Analysis II

Sommersemester 2014 **Prof. Dr. D. Lenz**

Pfingstblatt **Abgabe Donnerstag 12.06.2011**

(1) Sei (X,d) ein metrischer Raum und $M \subseteq X$. Zeigen Sie.

(a) $M^\circ = \{x \in X : M \text{ ist Umgebung von } x\} = \{x \in X : \text{es existiert } r_x > 0 \text{ mit } U_{r_x}(x) \subset M\}$.

(b) $\overline{M} = \{x \in X : \text{jede Umgebung von } x \text{ enthält Punkte von } M\} = \{x \in X : \text{es gibt } (x_n) \text{ in } M \text{ mit } x_n \to x\}$.

(c) $\partial M = \{x \in X : \text{für jede Umgebung } U \text{ von } x \text{ gilt } U \cap M \neq \emptyset \text{ und } U \cap X \setminus M \neq \emptyset\}$.

(2) Zeigen Sie, dass für alle Teilmengen X eines metrischen Raumes (X,d) gilt:

(a) $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$.

(b) $(X^\circ)^\circ = X^\circ$.

(c) Zeigen Sie außerdem, dass im Allgemeinen $\partial(\partial X) = \partial X$ nicht gilt.

(3) Sei $X = \mathbb{R}^N$ mit der euklidischen Metrik d_2. Beweisen Sie, dass für $x \in X$ und $r > 0$ für die offene Kugel $U_r(x)$ um x mit Radius r und die abgeschlossene Kugel $B_r(x)$ um x mit Radius r gilt

$$\overline{U_r(x)} = B_r(x), \qquad B_r^\circ(x) = U_r(x).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass ein $p \in X$ genau dann $\|p - x\| = r$ erfüllt, wenn in jeder Umgebung von p ein Punkt u mit $\|u - x\| < r$ als auch ein Punkt v mit $\|v - x\| > r$ liegen.

(4) Sei (M,d) ein vollständiger metrischer Raum und $\{F_n\}_{n\geq 1}$ eine Folge abgeschlossener beschränkter Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(i) $F_n \supset F_{n+1}$ für alle $n \geq 1$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} F_n = 0$.

Zeigen Sie, dass dann $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$ gelten muss.

Erinnerung: Für eine beschränkte Menge $B \subset M$ bezeichnet

$$\text{diam } B = \sup\{d(x, y) : x, y \in B\}$$

den Durchmesser von B.

Zusatzaufgabe

(1) Zeigen Sie, dass es eine bijektive, stetige Abbildung von $\mathbb{R}$ in das offene Intervall $(0, 1)$ gibt, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

Viel Erfolg!