ganz ähnlich zu der von uns im letzten Abschnitt bewiesenen Entwicklung

$$f(x) = F^{-1}(Ff)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} Ff(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} F(f)(y) e^{iyx} dy$$

für $f \in \mathcal{S}$.

Wir beginnen mit Untersuchung von periodischen Funktionen auf \mathbb{R} . In diesem Fall ist neben der oben angegebenen Darstellung auch eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikx}$$

von Interesse.

DEFINITION. Eine Funktion auf f auf \mathbb{R} heißt (2π) -periodisch, wenn gilt

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung.

- Natürlich sind auch andere Perioden als 2π möglich. Durch Skalieren lässt sich aber der allgemeine Fall auf diesen Fall zurückführen.
- Offenbar ist eine Funktion genau dann (2π) -periodisch, wenn gilt

$$f(x + 2\pi l) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $l \in \mathbb{Z}$.

- Man definiert

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} := \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$$

mit der kanonischen Projektion

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z} =: [x].$$

Dann ist eine Funktion auf \mathbb{R} also genau dann 2π periodisch, wenn es ein g auf \mathbb{T} gibt mit

$$f = g \circ p.$$

Offenbar ist $[0, 2\pi)$ ein Repräsentantensystem von \mathbb{T} in \mathbb{R} , d.h. jedes $z \in \mathbb{T}$ kann eindeutig als $p(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)$ geschrieben werden. Zeichnung $\mathbb{T} = \text{Kreislinie}$)

(Erinnerung: $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, $\cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$, $\sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$.)

Als naechstes untersuchen wir das (zweit)einfachste Beispiel periodischer Funktionen.

Beispiel - Trigonometrische Polynome:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + b_k \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n ((a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx}) \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

sowie

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k > 0$$

und

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = ic_k - ic_{-k}$$

Beh: Die Koeffizienten sind durch das trigonometrische Polynom eindeutig bestimmt, durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} p(x) dx,$$

bzw.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Bew. Erste Darstellung: Es gilt offenbar

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ilx} e^{-ikx} dx = \delta_{k,l}.$$

Damit folgt die zweite Darstellung einfach durch Einsetzen von

$$p(x) = \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx}.$$

Zweite Darstellung: Das kann man durch direkte Rechnung zeigen (Uebung) oder auch direkt aus der ersten Darstellung und den oben hergeleiteten Formeln fuer a_k und b_k (als Funktion der c_l) ablesen.

Bemerkung. Voellig analoge Aussagen gelten fuer

← Ende der Vorlesung →

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmaessig konvergieren.

Im folgenden geht es nun darum, 'jede' periodische Funktion als 'Grenzwert' von trigonometrischen Funktionen zu schreiben. Dabei beschraenken wir uns auf Darstellungen mittels der e^{ik} . (Diese koennen dann leicht umgerechnet werden).

Notation. Fuer $k \in \mathbb{Z}$ definiert man die Funktion e_k durch

$$e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{ikx}.$$

Die Menge der 2π periodischen Funktionen auf \mathbb{R} , die ueber das Interval $[0, 2\pi]$ Riemann integrierbar sind, werde mit \mathcal{R} bezeichnet. Fuer $f, g \in \mathcal{R}$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx, \quad \|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Gilt $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, so sagt man, dass die f_n gegen f im *Quadratmittel konvergieren*.

Bemerkung. Offenbar impliziert gleichmaessige Konvergenz die Konvergenz im Quadratmittel. Die Umkehrung gilt nicht, wie einfache Beispiele zeigen. (Zeichnung $f = 0$ auf $[0, 2\pi - 1/n]$ und dann linear bis 1..)

Die entscheidenden strukturellen Grundlagen fuer die Theorie bilden die folgenden beiden Propositionen.

PROPOSITION. *Es ist \mathcal{R} ein Vektorraum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Semiskalarprodukt auf \mathcal{R} d.h.*

- $\langle f, g + h \rangle = \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$
- $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
- $\langle f, f \rangle \geq 0$.

Es gilt

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \quad (\text{Cauchy-Schwarz-Bunyakowski Ungleichung})$$

und insbesondere

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

Beweis. Erste Eigenschaften : klar.

Cauchy-Schwarz Ungleichung: Das wird im naechsten Kapitel in groesserer Allgemeinheit bewiesen. Darum geben wir hier keinen Beweis.

(Ein Beweis koennte wie folgt gegeben werden: $\langle f, g \rangle \geq 0$ (sonst Multiplizieren mit $e^{i\alpha}$). Ohne Einschraenkung $\langle f, g \rangle > 0$ (sonst ist die Aussage sowieso klar). Sei

$$F(t) := \langle f + tg, f + tg \rangle = \|f\|^2 + t\langle f, g \rangle + t\langle g, f \rangle + t^2\|g\|^2 = \|f\|^2 + 2t\langle f, g \rangle + t^2\|g\|^2.$$

Wegen $F \geq 0$ und $\langle f, g \rangle \neq 0$ folgt $\|g\| > 0$. Dann ist auch

$$\frac{1}{\|g\|^2} F = \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} + 2t \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2} + t^2 = \left(t + \frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2}\right)^2 + \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} - \left(\frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2}\right)^2$$

ein nichtnegatives Polynom. Damit folgt

$$\frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} - \left(\frac{\langle f, g \rangle}{\|g\|^2}\right)^2 \geq 0.$$

Das liefert die Aussage.

Halbnorm:

$$\|f+g\|^2 = \langle f+g, f+g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \langle g, g \rangle \leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

Das beendet den Beweis.) \square

PROPOSITION. Die e_k , $k \in \mathbb{Z}$, bilden eine Orthonormalsystem in \mathcal{R} d.h. es gilt

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} dx = \delta_{k,l}.$$

Beweis. Das ist einfach. \square

Fuer $f \in \mathcal{R}$ definiert man die *Fourierkoeffizienten* von f durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \langle e_k, f \rangle$$

fuer $k \in \mathbb{Z}$. Man definiert weiterhin

$$s_n := s_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k.$$

Der Ausdruck

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

heisst dann die *Fourierreihe von f* . Wie bei Potenzreihen hat dieser Ausdruck erst einmal KEINEN Sinn. Insbesondere ist erstmal NICHT klar, in welchem Sinne dieser Ausdruck eine Funktion darstellt.

LEMMA. (*Besselsche Ungleichung*) Sei $f \in \mathcal{R}$ und $c_k = c_k(f)$ und s_n wie eben definiert. Dann gilt

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2.$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}),$$

also auch $c_k \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$.

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich auf folgender Rechnung (s.u. fuer eine allgemeinere Diskussion):

$$\begin{aligned}
\|f - s_n\|^2 &= \left\| f - \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\|^2 \\
&= \left\langle f - \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k, f - \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\rangle \\
&= \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k, \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\rangle \\
(\text{Orth.}) &= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n c_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k - |c_k|^2 \\
&= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n \|c_k\|^2.
\end{aligned}$$

Zum Insbesondere: Das folgt sofort aus dem ersten Teil, da $\|\cdot\| \geq 0$ gilt. \square

FOLGERUNG. Sei die Situation wie in der vorangegangenen Behauptung. Dann gilt

$$\|f\|^2 \geq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Beweis. Es gilt $c_0 = a_0/2$ sowie $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$ also $|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$. \square

Der entscheidende Satz zur Darstellung von Funktionen aus \mathcal{R} mittels Fourierreihe ist nun folgendes Theorem.

THEOREM. (Konvergenz im Quadratmittel und Parsevalsche Gleichung) Sei $f \in \mathcal{R}$. Dann gilt

$$\|f - s_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Insbesondere gilt also

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx. \quad (\text{Parsevalsche Gleichung})$$

Beweis. (Skizze) Nach der vorangegangenen Proposition reicht es die zweite Aussage zu zeigen. Fuer Treppenfunktionen kann die Aussage (mit gewisser Muehe) direkt gezeigt werden. Fuer allgemeine Funktionen folgt sie dann durch Approximation. \square

Bemerkung. Es gilt also

$$f = \sum c_k e_k$$

in dem Sinne, dass $\|f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k\| \rightarrow 0$ gilt (d.h. dass die s_n im Quadratmittel gegen f konvergieren).

Glattheit der Funktion verbessert die Summierbarkeitseigenschaften der Fourierkoeffizienten.

LEMMA. (Fourierkoeffizienten der Ableitung) Sei $f \in \mathcal{R}$ $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar und f^{n-1} sei stetig und stueckweise stetig differenzierbar (d.h.

es gibt $0 < t_1 < \dots < t_N = 2\pi$ mit $f^{(n-1)}|_{[t_j, t_{j+1}]}$ stetig diffbar) mit Fourierkoeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dann sind fuer $l = 1, \dots, n$ die Fourierkoeffizienten von $f^{(l)}$ gegeben durch $(ik)^l c_k$. Insbesondere gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2n} |c_k|^2 < \infty.$$

Beweis. Ohne Einschraenkung sei f n -mal stetig diffbar (sonst auf einzelnen Intervallen argumentieren). Dann ist fuer $l = 1, \dots, n$ also $f^{(l)}$ stetig und gehoert also ebenfalls zu \mathcal{R} . Fuer die Fourierkoeffizienten $c_k^{(l)}$ von $f^{(l)}$ erhaelt man durch partielle Integration (wobei die Randterme aufgrund der Periodizitaet wegfallen):

$$\begin{aligned} c_k^{(l)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f^{(l)}(x) dx \\ \text{(partielle Integration)} &= (ik)^l \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= (ik)^l c_k. \end{aligned}$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt dann fuer $l = n$ die zweite Aussage. \square

Bemerkung. Es ist ein allgemeines Phaenomen, dass die Fouriertransformation 'Glattheit' in 'Fallen' und umgekehrt ueberfuehrt. Das ist auch der Grund, dass \mathcal{S} in \mathcal{S} ueberfuehrt wird (dabei bewirkt, dass Fallen der Funktionen aus \mathcal{S} die Glattheit ihrer Fouriertransformation und die Glattheit der Funktionen, dass Fallen ihrer Fouriertransformation.

Fuer 'glatte' Funktionen koennen wir damit nun gleichmaessige Konvergenz der Fourierreihe erhalten.

THEOREM. Ist $f \in \mathcal{R}$ stetig und stueckweise stetig diffbar, so konvergieren die s_n gleichmaessig (und insbesondere punktweise) gegen f .

Beweis. Aufgrund des vorigen Lemma (mit $n = 1$) gilt fuer die Fourierkoeffizienten c_k von f

$$\sum |k|^2 |c_k|^2 < \infty.$$

Damit folgt wegen

$$|c_k| = |c_k k| \frac{1}{|k|} \leq \frac{1}{2} (|k c_k|^2 + \frac{1}{|k|^2})$$

also

$$\sum |c_k| = \sum |c_k k| \frac{1}{|k|} \leq \sum |k c_k|^2 + \sum \frac{1}{|k|^2} < \infty.$$

Damit konvergiert also

$$s_n = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$$

gleichmaessig gegen eine stetige Funktion g . Damit konvergiert also s_n auch im Quadratmittel gegen g . Damit folgt

$$\|g - f\| \leq \|g - s_n\| + \|s_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

also

$$0 = \|g - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Da f und g stetig sind, folgt $f = g$. \square

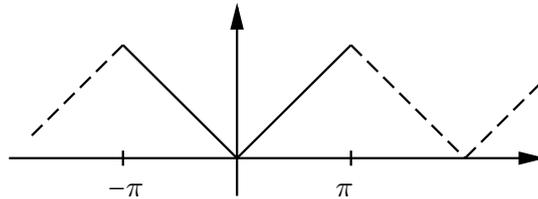
Bemerkung. Ist f 'nur' stetig, so konvergiert die Fourierreihe im allgemeinen nicht fuer alle Punkte, aber in den meisten. (Viel untersucht...)

Beispiel. Sei f periodisch mit $f(x) = |x|$ fuer $|x| \leq \pi$. (Zeichnung) Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmaessig und ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$



Bew. Gleichmaessige Konvergenz folgt aus vorigem Satz.

Da f gerade ist, kann man f durch eine reine Cosinusreihe darstellen. Es gilt also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

und

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2 \pi} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage ueber die Fourierkoeffizienten.

Das 'Inbesondere' folgt durch Einsetzen von $x = 0$, da $f(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

Die obigen Betrachtungen lassen sich direkt auf den hoeherdimensionalen Fall verallgemeinern. Das diskutieren wir nun kurz und lassen die Details als Uebung.

Eine Funktion f auf \mathbb{R}^N heisst periodisch, wenn gilt

$$f(x) = f(x + 2\pi l)$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$ und $l \in \mathbb{Z}^N$. Man definiert

$$\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N := \{x + 2\pi\mathbb{Z}^N : x \in \mathbb{R}^N\}$$

mit der kanonischen Projektion

$$p: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{T}^N, x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z}^N =: [x].$$

Dann ist eine Funktion auf \mathbb{R}^n also genau dann periodisch, wenn es ein g auf \mathbb{T}^N gibt mit

$$f = g \circ p.$$

Offenbar ist $I = I_N := [0, 2\pi)^N$ ein Representantensystem von \mathbb{T}^N in \mathbb{R}^N , d.h. jedes $z \in \mathbb{T}^N$ kann eindeutig als $p(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)^N$ geschrieben werden.

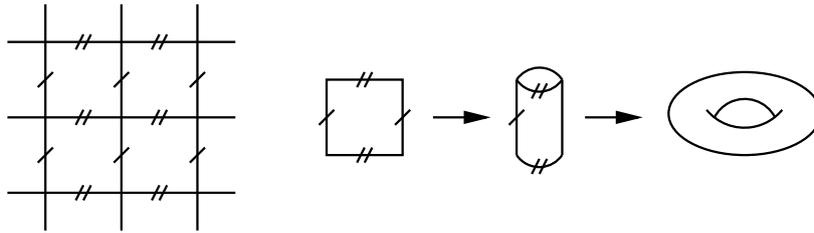


ABBILDUNG 1. \mathbb{T}^2 : durch Verbinden der / und der // erhält man einen Torus

Sei $\mathcal{R} = \mathcal{R}_N$ die Menge der periodischen Funktionen, deren Einschränkung auf jeden Wuerfel Riemann intbar ist. Dann definiert man fuer $f, g \in \mathcal{R}$

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_I \overline{f(x)} g(x) dx, \|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Die $e_k := e^{ik \cdot}$ bilden wieder ein Orthonormalsystem und man definiert die *Fourierkoeffizienten* von f durch

$$c_k := c_k(f) := \langle e_k, f \rangle$$

fuer $k \in \mathbb{Z}^N$ und die approximierenden Polynome durch

$$s_n := s_n(f) := \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}.$$

Damit koennen dann die analogen Aussagen zu den oben bewiesenen. Lediglich das Konzept der stueckweisen Differenzierbarkeit hat keinen guten Sinn mehr und wird durch Differenzierbarkeit ersetzt.

3. Die allgemeine Fouriertransformation

Wir untersuchen kurz, was die beiden von uns untersuchten Fouriertransformationen gemeinsam haben.

Sei $G = \mathbb{R}^N$ bzw. $G = \mathbb{T}^N$. Dann ist G eine abelsche Gruppe, jeder Punkt aus G hat eine kompakte Umgebung und Multiplikation und Inversenbildung sind stetig (klar, fuer \mathbb{R}^N . Fuer \mathbb{T}^N ...). Die duale Gruppe zu G ist definiert als

$$\widehat{G} := \{\gamma : G \longrightarrow \mathbb{T} \text{ stetig} : \gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s), \gamma(e) = 1\}.$$

Beispiel. $G = \mathbb{R}^N$: Jedes $k \in \mathbb{R}^N$ definiert durch e_k mit $e_k(x) = e^{ikx}$ ein Element aus \widehat{G} . Man kann zeigen, dass dies alle Elemente von \widehat{G} sind. (Uebung) In diesem Sinne gilt $\widehat{G} = \mathbb{R}^N$.

Beispiel. $G = \mathbb{T}^N$: Jedes $k \in (2\pi\mathbb{Z})^N$ definiert durch e_k mit $e_k(x) = e^{ikx}$ ein Element aus \widehat{G} . Man kann zeigen, dass dies alle Elemente von \widehat{G} sind. (Uebung) In diesem Sinne gilt $\widehat{G} = (2\pi\mathbb{Z})^N$.

Die Fouriertransformation fuer (geeignete) Funktionen f auf G ist dann definiert als die Funktion $F(f)$ auf \widehat{G} , die gegeben ist durch

$$F(f)(\gamma) := \int_G \overline{\gamma(t)} f(t) dt.$$

Die Parsevalsche Gleichung lautet dann

$$\int_G |f(t)|^2 dt = \int_{\widehat{G}} |F(f)(\gamma)|^2 d\gamma.$$

(Man mache sich klar, dass dies in der Tat fuer $G = \mathbb{R}^N$ und $G = \mathbb{T}^N$ zutrifft!).

Diese Aussage gelten tatsaechlich fuer alle lokalkompakten abelschen Gruppen.

Bemerkung. Die entsprechende Theorie läßt sich noch einmal drastisch erweitern. Das führt auf Gelfand's Theorie der kommutativen Banachalgebren.

Etwas Hilbertraumtheorie

In diesem Abschnitt studieren wir Vektorräume mit einem Skalarprodukt. Das Skalarprodukt erlaubt es Längen UND Winkel zu messen. Wir beginnen mit einer Untersuchung von (Semi)Skalarprodukten.

1. Vektorräume mit Semiskalarprodukt

DEFINITION. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Eine Abbildung $s : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt (semi) Skalarprodukt auf V , wenn gilt

- $s(x, \lambda y + \mu z) = \lambda s(x, y) + \mu s(x, z)$ ('s ist linear im zweiten Argument')
- $s(x, y) = \overline{s(y, x)}$
- $s(x, x) \geq 0$

für alle $x, y, z \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Gilt darüberhinaus noch $s(x, x) > 0$ für $x \neq 0$, so heißt s ein Skalarprodukt. Dann schreibt man meist $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Bemerkungen.

- Ist s ein Semiskalarprodukt, so gilt

$$s(\lambda x + \mu y, z) = \bar{\lambda} s(x, z) + \bar{\mu} s(y, z)$$

(d.h. s ist antilinear im ersten Argument.

- Ist s ein Semiskalarprodukt, so gilt

$$s(0, 0) = 0$$

(Denn $0 = 0x$ also $s(0, 0) = s(0, 0x) = 0s(0, x) = 0$.)

- Manche Autoren definieren (Semi)skalarprodukte linear im ersten Argument und antilinear im zweiten Argument. Das ändert strukturell nichts, führt aber zu (leichten) Veränderungen in manchen Formeln.

Beispiele.

- \mathbb{K}^N mit dem Euklidischen Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^N \bar{x}_j y_j.$$

- $C[0, 1]$ = stetige Funktionen auf $[0, 1]$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 \overline{f(t)} g(t) dt.$$

Beachte: $\langle f, f \rangle = 0$ ist nur für $f \equiv 0$ möglich, da f stetig ist.

- $\mathcal{R} :=$ Riemann integrierbare Funktionen auf $[0, 2\pi]$ mit

$$s(f, g) := \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt.$$

Beachte: Das ist kein Skalarprodukt. (Beispiel...)

- $\ell^2 := \{c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{k=1}^{\infty} |c(k)|^2 < \infty\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle c, d \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} \overline{c(k)}d(k).$$

Beachte: Es ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tatsächlich ein Skalarprodukt:

$$\text{Endlich: } |\overline{c(k)}d(k)| \leq \frac{1}{2}(|c(k)|^2 + |d(k)|^2).$$

Weitere Eigenschaften klar...

Wichtige Deutung. Ist $s(y, y) = 1$, so ist

$$z = x - s(y, x)y$$

senkrecht auf y d.h. es gilt $s(z, y) = 0$. Es gibt also $s(y, x)$ die Länge der Komponente von x in Richtung y an. (Zeichnung.) Bew: Nachrechnen:

$$s(z, y) = s(x - s(y, x)y, y) = s(x, y) - \overline{s(y, x)}s(y, y) = 0.$$

Für Semiskalarprodukte gelten zwei fundamentale Formeln: die Cauchy-Schwarz Ungleichung und die Parallelogrammidentität. Das untersuchen wir nun:

PROPOSITION. (*Cauchy-Schwarz-Bunyakowski Ungleichung*) Sei $s(\cdot, \cdot)$ eine Semiskalarprodukt auf V . Dann gilt

$$|s(x, y)| \leq s(x, x)^{1/2} s(y, y)^{1/2}.$$

für alle $x, y \in V$.

Beweis. Sei

$$F(t) := s(f + tg, f + tg) = \|f\|^2 + ts(f, g) + ts(g, f) + t^2\|g\|^2.$$

Nach Voraussetzung ist $F \geq 0$. Das ist nur möglich, wenn die gewünschte Ungleichung gilt. Hier sind die Details: Ohne Einschränkung $s(f, g) \geq 0$ (sonst Multiplizieren mit $e^{i\alpha}$). Ohne Einschränkung $s(f, g) > 0$ (sonst ist die Aussage sowieso klar). Damit gilt also

$$F(t) = \|f\|^2 + 2ts(f, g) + t^2\|g\|^2.$$

Wegen $F \geq 0$ und $s(f, g) \neq 0$ folgt $\|g\| > 0$. Dann ist auch

$$\frac{1}{\|g\|^2}F = \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} + 2t\frac{s(f, g)}{\|g\|^2} + t^2 = \left(t + \frac{s(f, g)}{\|g\|^2}\right)^2 + \frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} - \left(\frac{s(f, g)}{\|g\|^2}\right)^2$$

ein nichtnegatives Polynom. Damit folgt

$$\frac{\|f\|^2}{\|g\|^2} - \left(\frac{s(f, g)}{\|g\|^2}\right)^2 \geq 0.$$

Das liefert die Aussage. □

Bemerkung. Ist s ein Skalarprodukt und gilt $|s(x, y)| = s(x, x)^{1/2} s(y, y)^{1/2}$ fuer $x, y \in V$, so sind x und y linear abhaengig. (Uebung: O.E. $s(x, x) = s(y, y) = 1$. Betrachte $z = x - s(y, x)y$. Dann gilt

$$s(z, z) = s(x, x) - s(y, x)s(x, y) - \overline{s(y, x)}s(y, x) + |s(y, x)|^2 s(y, y) = 1 - 1 - 1 + 1 = 0.)$$

FOLGERUNG. Ist s ein Semiskalarprodukt auf V , so ist

$$\|x\| := s(x, x)^{1/2}$$

eine Halbnorm, d.h. es gilt

- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\|x\| \geq 0$,

fuer alle $x \in V$ und $\lambda \neq 0$. Ist s sogar ein Skalarprodukt, so ist $\|\cdot\|$ sogar eine Norm, d.h. es gilt zusaetzlich noch $\|x\| > 0$ fuer alle $x \neq 0$.

Beweis. Bis auf die erste Eigenschaft ist alles klar. Wir zeigen die erste Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= s(f + g, f + g) \\ &= s(f, f) + s(f, g) + s(g, f) + s(g, g) \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

Es ist moeglich, die Werte von s auszurechnen, wenn man nur die Werte $\|x\| := s(x, x)^{1/2}$ fuer $x \in V$ kennt. Das ist unter dem Namen Polarisierung bekannt.

PROPOSITION. (*Polarisierung*) Ist s ein Semiskalarprodukt auf V , so gilt mit $q(x) := s(x, x) = \|x\|^2$

$$s(x, y) = \frac{1}{4} (q(x + y) - q(x - y) + iq(x - iy) - iq(x + iy))$$

(falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und

$$s(x, y) = \frac{1}{4} (q(x + y) - q(x - y))$$

(falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

Beweis. Das folgt direkt durch Einsetzen. □

Wir kommen nun zur Parallelogrammidentitaet.

PROPOSITION. (*Parallelogrammidentitaet*) Sei s ein Semiskalarprodukt auf V und $q(x) = s(x, x)$. Dann gilt fuer alle $x, y \in V$

$$q(x + y) + q(x - y) = 2(q(x) + q(y)).$$

(*Zeichnung*)

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung. \square

Bemerkung. (Jordan/von Neumann) Eine (Halb)Norm auf einem Vektorraum wird genau dann durch ein (Semi)Skalarprodukt induziert, wenn die Parallelogrammidentität gilt. Die (Halb)Norm ist dann durch die Polarisierungsidentität gegeben. In diesem Sinne ist die Parallelogrammidentität die fundamentale Eigenschaft eines Raumes mit innerem Produkt.

Ein wesentliches Konzept in Räumen mit (Semi)skalarprodukt ist das der Orthogonalität.

DEFINITION. (Orthogonal) Sei V Vektorraum mit Semiskalarprodukt. Dann heißen $x, y \in V$ orthogonal $x \perp y$, wenn gilt

$$s(x, y) = 0.$$

Gilt $A \subset V$, so definiert man das orthogonale Komplement von A durch $A^\perp := \{u \in V : s(u, a) = 0 \text{ fuer alle } a \in A\}$.

Beispiele. V mit Skalarprodukt. Dann $V^\perp = \{0\}$, $\{0\}^\perp = V$.

←
Ende der Vorlesung

DEFINITION. Sei V ein Vektorraum mit Semiskalarprodukt s . Sei I eine Indexmenge und $e_j, j \in I$, Element von V . Dann heißen die e_j ein Orthonormalsystem (ONS), wenn gilt

$$s(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$$

fuer alle $i, j \in I$.

Wir sammeln einige wesentliche Eigenschaften orthogonaler Vektoren:

PROPOSITION. (Eigenschaften orthogonaler Vektoren) Sei V ein Vektorraum mit (Semi)Skalarprodukt s .

(a) (Pythagoras) Gilt $x \perp y$ so folgt

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

(b) Ist $e_j, j = 1, \dots, N$ ein endliches Orthonormalsystem so gilt fuer jedes $x \in V$

$$x - \sum_{j=1}^N s(e_j, x)e_j \perp e_j, \quad j = 1, \dots, N.$$

(c) (Besselsche Ungleichung) Ist $\{e_j : j \in I\}$ ein beliebiges Orthonormalsystem, so gilt fuer jedes $x \in V$

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j \in I} |s(e_j, x)|^2.$$

Bemerkung. Zur Definition der Summe in (c): Ist I eine Indexmenge und sind $c_j, j \in I$, nichtnegative Zahlen, so definiert man

$$\sum_{j \in I} c_j := \sup \left\{ \sum_{j \in A} c_j : A \subset I \text{ endlich} \right\}.$$

Aus

$$\sum_{j \in I} c_j < \infty$$

folgt dann, dass höchstens abzählbar viele der c_j nicht verschwinden. (Da fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$I_n := \{j \in I : c_j \geq 1/n\}$$

endlich sein muss und

$$\{j \in I : c_j \neq 0\} = \bigcup_n I_n$$

gilt.)

Beweis. (a) Direkte Rechnung:

$$\|x + y\|^2 = s(x + y, x + y) = s(x, x) + s(x, y) + s(y, x) + s(y, y) = \|y\|^2 + \|x\|^2.$$

(b) Direkte Rechnung (s.o. fuer den Fall eines Vektors e_1):

$$s(x - \sum_{k=1}^N s(e_k, x)e_k, e_j) = s(x, e_j) - \sum_{k=1}^N \overline{s(e_k, x)}s(e_k, e_j) = s(x, e_j) - s(x, e_j) = 0.$$

(c) Seien e_{j_1}, \dots, e_{j_N} ein beliebiges endliches Teilsystem von (e_j) . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| x - \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k} + \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k} \right\|^2 \\ &\stackrel{(a,b)}{=} \left\| x - \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k} \right\|^2 + \left\| \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k} \right\|^2 \\ &\geq \left\| \sum_{k=1}^N s(e_{j_k}, x)e_{j_k} \right\|^2 \\ (a) \quad &= \sum_{k=1}^N |s(e_{j_k}, x)|^2. \end{aligned}$$

Da die Aussage fuer beliebige endliche Teilsysteme gilt, folgt sie fuer die Ursprungsmenge. \square

Die vorangehende Proposition zeigt die Nuetzlichkeit eines Orthonormalsystems. Aus jedem abzählbaren System linear unabhängiger Vektoren kann man ein Orthonormalsystem gewinnen.

PROPOSITION. (*Gram/Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren*) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seien die Vektoren v_1, \dots, v_N (bzw. $v_j, j \in \mathbb{N}$) linear unabhängig. Dann bilden die induktiv definierten Vektoren

$$e_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1, \quad e_{k+1} := \frac{1}{\|v_{k+1} - \sum_{j=1}^k s(e_j, v_{k+1})e_j\|} (v_{k+1} - \sum_{j=1}^k s(e_j, v_{k+1})e_j)$$

ein Orthonormalsystem mit

$$\text{Lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$$

fuer alle k .

Beweis. Der Beweis wird durch Induktion nach k gefuehrt ueber die Aussage e_1, \dots, e_k sind Orthonormalsystem mit $\text{Lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \text{Lin}\{v_1, \dots, v_k\}$. $k = 1$: klar.

$k \implies (k + 1)$: Es ist $w_{k+1} := v_{k+1} - \sum_{j=1}^k s(e_j, v_{k+1})e_j$ senkrecht auf $e_l, l = 1, \dots, e_k$ (nach voriger Proposition) und verschwindet nicht (aufgrund der

linearen Unabhängigkeit der v_j und der Bedingung and die Huellen). Durch Normieren erhalten wir e_{k+1} und e_1, \dots, e_{k+1} bilden ein Orthonormalsystem. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \text{Lin}\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}\} &= \text{Lin}\{e_1, \dots, e_k, w_{k+1}\} \\ &= \text{Lin}\{e_1, \dots, e_k, v_{k+1}\} \\ &= \text{Lin}\{v_1, \dots, v_{k+1}\}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im zweiten Schritt die Definition der w' s genutzt und im letzten Schritt die Induktionsannahme fuer k . \square

Bemerkung. Auch wenn die (v_j) nicht linear unabhängig sind, kann man das Gram/Schmidtsche Verfahren in einer einfachen Modifikation anwenden. Dazu streicht man alle diejenigen N bei denen $w_N = 0$ gilt.

2. Hilbertraeume

Wir untersuchen Entwicklungen der Form

$$x = \sum c_k e_k$$

mit e_k Orthonormalsystem und $\sum |c_k|^2 < \infty$. Im Hilbertraum gilt:

- Jedes x aus dem Raum kann eindeutig so dargestellt werden mit $c_k = s(e_k, x)$.
- Jede solche Summe stellt ein x aus dem Raum dar.

Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ traegt die Norm (s.o.)

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow [0, \infty), \|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}.$$

Damit wird dann eine Metrik $d = d_{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ durch

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

auf V induziert. Wann immer im folgenden im Kontext eines Raumes mit Skalarprodukt von metrischen Eigenschaften (Konvergenz von Folgen, Cauchy-Folgen, Abgeschlossenheit, Stetigkeit....) die Rede ist, wird die eben definierte Metrik zugrunde gelegt.

PROPOSITION. *Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt mit induzierter Norm $\| \cdot \|$ und induzierter Metrik d . Dann sind $\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ stetig.*

Beweis. Das ist einfach:

Stetigkeit von $\| \cdot \|$: Es gelte $x_n \rightarrow x$. Zu zeigen $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.

Stetigkeit von $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

\square

DEFINITION. *Ein Vektorraum V mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Metrik d heisst Hilbertraum, wenn er bzgl. d vollstaendig ist (d.h. jede Cauchy Folge bzgl. d einen Grenzwert hat).*

THEOREM. (Approximationssatz) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Ist C eine abgeschlossene konvexe Teilmenge von V , so gibt es zu jedem $x \in V$ genau ein $y \in C$ mit

$$\|x - y\| = d(x, C) := \inf\{\|x - z\| : z \in C\}.$$

Damit existiert also die beste Approximation an x in C . (Zeichnung.)

Beweis. Bei dem Satz handelt es sich um eine fundamentale Eigenschaft eines Hilbertraum. Entsprechend spielen die fundamentalen Eigenschaften des Hilbertraum naemlich Vollstaendigkeit und Parallelogrammidentitaet eine Rolle:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Sei $d := d(x, C)$.

Eindeutigkeit. Seien y_1, y_2 solche Punkte. Anwenden der Parallelogrammidentitaet mit $x - y_1$ statt x und $x - y_2$ statt y liefert

$$\|2x - y_1 - y_2\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = 2\|x - y_1\|^2 + 2\|x - y_2\|^2.$$

Damit folgt

$$4\|x - \frac{1}{2}(y_1 + y_2)\|^2 + \|y_1 - y_2\|^2 = 4d^2.$$

Aufgrund der Konvexitat und der Definition von d laesst sich der linkeste Term durch $4d^2$ nach unten abschaetzen. Damit folgt

$$\|y_1 - y_2\|^2 = 0.$$

Existenz. Sei (y_n) eine Folge in C mit

$$\|x - y_n\|^2 \rightarrow d^2.$$

Einsetzen in die Parallelogrammidentitaet mit $x - y_n$ statt x und $x - y_m$ statt y liefert (wie im Eindeutigkeistteil)

$$4\|x - \frac{1}{2}(y_n - y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2.$$

Damit folgt (Details, Zeichnung Parallelogramm)

$$\|y_n - y_m\| \rightarrow 0.$$

Daher ist (y_n) eine Cauchy Folge. Aufgrund der Hilbertraumeigenschaft konvergiert dann (y_n) . Da A abgeschlossen ist, gehoert der Grenzwert y wieder zu A . Weiterhin gilt nach Definition

$$\|x - y\| = \lim \|x - y_n\| = d.$$

□

Bemerkung. (a) Sowohl die Voraussetzung der Konvexitat als auch der Abgeschlossenheit sind noetig. (Uebung): Ist die Menge konvex, aber nicht abgeschlossen, so muss es keine beste Approximation geben (sie koenne ja gerade fehlen). Ist die Menge abgeschlossen und nicht konvex, kann es z.b. mehrere beste Appoximationen geben (klar). Es kann dann auch keine beste Approximation geben: $x = e_1$. $A = \{(1 + \frac{1}{j})e_j : j > 1\}$. (Im endlichdimensionalen Hilbertraum gibt es natuerlich beste Approximationen fuer beliebige abgeschlossenen Mengen. Warum? Kompaktheit!)

(b) In Räumen, die keine Hilberträume sind, muss die Aussage nicht gelten. (Übung).

THEOREM. (Projektionssatz) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum. Dann lässt sich jedes $x \in V$ eindeutig schreiben als

$$x = y + z \quad \text{mit } y \in U \text{ und } z \in U^\perp$$

und es gilt

$$\|x - y\| = \min\{\|x - u\| : u \in U\}.$$

Beweis. Eindeutigkeit. Sei $x = y + z = y' + z'$ mit $y, y' \in U$ und $z, z' \in U^\perp$. Dann gilt

$$y - y' = z' - z \in U \cap U^\perp = \{0\}.$$

Damit folgt die Eindeutigkeit.

Existenz: Es ist U abgeschlossen und konvex. Daher existiert nach dem vorigen Satz ein (eindeutiges) $y \in U$ mit

$$\|x - y\| = d(x, U) = \inf\{\|x - z\| : z \in U\}.$$

Sei $z = x - y$. Dann gilt also

$$x = y + z$$

mit $y \in U$.

Noch zu zeigen $z \perp U$: Sei $u \in U$ beliebig. Dann hat die Funktion

$$F = F_u : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), F(t) = \|(x - y) + tu\|^2$$

ein Minimum bei $t = 0$ nach Konstruktion von $z = x - y$. Es gilt

$$F(t) = \|x - y\|^2 + t\langle x - y, u \rangle + t\langle u, (x - y) \rangle + t^2\|u\|^2,$$

also

$$F(t) = \|x - y\|^2 + 2t\Re\langle (x - y), u \rangle + t^2\|u\|^2.$$

Da F diffbar ist und ein Minimum in $t = 0$ hat folgt

$$0 = F'(0) = \Re\langle (x - y), u \rangle$$

für jedes beliebige $u \in U$. Damit folgt

$$0 = \Re\langle (x - y), \lambda u \rangle$$

für alle $u \in U$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Mit $\lambda = \overline{\langle (x - y), u \rangle}$ folgt

$$0 = |\langle (x - y), u \rangle|^2.$$

Das liefert die gewünschte Orthogonalität. □

← Ende der Vorlesung

Beispiel. Seien e_1, \dots, e_N ein (ONS) in einem Hilbertraum und $U := \text{Lin}\{e_1, \dots, e_N\}$. Dann gilt für $x \in V$ aber

$$x = y + z$$

mit $y = \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j \in U$ und $z = x - y \in U^\perp$. Damit handelt es sich um die in dem vorigen Theorem beschriebene eindeutige Darstellung von x . Insbesondere gilt also für jedes $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{K}$

$$\|x - \sum_{j=1}^N c_j e_j\|^2 \geq \|x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j\|^2.$$

(Es ist instruktiv auch direkt die beste Approximationseigenschaft nachzurechnen: Es gilt

$$\begin{aligned}
 \left\| x - \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 &= \left\| \left(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j \right) + \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j - \sum_{j=1}^N c_j e_j \right\|^2 \\
 &= \left\| \left(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j \right) + \sum_{j=1}^N (\langle e_j, x \rangle - c_j) e_j \right\|^2 \\
 (\text{Pythagoras}) &= \left\| \left(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j \right) \right\|^2 + \left\| \sum_{j=1}^N (\langle e_j, x \rangle - c_j) e_j \right\|^2 \\
 &\geq \left\| \left(x - \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j \right) \right\|^2.
 \end{aligned}$$

Es wird also die Differenz minimal fuer $c_j = \langle e_j, x \rangle$.

DEFINITION. Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraum H , so heisst die Abbildung

$$P_U : H \longrightarrow H, x \mapsto y$$

(mit $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$ die orthogonale Projektion auf U .)

Bemerkung. Es gilt fuer $P = P_U$ das folgendes:

- $I = P_U + P_{U^\perp}$. (Das folgt leicht aus dem weiter unten gezeigten $U^{\perp\perp} = U$).
- $P = P^2$. 'P ist idempotent' (Da $Px = Px + 0$ mit $Px \in U$ und $0 \in U^\perp$ und eine solche Zerlegung eindeutig ist.)
- $\langle Pw, v \rangle = \langle w, Pv \rangle$. fuer alle $v, w \in H$. 'P ist selbstadjungiert' (Denn $w = y + z, v = y' + z'$. Nun nachrechnen...)

Es laesst sich zeigen (Uebung), dass jede Abbildung, die selbstadjungiert und idempotent ist eine orthogonale Projektion ist (wobei der zugehoerige Unterraum gerade das Bild der Abbildung ist)

FOLGERUNG. (a) Ist U ein abgeschlossener Unterraum eines Hilbertraumes, so gilt $(U^\perp)^\perp = U$.

(b) Ist A eine beliebige Teilmenge eines Hilbertraumes, so gilt $\overline{\text{Lin}(A)} = A^{\perp\perp}$.

Beweis. (a) $U \subset U^{\perp\perp}$: Fuer $x \in U$ und $z \in U^\perp$ gilt nach Definiton von U^\perp

$$\langle x, z \rangle = 0.$$

Damit gilt $x \in U^{\perp\perp}$

$U^{\perp\perp} \subset U$: Sei $x \in U^{\perp\perp}$. Dann gilt nach dem vorigen Satz $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \in U^\perp$. Damit folgt

$$z = x - y \in U^\perp \cap U^{\perp\perp} = \{0\}.$$

Damit folgt $x = y \in U$.

(b) Mit $A^\perp = (\text{Lin}A)^\perp = (\overline{\text{Lin}A})^\perp$ folgt (b) sofort aus (a). \square

LEMMA. Sei A eine Teilmenge eines Hilbertraumes. Dann sind aequivalent:

- $\overline{\text{Lin}A} = V$
- $A^\perp = \{0\}$.

Beweis. Das folgt leicht aus $\overline{\text{Lin}(A)} = A^{\perp\perp}$. \square

Bemerkung. Eine Menge A wie im Lemma heisst *total* oder auch *Erzeugendensystem*.

Wir wenden uns nun Entwicklungen nach ONS zu.

THEOREM. (*Darstellung mit Koeffizienten*) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $\{e_j : j \in I\}$ ein ONS. Seien $c_j \in \mathbb{K}$ mit $\sum |c_j|^2 < \infty$ gegeben. Dann gibt es eine eindeutige $x \in V$ mit $x = \sum c_j e_j$ in folgendem Sinne: Fuer jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein endliches A existiert mit

$$\|x - \sum_{j \in B} c_j e_j\| < \varepsilon$$

fuer alle endlichen $B \supset A$. Weiterhin gilt

$$\|x\|^2 = \sum |c_j|^2.$$

Beweis. Die Eindeutigkeit eines solchen x ist klar. Wir zeigen nun Existenz und die behauptete Eigenschaft der Norm.

Es koennen nur abzaehlbar viele c_j nicht verschwinden. Daher koennen wir ohne Einschraenkung annehmen, dass die Indexmenge abzaehlbar ist. Wir zeigen zunaechst, dass

$$S_N := \sum_{j=1}^N c_j e_j$$

eine Cauchy Folge ist: Es gilt

$$\|S_N - S_M\|^2 = \sum_{j=N+1}^M |c_j|^2 \rightarrow 0, N, M \rightarrow \infty.$$

Da V als Hilbertraum vollstaendig ist, konvergiert (S_N) gegen ein $x \in V$. Aufgrund der Stetigkeit der Norm und des Satz des Pythagoras gilt weiterhin

$$\|x\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |c_j|^2.$$

Wegen $\sum |c_j|^2 < \infty$ existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches A mit

$$\sum_{j \notin A} |c_j|^2 < \varepsilon.$$

Damit gilt dann natuerlich

$$\sum_{j \notin B} |c_j|^2 < \varepsilon$$

fuer alle $B \supset A$. Damit gilt dann fuer solche B

$$\|x - \sum_{j \in B} c_j e_j\|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \|S_N - \sum_{j \in B} c_j e_j\|^2 \leq \sum_{j \notin A} |c_j|^2 < \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung. Der Satz liefert insbesondere, dass man die Reihe umsortieren kann. (Denn es kommt nur darauf an, die 'wesentlichen' c_j beruecksichtigt zu haben.)

LEMMA. (*Charakterisierung Basis*) $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und (e_j) ein ONS. Dann sind aequivalent:

- (i) $\{e_j : j \in I\}$ ist maximal (d.h. jedes ONB $\{e'_\alpha : \alpha \in A\}$, das (e_j) enthaelt stimmt mit diesem ueberein).
- (ii) Es gilt $\{e_j : j \in I\}^\perp = \{0\}$.
- (iii) Es gilt $\overline{\text{Lin}\{e_j\}} = V$.
- (iv) Fuer jedes $x \in V$ gilt $x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j$.
- (v) Fuer jedes $x \in V$ gilt $\|x\|^2 = \sum_j |\langle e_j, x \rangle|^2$. (Parsevalsche Gleichung)

Beweis.

(i) \implies (ii): Waere die Aussage $\{e_j\}^\perp = \{0\}$ falsch, so gaebe es ein $x \perp \{e_j\}$ mit $x \neq 0$ und das widerspraechte der Maximalitaet von (e_j) .

(ii) \iff (iii): Das wurde oben schon gezeigt.

(ii) / (iii) \implies (iv): Nach Besselscher Ungleichung gilt $\sum |\langle e_j, x \rangle|^2 < \infty$. Damit existiert nach dem Darstellungssatz $y = \sum \langle e_j, x \rangle e_j$. Es ist nach Konstruktion $x - y \in \{e_j\}^\perp$. Mit (ii) folgt dann $x - y = 0$ und damit

$$x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j.$$

(iv) \implies (v): Das folgt aus dem vorangehenden Darstellungssatz.

(v) \implies (iv): Nach dem Darstellungssatz und Besselscher Ungleichung existiert $y := \sum \langle e_j, x \rangle e_j$ und es gilt

$$\|y\|^2 = \sum_j |\langle e_j, y \rangle|^2.$$

Weiterhin gilt (nach der ueblichen Rechnung) auch $x - y \perp y$. Damit folgt aus (v) und dem Satz des Pythagoras also

$$\|y\|^2 = \sum_j |\langle e_j, x \rangle|^2 \stackrel{(v)}{=} \|x\|^2 = \|x - y\|^2 + \|y\|^2.$$

Also folgt $\|x - y\|^2 = 0$ und damit $x = y$.

(iv) \implies (i): Sei $x \perp e_j$ fuer alle $j \in I$. Nach (iv) kann man x darstellen als

$$x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j = \sum 0 e_j = 0.$$

Das liefert (i). □

DEFINITION. (*Basis*) Ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum heisst (*Orthormal*)basis (ONB), wenn es eine der Eigenschaften des vorangehenden Lemma erfuehlt.

Bemerkung. Die Eigenschaft eines Orthonormalsystem eine Basis zu sein, wird (in der Physik) auch als Vollstaendigkeitsrelation bezeichnet.

THEOREM. Jeder Hilbertraum besitzt eine Orthonormalbasis.

Beweis. Es geht darum ein maximales Orthonormalsystem zu finden. Die Idee ist es, dazu ein beliebiges (z.B. einelementiges) Orthonormalsystem so lange fortzusetzen, bis es maximal ist. Um das tatsaechlich durchzufuehren, benoetigt man das sogenannte Zornsche Lemma (Transfinite Induktion). Wir verzichten auf die Details. □

Bemerkung. Ein Hilbertraum heisst separabel, wenn er eine abzaehlbare Basis besitzt (aequivalent: ein abzaehlbares totale Menge).

← Ende der Vorlesung

Ist $e_j, j \in I$, eine Basis im Hilbertraum, so kann man also nach dem vorigen Lemma jedes x aus dem Hilbertraum darstellen als

$$x = \sum \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Dies Darstellung heisst *Entwicklung von x* nach der Basis $e_j, j \in I$. Die Zahlen $\langle e_j, x \rangle$ heissen *Koeffizienten* der Entwicklung. Man kann sie als Koordinaten deuten. Tatsaechlich handelt es sich, falls der Hilbertraum der Euklidische Raum \mathbb{K}^N ist und $e_j, j = 1, \dots, N$ die Standardorthonormalbasis, genau um die Koordinaten. Denn fuer jedes Element x gilt die Gleichung

$$x = \sum_{j=1}^N x_j e_j = \sum_{j=1}^N \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Man kann dann (nach Auswahl einer Basis) in jedem Hilbertraum (fast) genauso mit Koordinaten 'rechnen' wie im Euklidischen Raum und das ist einer der grossen Vorteile von Hilbertraeumen!

Wir werden das jetzt an zwei Beispielen sehen.

FOLGERUNG. Sei $e_j, j \in I$ eine Orthonormalbasis in einem Hilbertraum V . Dann gilt fuer x und y aus V

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j \in I} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, y \rangle.$$

Bemerkung. Das wird (in der Physik) oft als $I = \sum |e_j\rangle\langle e_j|$ geschrieben.

Beweis. Ohne Einschraenkung sei I abzaehlbar (s.o.). Damit folgt die Aussage einfach. \square

FOLGERUNG. Sei V Hilbertraum und U ein abgeschlossener Unterraum. Sei (e_j) eine Basis von U . Dann ist die orthogonale Projektion von V auf U gegeben durch

$$P_U x := \sum_j \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Beweis. Es gilt $x = y + z$ mit $y \in U$ und $z \perp U$. Wegen $y \in U$, der Konstruktion der (e_j) und wegen $z \perp U$ gilt

$$P_U x = y = \sum \langle e_j, y \rangle e_j = \sum \langle e_j, y + z \rangle e_j = \sum \langle e_j, x \rangle e_j.$$

Das liefert die Aussage. \square

Beispiel. ℓ^2 Es ist (der oben eingefuehrte Vektorraum mit Skalarprodukt) ℓ^2 ein Hilbertraum und die $e_j, j \in \mathbb{N}$ mit $e_j(k) = \delta_{j,k}$ bilden eine Orthonormalbasis.

Bew. Wir zeigen zunaechst die Vollstaendigkeit: Sei $(x^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge in ℓ^2 . Dann ist fuer jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $(x^{(n)}(j))_n$ eine Cauchy-Folge, denn es gilt (da $(x^{(n)})$ Cauchy-Folge ist)

$$|x^{(n)}(j) - x^{(m)}(j)| \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\| \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty.$$

Aufgrund der Vollstaendigkeit von \mathbb{K} existiert dann fuer jedex $j \in \mathbb{N}$ der Grenzwert

$$x(j) := \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)}(j).$$

Sei x die Funktion

$$x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}, j \mapsto x(j).$$

Es reicht, nun $x \in \ell^2$ und $x^{(n)} \rightarrow x$ zu zeigen. Sei also $\varepsilon > 0$ beliebig. Sei $n_\varepsilon > 0$ mit

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|^2 \leq \varepsilon$$

fuer $n, m \geq n_\varepsilon$ gewaehlt. Dann gilt fuer jedes $N \in \mathbb{N}$ also

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N |x(j) - x^{(n)}(j)|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N |x^{(k)}(j) - x^{(n)}(j)|^2 \\ &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - x^{(n)}\|^2 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt dann

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x(j) - x^{(n)}(j)|^2 \leq \varepsilon$$

fuer alle $n \geq n_\varepsilon$. Damit gehoert

$$x = (x - x^{(n)}) + x^{(n)}$$

also zu ℓ^2 und es gilt $x^{(n)} \rightarrow x$.

Wir zeigen nun, dass die $e_j, j \in \mathbb{N}$ eine ONB bilden: Es reicht zu zeigen, dass ein $x \in \ell^2$ mit $x \perp e_j$ fuer alle $j \in \mathbb{N}$ verschwinden muss. Das ist aber klar.

Beispiel: $L^2(\Omega)$: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen (z.B. $\Omega = \mathbb{R}^N$). Sei der Vektorraum

$C_c(\Omega) := \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : \varphi \text{ stetig mit kompaktem in } \Omega \text{ enthaltenem Traeger}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\Omega} \overline{\varphi(x)} \psi(x) dx$$

ausgestattet. Dann ist $L^2(\Omega)$ der kleinste Hilbertraum der $C_c(\Omega)$ enthaelt und dessen Fortsetzung das gegebene Skalarprodukt fortsetzt. Um das praезise zu machen und die Existenz zu zeigen, ist einiger Aufwand noetig. Darauf verzichten wir an dieser Stelle (siehe etwas Vorlesung 'Hoehere Analysis'). Wir halten jedoch fest:

- Die Elemente von $L^2(\Omega)$ sind (Klassen von) Funktionen.
- Es ist $C_c(\Omega)$ dichter Unterraum von $L^2(\Omega)$.

Damit kann man dann (oft) Untersuchungen von $L^2(\Omega)$ auf Untersuchungen von $C_c(\Omega)$ zurueckfuehren.

Wir betrachten einige Spezialfaelle.

Spezialfall: $N = 1, \Omega = (0, 2\pi)$. Harte Arbeit liefert, dass eine ONB von $L^2((0, 2\pi))$ gegeben ist durch

$$e_k := \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} e^{ikx}, k \in \mathbb{Z}$$

Jedes $f \in L^2(0, 2\pi)$ kann also eindeutig dargestellt werde in der Form

$$f = \sum_k \langle e_k, f \rangle e_k.$$

Das ist gerade die im letzten Kapitel untersuchte Fourierreihe von f .

Spezialfall: $\Omega = (0, 2\pi)^N =: I$. Harte Arbeit zeigt, dass eine ONB von $L^2(I)$ gegeben ist durch

$$e_k := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{ikx}, \quad k \in \mathbb{Z}^N.$$

Jedes $f \in L^2(0, 2\pi)$ kann also eindeutig dargestellt werden in der Form

$$f = \sum_k \langle e_k, f \rangle e_k.$$

Das ist gerade die im letzten Kapitel untersuchte Fourierreihe von f .

Spezialfall: $\Omega = \mathbb{R}^N$: Auch hier gibt es (natuerlich) ONB, aber keine so einfache. Die Fouriertransformation $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ laesst sich eindeutig zu einer Abbildung

$$F : L^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

fortsetzen mit

$$\langle Ff, Ff \rangle = \|Ff\|^2 = \int |Ff(k)|^2 dk = \int |f(x)|^2 dx = \langle f, f \rangle.$$

(Parsevalsche Gleichung). Entsprechendes gilt fuer die inverse Fouriertransformation. Damit gilt dann also nach Polarisation

$$\langle Ff, Fg \rangle = \langle f, g \rangle = \langle F^{-1}f, F^{-1}g \rangle.$$

Die Fouriertransformation ist unitaer!

← Ende der Vorlesung →

3. Kleiner Ausblick

Sei H ein Hilbertraum. Eine Abbildung $T : H \rightarrow H$ heisst linear, wenn gilt

$$T(x + \lambda y) = Tx + \lambda Ty.$$

Zu einer solchen Abbildung T definiert man die adjungierte Abbildung T^* mit

$$\langle x, Ty \rangle = \langle T^*x, y \rangle.$$

(Im Falle des \mathbb{K}^N mit dem Euklidischen Skalarprodukt handelt es sich gerade um das Bilden der adjungierten Matrix, d.h. der komplex konjugierten, transponierten Matrix.)

Prominente Klassen von Operatoren sind die folgenden:

Projektionen. Ein Operator $P : H \rightarrow H$ heisst Projektion, wenn gilt

$$P = P^* \text{ sowie } P = P^2.$$

Es laesst sich zeigen, dass jedes solche Operatore gerade die Projektion auf einen abgeschlossenen Unterraum ist (naemlich das Bild von P).

Selbstadjungierte Operatoren: (Vgl. symmetrische Matrizen) Ein Operator $T : H \rightarrow H$ heisst selbstadjungiert, wenn gilt $T = T^*$ also

$$\langle x, Ty \rangle = \langle Tx, y \rangle.$$

'Bsp.' Der Laplace Operator Δ ist selbstadjungiert. Allerdings muss man etwas vorsichtig sein, da er nicht auf dem ganzen Raum L^2 definiert ist.

Der Hauptsatz ueber symmetrische Matrizen laesst sich dann formulieren als: Jede symmetrische Matrix A kann geschrieben werden als

$$A = \sum \lambda_j P_j.$$

Dabei sind $\lambda_j \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte der Matrix, P_j die Projektionen auf die Eigenraeumen und es gilt

$$I = \sum P_j \text{ sowie } P_j P_k = P_k P_j = 0$$

fuer alle $j \neq k$ (d.h. Eigenraeume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal). Eine aehnliche (aber kompliziertere) Aussage gilt fuer alle selbstadjungierten Operatoren und ist unter dem Namen Spektralsatz bekannt.

Unitaere Abbildungen: (Vgl. unitaere bzw. orthogonale Matrizen) Ein Operator $U : H \rightarrow H$ heisst unitaer, wenn gilt $U^* = U^{-1}$. Das ist genau dann der Fall, wenn gilt

- U ist surjektiv.
- $\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle$ fuer alle $x, y \in H$.

'Bsp:' Ist A selbstadjungiert, so ist $U := e^{-iA}$ unitaer (vgl. Matrizen). Es gilt naemlich

$$U^* = e^{iA} \text{ sowie } UU^* = e^{-iA} e^{iA} = e^0 = 1 = e^{iA} e^{-iA} = U^*U.$$

Insbesondere gehoert zu jedem selbstadjungierten Operator A eine Familie

$$U : \mathbb{R} \rightarrow \text{Unitaere Operatoren, } t \mapsto e^{-itA}.$$

Es gilt:

- $U(0) = I$
- $U(t+s) = U(t)U(s)$, insbesondere $U(-s) = U(s)^{-1}$.

Aufgrund dieser Eigenschaften spricht man von einer unitaeren Gruppe. Es loest $\psi_t = U_t \varphi$ die Differentialgleichung

$$\partial_t \psi = -iA \psi_t \quad \psi_0 = \varphi.$$

Im Rahmen von endlichdimensionalen Hilbertraeumen (d.h. fuer Matrizen) ist dies aus der Algebra bekannt bzw. wurde im Rahmen der Diskussion von DGL bewiesen. In uendlichdimensionalen Hilbertraeumen bedarf es dazu eines groesseren Aufwandes. Damit befasst sich Operatortheorie.

Die Waermeleitungsgleichung

Die Waermeleitungsgleichung lautet

$$\partial_t \psi = \Delta \psi \text{ auf } \Omega.$$

Dabei geht es um folgendes Situation:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.
- $\psi : \Omega \times \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \psi(t, x) = \psi_t(x)$.
- $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t, \psi_t(x) \rightarrow \psi_0(x)$ fuer $t \rightarrow 0+$.

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung / Diffusion eines Stoffes (Tinte, Ozon, Waerme...) in einem homogenen Medium (Wasser, Luft, Welt...).

1. Herleitung der Waermeleitungsgleichung und formale Loesung

In diesem Abschnitt leiten wir die Gleichung her. Wir betrachten dabei $\psi = \psi(x, t)$ als Verteilung eines Stoffes, den wir kurz mit 'Waerme' bezeichnen. Es gilt

$$\text{Waermemenge in Volumen } V \text{ zur Zeit } t = \int_V \psi(x, t) dx.$$

Damit folgt

$$\text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \psi(x, t) dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) dx.$$

Diese Aenderung ist negativ, wenn die Stoffmenge in V geringer wird. Andererseits kann man die Aenderung der Waermemenge in V auch ueber den Zufluss nach V ausdruecken:

$$\begin{aligned} \text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t &= \text{Zufluss zu } V \\ (\mu \text{ aussere Normale}) &= - \int_{\partial V} \text{Fluss} \cdot \mu \, d\sigma \\ (\text{Fluss linear und entgegen dem Waermegefaelle}) &= \int_{\partial V} (b(x) \nabla \psi(x, t)) \cdot \mu \, d\sigma \\ (\text{Stokes}) &= \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))) dx. \end{aligned}$$

(Zu den Vorzeichen: Da wir die aussere Normale betrachten und es sich aber um den Zufluss handelt, steht in der zweiten Gleichung ein Minus. Der Fluss haengt linear vom Waermegefaelle ab, verlaeuft aber diesem Gefaelle entgegen - 'von warm nach kalt'. Daher tritt in der dritten Gleichung ein weiteres Minus auf.)

Gleichsetzen der beiden Ausdruecke fuer die Aenderung der Waermemenge liefert

$$\int_V \partial_t \psi(x, t) dx = \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))) dx.$$

Da V beliebig ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))).$$

Ist das Medium homogen so haengt b nicht von x ab. Ist es darueber hinaus noch isotrop, so ist b gerade die Identitaet. Damit wird die Gleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \psi.$$

Das ist gerade die oben betrachtete Gleichung.

Bemerkung. In 'schwacher' Form wird dies:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \psi \phi dx = - \int (b(x) \nabla \psi, \nabla \phi) dx$$

fuer 'alle' ϕ .

Formale Loesung. Rein formal handelt es sich bei der Waermeleitungsgleichung um eine gewoehnliche Differentialgleichung allerdings in einem unendlichdimensionalen Raum. Entsprechend ist eine formale Loesung gegeben durch

$$\psi_t = e^{t\Delta} \psi_0 = P_t \psi_0$$

mit dem Operator $P_t := e^{t\Delta}$. Dieser erfuehlt die Halbgruppeneigenschaft $P_{t+s} = P_t P_s$.

Diese Betrachtungen werden wir nun exakt machen.

2. Die Waermeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^N .

Die Gleichung lautet

$$\partial_t \psi = \Delta \psi \text{ auf } \mathbb{R}^N, \psi_0 = f.$$

Es geht also darum ein ψ zu finden, das folgende Eigenschaften hat:

- Es ist $\psi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, stetig diffbar nach t , 2 mal stetig diffbar nach x mit $\partial_t \psi = \Delta \psi$ auf \mathbb{R}^N , $\psi_0(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \psi_t(x) = f(x)$.

Jedes solche ψ wird Loesung des Anfangswertproblem $\partial_t \psi = \Delta \psi$ auf \mathbb{R}^N , $\psi_0 = f$ genannt.

Sei nun $f \in \mathcal{S}$. Wir suchen zunaechst ψ mit Werten in \mathcal{S} d.h. mit $\psi_t \in \mathcal{S}$ fuer jedes $t \in [0, \infty)$. Fouriertransformieren der Gleichung fuehrt auf

$$\partial_t \widehat{\psi}_t(k) = -|k|^2 \widehat{\psi}_t(k), \quad \widehat{\psi}_0 = \widehat{f}$$

fuer alle $k \in \mathbb{R}^N$. Bei festem k ist das gerade eine gewoehnliche Differentialgleichung (in t) mit Anfangsbedingung. Die Loesung lautet (fuer festes k):

$$\widehat{\psi}_t(k) = e^{-t|k|^2} \widehat{f}(k).$$

Ruecktransformieren liefert dann

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &= F^{-1} \widehat{\psi}_t \\ (t \text{ fest}) &= F^{-1} (e^{-t|\cdot|^2} F f) \\ (\text{Fouriertransform!}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1} (e^{-t|\cdot|^2}) * F^{-1} F f \\ &= p_t * f \end{aligned}$$

mit

$$p_t := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(e^{-t|k|^2}).$$

Wir werden nun p_t berechnen und anschliessend die obige Rechnung in ein Theorem verwandeln.

PROPOSITION. Sei $\varphi_t(k) := e^{-t|k|^2}$. Dann gilt

$$p_t(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(\varphi_t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Beweis. Sei $h(x) = e^{-|x|^2/2}$. Wie wir schon aus dem Kapitel zur Fouriertransformation wissen, gilt dann

$$Fh = h = F^{-1}h. \quad (*)$$

Ist h_a definiert durch $h_a(x) := h(ax)$, so gilt weiterhin

$$(F^{-1}h_a)(k) = a^{-N} (Fh) \left(\frac{1}{a}k \right). \quad (**)$$

(Das wurde ebenfalls schon im Kapitel zur Fouriertransformation bewiesen. Hier folgt noch einmal die Begründung:

$$\begin{aligned} F^{-1}h_a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{ikx} h_a(x) dx \\ &= \dots \int e^{ikx} h(ax) dx \\ (ax = y) &= \dots \int e^{ik \frac{1}{a}x} h(y) \frac{1}{a^N} dy \\ &= a^{-N} Fh \left(\frac{1}{a}k \right). \end{aligned}$$

Das beendet die Begründung.)

Nimmt man das Bisherige zusammen, so erhaelt man fuer

$$\varphi_t(x) = e^{-t|x|^2} = h((2t)^{1/2}x) = h_{\sqrt{2t}}(x)$$

also

$$\begin{aligned} (F^{-1}\varphi_t)(x) &= (F^{-1}h_{\sqrt{2t}})(x) \\ (**) &= \sqrt{2t}^{-N} (F^{-1}h) \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \\ (*) &= \sqrt{2t}^{-N} h \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \\ &= \frac{1}{(2t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(\varphi_t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Das beendet den Beweis. □

Damit koennen wir nun die Waermeleitungsgleichung loesen (indem wir die Rechnung zu Beginn des Abschnittes einfach rueckwaertslesen):

THEOREM. *Sei*

$$p : (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty), \quad p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Dann loest fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ die Funktion

$$\psi_t := p_t * f$$

die Gleichung $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t$ fuer $t > 0$ und es gilt

$$\psi_t(x) \rightarrow f(x), \quad t \rightarrow 0$$

fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Die Aussage ueber das Loesen der Gleichung folgt im wesentlichen durch 'Rueckwaertslesen' des obigen Arguments: Nach Definition von p und vorangegangener Proposition gilt, da die Fouriertransformation Produkte in Faltungen ueberfuehrt,

$$\psi_t = F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff). \quad (*)$$

Damit folgt also $\psi_t \in \mathcal{S}$ fuer alle $t > 0$ sowie $\widehat{\psi}_t = e^{-t|k|^2} Ff$. Das liefert (Rueckwaertslesen)

$$\begin{aligned} \Delta \psi_t &= F^{-1}(F \Delta F^{-1}) F \psi_t \\ (*), (FT) &= F^{-1}((- |k|^2) e^{-t|k|^2} Ff) \\ (\text{Direkte Rechnung}) &= F^{-1} \partial_t (e^{-t|k|^2} Ff) \\ &= \partial_t F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff) \\ (*) &= \partial_t \psi_t. \end{aligned}$$

← Ende der Vorlesung →

Es bleibt die Aussage bei $t = 0$ zu zeigen: Sei $x \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: $|\psi_t(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ fuer $t > 0$ genuegend klein.

Es gilt:

- $\int p_t(x) dx = 1$. (Denn: $\int p_t(x) dx = (2\pi)^{N/2} (F p_t)(0) = 1$).
- Fuer jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(0)} p_t(x) dx = 0.$$

(Denn: Kugelkoordinaten liefern fuer $0 < t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(0)} p_t(x) dx &\stackrel{\text{Kuko}}{=} \text{constante} \cdot \int_\delta^\infty r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr \\ \left(-\frac{r^2}{4t} \leq -\frac{r^2}{8t} - \frac{r^2}{8}\right) &\leq \text{constante} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{8t}} \int_\delta^\infty r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{8}} dr \\ &= \text{constante}^* e^{-\frac{\delta^2}{8t}} \\ &\rightarrow 0, \quad t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist gerade die gewuenschte Aussage.)

Damit koennen wir nun mit einem kleinen Trick wie folgt rechnen

$$\begin{aligned}\psi_t(x) - f(x) &= p_t * f(x) - f(x) \\ (\text{Trick!}) &= \int p_t(x-y)f(y)dy - \int p_t(x-y)f(x)dy \\ &= \int p_t(x-y)(f(y) - f(x))dy.\end{aligned}$$

Damit folgt fuer beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{aligned}|\psi_t(x) - f(x)| &\leq \int_{U_\delta(x)} p_t(x-y)|f(y) - f(x)|dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(x)} p_t(x-y)|f(y) - f(x)|dy \\ &\leq 1 \cdot \max\{|f(y) - f(x)| : y \in U_\delta(x)\} + 2 \cdot \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(x)} p_t(x-y)dy.\end{aligned}$$

Waehlt man nun zunaechst $\delta > 0$ so dass der erste Term aufgrund der Stetigkeit von f in x durch $\varepsilon/2$ abgeschaetzt werden kann, so folgt fuer genuegend kleine $t > 0$

$$|\psi_t(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Das Verfahren kann fuer wesentlich allgemeinere f durchgefuehrt werden. Es reicht zum Beispiel, wenn f zu $C_b(\mathbb{R}^N)$ gehoert. Der Grund ist, dass $p_t(x)$ selber die Gleichung

$$\partial_t p_t = \Delta p_t$$

erfuellt. (Nachrechnen! Uebung.) Tatsaechlich kann man noch allgemeinere f zulassen (die nicht einmal stetig sind) allerdings wird dann unter Umstaenden die Anfangsbedingung nicht mehr punktweise erfuehlt. Es wird die Loesung als Ueberlagerung von Loesungen geschrieben. Eine solche Ueberlagerung ist moeglich, da die Gleichung linear ist.

FOLGERUNG. Sei fuer $t \in [0, \infty)$ die Abbildung $P_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ definiert durch $P_t f = p_t * f = F^{-1} e^{-t|k|^2} F f$ fuer $t > 0$ und $P_0 f = f$. Dann loest $t \mapsto P_t f$ die Waermeleitungsgleichung, und es gilt $P_{t+s} = P_t P_s$. In diesem Sinne gilt $P_t = e^{t\Delta}$.

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $P_t f$ eine Loesung der Waermeleitungsgleichung. Es bleibt die Halbgruppeneigenschaft zu zeigen: Das folgt durch direkte Rechnung. Es gilt nach Definition

$$P_t = F^{-1} e^{-t|k|^2} F.$$

Damit folgt

$$P_{t+s} f = F^{-1} (e^{-(t+s)|k|^2} F f) = (F^{-1} e^{-t|k|^2} F) (F^{-1} e^{-s|k|^2} F) f = P_t P_s f.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Es gilt $-\Delta = F^{-1}|k|^2 F$ und $e^{t\Delta} = P_t = F^{-1} e^{-t|k|^2} F$. Analog kann man auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ nun beliebige Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Laplaceoperator Δ definieren durch

$$g(-\Delta) f := F^{-1} g(|k|^2) F f.$$

Das ist ein sehr wirkungsvolles Instrument der Operatortheorie.

Ein etwas alternativer Zugang zur Waermeleitungsgleichung (und ueberhaupt zu partiellen Differentialgleichungen) bilden Separationsansatze. Dabei versucht man die in Frage stehende Gleichung durch den Ansatz

$$\psi(t, x) = f(t)g(x)$$

zu loesen. Im konkreten Fall fuehrt dies auf:

$$f'(t)g(x) = f(t)\Delta g(x).$$

Division liefert (wenn die Terme nicht verschwinden)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t abhaengt und die rechte nur von x folgt

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \text{constant} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}.$$

Wir loesen nun die beiden Gleichungen

$$f' = Cf, \quad \Delta g = Cg$$

separat: Gilt $C \leq 0$ so sind offenbar Loesungen gegeben durch

$$f = Ae^{Ct}, \quad g = e^{ikx}$$

mit $-|k|^2 = C$. Insgesamt ergibt sich damit fuer jedes $k \in \mathbb{R}^N$ als eine Loesung der Gleichung die Funktion

$$\psi(t, x) = e^{-t|k|^2} e^{ikx}.$$

Durch Ueberlagerung der Loesungen zu verschiedenen k mit den 'Gewichten' $g(k)$ erhaelt man eine allgemeine Loesung der Form

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|k|^2} e^{ikx} g(k) dk.$$

Das entspricht der obigen Darstellung

$$P_t f(x) = F^{-1}(e^{-t|k|^2} \widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{ikx} e^{-t|k|^2} \widehat{f}(k) dk.$$

Die Fourierkoeffizienten $\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \widehat{f}(k)$ von f sind gerade die 'Gewichte' g der Loesungen $e^{ikx} e^{-t|k|^2}$.

3. Waermeleitungsgleichung auf einem Wu'rfel - periodische Randbedingungen

Es geht wieder um die Gleichung

$$\Delta \psi_t = \partial_t \psi_t$$

auf \mathbb{R}^N . Allerdings interessieren wir uns nun fuer Loesungen, die $2\pi\mathbb{Z}^N$ periodisch sind. Das bedeutet, dass ψ eigentlich auf dem Torus $\mathbb{R}^N/(2\pi\mathbb{Z}^N)$ definiert ist. Alternativ kann man sich auch vorstellen, dass ψ auf dem Wu'rfel $[0, 2\pi]^N$ gegeben ist und die periodischen Randbedingungen

$$\partial^\alpha \psi(\dots, 0, \dots) = \partial^\alpha \psi(\dots, 2\pi, \dots)$$

fuer alle Multiindices α und alle Positionen der 0 erfuellt. Daher spricht man in diesem Fall auch von periodischen Randbedingungen.

Um diesen Fall zu behandeln, koennen wir die Fouriertransformation auf dem Torus einsetzen. Das geschieht strukturell ganz analog zu den Betrachtungen im vorigen Abschnitt. Daher skizzieren wir das Vefahren nur. Wir beginnen wieder mit einer formalen Rechnung:

Seien f und ψ glatt und $2\pi\mathbb{Z}^N$ periodisch mit

$$\Delta\psi_t = \partial_t\psi_t, \quad \psi_0 = f.$$

Anwenden der Fouriertransformation auf dem Torus liefert (bei festem t) Koeffizienten $c_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^N$ mit

$$\psi_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(t) e^{ikx}.$$

Ist ψ genuegend glatt, so fallen die c_k schnell und sind differenzierbar und man erhalt aus der Gleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c'_k(t) e^{ikx} = \partial_t\psi_t = \Delta\psi_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(t) (-|k|^2) e^{ikx}$$

und aus der Anfangsbedingung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(0) e^{ikx} = \psi_0 = f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten kann man aus einem Vergleich dann

$$c'_k(t) = -|k|^2 c_k(t), \quad c_k(0) = \widehat{f}(k)$$

fuer jedes $k \in \mathbb{Z}^N$ schliessen. Bei dieser Gleichung handelt es sich (bei festem k) um eine gewoehnliche Differentialgleichung. Die Loesung ist (fuer jedes k) gegeben durch

$$c_k(t) = e^{-|k|^2 t} \widehat{f}(k).$$

Insgesamt ergibt sich damit also

$$\psi_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{-|k|^2 t} e^{ikx}.$$

Ist f genuegend glatt (z.B. f beliebig oft differenzierbar), so gilt

$$\widehat{f}(k) \rightarrow 0, \quad |k| \rightarrow \infty,$$

genuegend schnell (vgl. Abschnitt ueber die Fouriertransformation), um obige Betrachtung rueckwaerts lesen zu koennen und damit eine Loesung zu erhalten.

Bemerkung.

- Auch hier kann man alternativ einen Separationsansatz durchfuehren. Dieser fuehrt auf

$$\psi_k = e^{-|k|^2 t} e^{ikx}.$$

Der obige Ausdruck ist gerade eine Überlagerung dieser ψ_k .

- Durch Skalieren und Verschieben, laesst sich mit dieser Methode auch die Waermeleitungsgleichugn auf beliebigen Rechtecken im \mathbb{R}^N behandeln (wenn man periodische Randbedingungen fordert).

4. Wärmeleitungsgleichung auf einem Würfel - Dirichlet Randbedingungen

Es geht um die Gleichung $\Delta\psi_t = \partial_t\psi_t$ auf $J = [0, 2\pi]^N$ mit $\psi_t \equiv 0$ auf ∂J . In diesem Fall kann man als Ansatz ψ als Linearkombination von Produkten der Form

$$\sin(k_1x_1)\sin(k_2x_2)\dots\sin(k_Nx_N)$$

darstellen mit $k_j \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ $j = 1, \dots, N$ und zeitabhaengigen Koeffizienten. Wir verzichten auf weitere Details.

KAPITEL 9

Die Wellengleichung

Es geht um die Gleichung

$$\partial_t^2 U_t = c^2 \Delta U_t$$

mit $c > 0$ und $U : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, (x, t) \mapsto U_t(x)$. Um die Gleichung eindeutig lösen zu können, brauchen wir noch Anfangsbedingungen

$$U_0(\cdot) = f, \quad (\partial_t U)_{t=0} = g.$$

Die Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen mit Geschwindigkeit c .

Wieder kann man versuchen, die Gleichung mittels Fouriertransformation auf \mathbb{R}^N lösen. Die Fouriertransformation (in x) führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\widehat{U}_t''(k) = -c^2 |k|^2 \widehat{U}_t(k),$$

mit \widehat{U}_t = Fouriertransformation in x von U_t . Für festes k hat die allgemeine Lösung dieser Gleichung die Form

$$A_k e^{i\omega t} + B_k e^{-i\omega t},$$

mit $\omega = \omega(k) = c(k) = c|k|$. Durch Rücktransformieren ergibt sich als Lösung

$$U(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} A_k e^{i\omega(k)t} e^{ikx} + B_k e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} dk.$$

Für genügend glatte und schnell fallende A und B ist das tatsächlich eine Lösung (wie 'Rückwärtslesen' der obigen Schritte zeigt). Die A_k, B_k werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Wir werden nun diese Lösung etwas analysieren und damit noch ein anderes Verfahren zur Lösung der Wellengleichung kennenlernen. Die oben gegebene Lösung ist also eine Überlagerung von Funktionen

$$e(kx \pm \omega t),$$

mit $e(s) = e^{is}$. Für $N = 1$ gilt

$$kx \pm \omega t = \text{konstant} \Rightarrow x = \pm \frac{\omega}{k} t = \pm ct.$$

Damit handelt es sich bei $e(kx \pm \omega t)$ also um die Bewegung des 'Welleberges' e mit Geschwindigkeit $c = \omega/k$.

Diese Betrachtungen legen nahe, dass für 'jede' Funktion F auf \mathbb{R} die Funktion $U(x, t) := F(kx \pm \omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist (da sie die

Bewegung des Wellenberges F mit Geschwindigkeit c beschreibt). Rein formal ist das natürlich richtig, denn Ableiten ergibt, falls F zweimal stetig differenzierbar ist,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 U(x, t) &= \omega^2 F''(kx \pm \omega t) \\ c^2 \Delta U(x, t) &= k^2 c^2 F''(kx \pm \omega t).\end{aligned}$$

Auch fuer allgemeinere F sollte das gelten (da dann immer noch die Gleichheit der Ausdruecke gelten sollte - auch wenn sie keinen Sinn mehr haben ;-). Eine praezise Fassung liefert das Konzept der schwachen Loesung.

PROPOSITION. Ist $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion $U : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$U(x, t) = F(kx \pm \omega t),$$

mit $\omega = c|k|$ eine schwache Loesung der Wellengleichung, d.h. es gilt

$$\iint U(x, t) \partial_t^2 \varphi(x, t) \, dx \, dt = \iint U(x, t) c^2 \Delta \varphi(x, t) \, dx \, dt$$

fuer alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Sei (F_n) eine Folge beliebig oft differenzierbarer Funktionen, die lokal gleichmaessig gegen F konvergieren, d.h. dass fuer jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{x \in K} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

(Eine solche Folge kann aus F durch Falten mit glatten δ_n mit $\int \delta_n = 1$ und $\delta_n \equiv 0$ ausserhalb von $(-1/n, 1/n)$ gewonnen werden (vgl. Uebung und vorhergehende Vorlesungen). Sei $U_n(x, t) := F_n(kx \pm \omega t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\iint U(x, t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt &= \iint F(kx \pm \omega t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint F_n(kx \pm \omega t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint U_n(x, t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt \\ \text{(Partielle Integration)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \partial_t^2 U_n(x, t) \varphi \, dx \, dt \\ (\partial_t^2 U_n(\dots) = c^2 \Delta U_n(\dots)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint c^2 \Delta U_n(x, t) \varphi \, dx \, dt \\ \text{(Partielle Integration)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint c^2 U_n(x, t) \Delta \varphi \, dx \, dt \\ (U_n \rightarrow U) &= \iint c^2 U(x, t) \Delta \varphi \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Bemerkungen.

- Fuer genuegend glatte F ist das zugehoerige U genau dann eine schwache Loesung, wenn es eine Loesung ist (nach dem ueblichen Schluss). In diesem Sinne verallgemeinert das Konzept der schwachen Loesung das Konzept der Loesung.
- Die Betrachtungen zu schwachen Loesungen setzen die entsprechenden Betrachtungen zu \mathcal{S}^* fort. (Distributionentheorie)

- Auch fuer die Waermeleitungsgleichung koennte man das Konzept der schwachen Loesung einfuehren. Die Gleichung ist aber 'glaetend' d.h. die Loesungen auch zur sehr irregulaeren Anfangsbedingungen werden glatt sein und daher sind dann schwache Loesungen (meist) auch Loesungen.

Die Laplacegleichung

Es geht um die Gleichungen

$$\Delta U = 0$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Oft wird noch eine Randbedingung der Form

$$U = g \text{ auf } \partial\Omega$$

gefordert (etwa um Eindeutigkeit der Loesung zu erzielen). Gilt $g = 0$ d.h.

$$U \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

so nennt man die Bedingung "Dirichlet Randbedingung".

Diese Gleichung tritt in verschiedenen Zusammenhaengen auf. Unter anderem dient sie der Beschreibung von Gleichgewichtssituationen eines Diffusionsvorganges. Der Vorgang selber wird (wie schon besprochen) durch die Waermeleitungsgleichung $\Delta U_t = \partial_t U_t$ beschrieben und die Gleichgewichtsbedingung bedeutet gerade, dass U nicht von der Zeit abhaengt. Damit ergibt sich dann fuer U insgesamt die Laplacegleichung

$$\Delta U = 0 (= \partial_t U).$$

Das kann man natuerlich auch direkt herleiten analog zur Herleitung der Waermeleitungsgleichung. Da das instruktiv ist, diskutieren wir das kurz: Sei dazu F der Fluss der entsprechenden Groesse, und es gelte

$$F = -B\nabla U$$

fuer eine Funktion B die Werte in den positiv definiten Matrizen annimmt. Aufgrund der Gleichgewichtsbedingung muss der Nettofluss fuer jede Teilmenge V von Ω Null sein. Damit erhaelt man also fuer jedes $V \subset \Omega$

$$\begin{aligned} (\text{Nettofluss} = 0) \quad 0 &= \int_{\partial V} F \cdot \nu \, d\sigma \\ (\text{Stokes}) &= \int_V \nabla \cdot F \, dx \\ (F = -B\nabla U) &= - \int_V \nabla \cdot (B \cdot \nabla U) \, dx. \end{aligned}$$

Da V eine beliebige Teilmenge von Ω war, folgt sofort

$$\nabla \cdot B\nabla U = 0.$$

In einer homogenen und isotropen Situation muss $B = I$ gelten und man erhaelt $\Delta U = 0$.

DEFINITION. (*harmonische Funktion*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine Funktion U auf Ω heisst harmonisch, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und

$$\Delta U = 0$$

auf Ω gilt.

Bemerkungen / Beispiele.

- Auf \mathbb{R} sind die harmonischen Funktionen gerade die linearen Funktionen.
- Auf $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ (bzw. offenen Teilmengen von \mathbb{R}^2) sind Realteil und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch. Denn es gilt fuer ein holomorphes $f = u + iv$ mit Realteil u und Imaginärteil v aufgrund der Cauchy-Riemann- Differentialgleichungen

$$\partial_x u = \partial_y v \quad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Damit ergibt sich

$$\Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = \partial_x \partial_y v - \partial_y \partial_x v = 0$$

sowie

$$\Delta v = \partial_x^2 v + \partial_y^2 v = -\partial_x \partial_y u + \partial_y \partial_x v = 0.$$

(Erinnerung: Eine Funktion auf \mathbb{C} ist holomorph, wenn die komplexe Ableitung existiert. Das ist äquivalent dazu, dass die Funktion in einer Potenzreihe entwickelt werden kann. Insbesondere sind Exponentialfunktion, Sinus, Cosinus ... holomorph.)

Eine wesentliche Charakterisierung von harmonischen Funktionen lernen wir im folgenden Theorem kennen.

THEOREM. (*Charakterisierung harmonischer Funktionen mittels Mittelwertigenschaften*) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $U \in C(\Omega)$ gegeben. Dann sind äquivalent:

- U ist zweimal stetig differenzierbar und harmonisch.
- U hat die Mittelwertigkeit bezüglich Kugeln, d.h. es gilt

$$U(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} U(y) \, dy$$

für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

- U hat die Mittelwertigkeit bezüglich Sphären, d.h. es gilt

$$U(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} U(\xi) \, d\sigma(\xi)$$

für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

In diesem Fall ist U beliebig oft differenzierbar.

Als Vorarbeit zum Beweis des Theorems beweisen wir einige auch in anderen Zusammenhängen nützliche Aussagen.

LEMMA. (Beziehung zwischen Δ und Mittelwerten) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und U eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf Ω . Sei $x \in \Omega$ und $s > 0$ mit $B_s(x) \subset \Omega$. Dann ist die Funktion $\phi : (0, s) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(r) := \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y)$$

(stetig) differenzierbar mit

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta U(y) d\sigma(y).$$

Bemerkung.

- (Uebung) Das Lemma liefert, dass das zweimal stetig differenzierbare U genau dann harmonisch ist, wenn (für alle x) die Funktion ϕ konstant ist. Diese Charakterisierung wird (implizit) später verwendet werden.
- Das Lemma liefert eine Verbindung zwischen Mittelwerten von Funktionen und Laplace angewendet auf Funktionen. Das ist fundamental für den angestrebten Beweis des Theorems.
- Es mag erstaunen, dass die *erste* Ableitung von ϕ wird zur *zweiten* Ableitung von U in Beziehung gesetzt wird. Allerdings wird im Integrationsbereich auch vom Rand einer Menge zur Menge selber übergegangen.

Beweis. Wir definieren

$$\int_M f d\sigma := \frac{1}{|M|} \int_M f d\sigma(y).$$

Dann gilt nach Substitutionen der Verschiebung und Skalierung

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(0)} U(x+y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_1(0)} U(x+r\xi) d\sigma(\xi).$$

Damit folgt (da U zweimal stetig differenzierbar ist)

$$\phi'(r) = \int_{\partial B_1(0)} \xi \cdot \nabla U(x+r\xi) d\sigma(\xi)$$

$$\text{Rücksubstitution } x+r\xi=y, \xi = \frac{1}{r}(y-x) = \int_{\partial B_r(x)} \left(\frac{y-x}{r} \right) \cdot (\nabla U)(y) d\sigma(y)$$

$$(\text{äußere Normale } \nu = \frac{y-x}{r}) = \int_{\partial B_r(x)} \nu \cdot (\nabla U)(y) d\sigma(y)$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \nu \cdot (\nabla U)(y) d\sigma(y)$$

$$(\text{Stokes/Gauß}) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \nabla \cdot (\nabla U)(y) dy$$

$$= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta U(y) dy.$$

Das beendet den Beweis. \square

PROPOSITION. (*Desintegration*) Für stetige f gilt

$$\int_{B_r(x)} f(y) dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} f(\xi) d\sigma(\xi) \right) d\varrho.$$

Beweis. Das folgt leicht durch Rechnen in Kugelkoordinaten. \square

LEMMA. (*Aequivalenz von MWE bzgl. Kugeln und Sphaeren*) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und U eine stetige Funktion auf Ω . Dann hat U die Mittelwerteigenschaft bzgl. Sphaeren genau dann, wenn es die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln hat.

Beweis. Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln ist eine Integralversion der Mittelwerteigenschaft bezüglich Sphären und Mittelwerteigenschaft bezüglich Sphaeren eine 'Ableitung' der Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln. Damit folgt die behauptete Aequivalenz aus der vorangehenden Desintegrationsproposition:

Es habe U die Mittelwerteigenschaft bzgl. Sphaeren. Dann gilt aufgrund der Desintegration (DI) und der Mittelwerteigenschaft bzgl. Sphaeren (MWE-S)

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x)} U(y) dy &\stackrel{(DI)}{=} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(\xi) d\sigma(\xi) \right) d\varrho \\ (MWE-S) \quad &= \int_0^r U(x) |\partial B_\varrho(x)| d\varrho \\ &= U(x) \int_0^r |\partial B_\varrho(x)| d\varrho \\ &\stackrel{(DI)}{=} U(x) |B_r(x)| \end{aligned}$$

und es folgt die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln.

Es habe U die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln. Dann gilt nach Desintegration (DI) und der Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln (MWE-K) also fuer jedes $r > 0$

$$\int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(\xi) d\sigma(\xi) \right) d\varrho \stackrel{(DI)}{=} \int_{B_r(x)} U(y) dy \stackrel{(MWE-K)}{=} |B_r(x)| U(x) \stackrel{(DI)}{=} U(x) \int_0^r |\partial B_\varrho(x)| d\varrho.$$

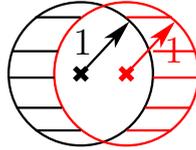
Ableiten nach r und Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert dann

$$\int_{\partial B_r(x)} U(\xi) d\sigma(\xi) = U(x) \cdot |\partial B_r(x)|.$$

Das ist der gewünschte Mittelwertsatz bezüglich Sphaeren. \square

Bemerkung. Ist U lokal Riemannintegrierbar (also Riemannintegral über alle Kugeln), und hat es die Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln, so ist U stetig.

Beweis.

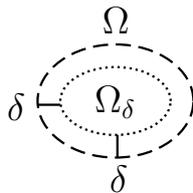


□

LEMMA. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und U eine stetige Funktion auf Ω . Es habe U die Mittelwerteigenschaft (bzgl. Sphären oder Kugeln). Dann ist U beliebig oft differenzierbar.

Bemerkung / Deutung: Mittelwerte ueber Funktionen sind im allgemeinen 'glatter' als die Funktionen selber. Eine Funktion, die ihr eigener Mittelwert ist, wird so beliebig glatt durch 'infiniten Regress'.

Beweis. Zu $\delta > 0$ sei $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}$



Es reicht zu zeigen, dass $U|_{\Omega_\delta}$ zu $C^\infty(\Omega_\delta)$ gehört. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

- $\int \varphi \, dy = 1$ (φ normiert)
- $\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\} \subset B_\delta(0)$ (φ in $B_\delta(0)$ getragen).
- $\varphi(y) = \varphi(\tilde{y})$ falls $\|y\| = \|\tilde{y}\|$ (φ rotationssymmetrisch)

(Zum Beispiel kann φ als

$$\varphi(x) = c_{\text{normierung}} \begin{cases} \exp(-\frac{1}{\delta^2 - |x|^2}) : |x| < \delta \\ 0 : |x| \geq \delta \end{cases}$$

gewählt werden.)

Dann folgt $U * \varphi|_{\Omega_\delta} \in C^\infty(\Omega_\delta)$ wegen $\varphi \in C^\infty$. Es reicht also $U * \varphi = U$ (auf Ω_δ) zu zeigen. Das ergibt sich aber wie folgt:

$$\begin{aligned}
 U * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) U(x-y) dy \\
 (\varphi \text{ in } B_\delta \text{ getragen}) &= \int_{B_\delta(0)} \varphi(y) U(x-y) dy \\
 (\text{Desintegration}) &= \int_0^\delta \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} \varphi(y) U(x-y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\
 (\varphi \text{ rotationssymmetrisch}) &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} U(x-y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\
 (\text{Verschieben}) &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\
 (\text{Mittelwerteigenschaft}) &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) U(x) |\partial B_\varrho(x)| d\varrho \\
 &= U(x) \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) |\partial B_\varrho(0)| d\varrho \\
 (\varphi \text{ rotationssymmetrisch}) &= U(x) \int_0^\delta \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} \varphi(y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\
 (\text{Desintegration}) &= U(x) \int_{B_\delta(0)} \varphi(y) dy \\
 (\varphi \text{ normiert}) &= U(x).
 \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. \square

Nach diesen Vorbereitungen koennen wir nun das Theorem vom Anfang des Abschnittes leicht beweisen: *Beweis.*

Die Aequivalenz von (ii) und (iii) ist gerade eines der vorangehenden Lemma.

(i) \implies (iii): Sei U harmonisch. Dann gilt also $\Delta U = 0$. Damit folgt fuer die Funktion ϕ mit

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y)$$

also nach dem ersten Lemma des Abschnittes zur Beziehung zwischen Δ und Mittelwerten also $\phi' \equiv 0$ und damit $\phi \equiv C$. Der Wert der Konstanten C laesst sich durch Grenzüebergang berechnen zu

$$C = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \phi(\varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_\varrho(x)|} \int_{\partial B_\varrho(x)} U(y) d\sigma(y) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_\varrho(x)|} U(x) |\partial B_\varrho(x)| = U(x).$$

Hierbei wird die Stetigkeit von U in der vorletzten Gleichheit genutzt.

(iii) \Rightarrow (i): Aus (iii) folgt nach einem vorigen Lemma, dass U beliebig oft differenzierbar ist. Damit existiert also ΔU . Angenommen es gilt $\Delta U(x) \neq 0$ für ein $x \in \Omega$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt dann $\Delta U > 0$ auf $B_s(x)$ für ein $s > 0$. Für die Funktion

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y)$$

folgt also nach dem ersten Lemma des Abschnittes zur Beziehung zwischen Δ und Mittelwerten dann $\phi' > 0$ auf $(0, s)$. Andererseits gilt aber $\phi \equiv \text{constant}$ aufgrund der Mittelwerteigenschaft (iii). Das ist ein Widerspruch. \square

←—————→
Ende der Vorlesung