Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 10 **Abgabe Dienstag 20.01.2015**

(1) (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen mit glattem Rand, der durch eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ gegeben ist, wobei U links von γ liegt. Sei $k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $k(x, y) = (-y, x)$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt $F(U)$ von U gegeben ist durch

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_\gamma k d\gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \langle k(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt.$$

(b) Zeichnen Sie die Zykloide

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t + \cos t, 1 + \sin t)$$

und berechnen Sie die Fläche für eine Periode.

(2) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto e^{-|x|}$.

(a) Zeigen Sie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, d\lambda)$.

(b) Berechnen Sie $g(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_\mathbb{R} e^{-ixk} f(x) d\lambda(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Untersuchen Sie, ob $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_\mathbb{R} g(k) d\lambda(k)$ gilt.

(3) Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) e^{-|x|}$, wobei $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ für $x \neq 0$ und 0 falls $x = 0$.

(a) Zeigen Sie $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, d\lambda)$.

(b) Berechnen Sie $g(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_\mathbb{R} e^{-ixk} f(x) d\lambda(x)$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Untersuchen Sie, ob $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_\mathbb{R} g(k) d\lambda(k)$ gilt.

(4) (a) Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $G : (0, \infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}$, $(r, \phi) \mapsto g(r \cos \phi, r \sin \phi)$. Zeigen Sie, dass

$$(\Delta g)(r \cos \phi, r \sin \phi) = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}(r, \phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r}(r, \phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}(r, \phi)$$

gilt.

(b) Bestimmen Sie zu $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{|x|}\right), \text{für } x \neq 0 \\ 0, \text{für } x = 0 \end{cases}$$

die Funktion Δh auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung aus Teil (a). Untersuchen Sie, ob die Funktion h in 0 zweimal stetig differenzierbar ist und berechnen Sie gegebenenfalls Δh an der Stelle 0.