Analysis III

Wintersemester 2011/12 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe Dienstag 6.12.2011**

(1) Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (z, y, z + 1)$ durch die Oberfläche des Kegels $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < z < 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\}$ (die Normale weist nach außen) einmal mit und einmal ohne Verwendung des Satzes von Gauß.

(2) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f.$$

Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $F : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \quad \operatorname{div} \operatorname{rot} F = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} \operatorname{rot} F = \operatorname{grad} \operatorname{div} F - \sum_{j=1}^{3} (\Delta F_j) e_j,$$

wobei $e_1, \ldots, e_N$ die Standardeinheitsvektoren sind.

(3) (a) Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Sei $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von achsenparallelen Quadern (mit nichleerem Inneren) mit $x_0 \in Q_k$, $k \in \mathbb{N}$ und Durchmesser$(Q_k) \to 0$, $k \to \infty$. Zeigen Sie

$$f(x_0) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(y) dy.$$

(b) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\int_Q f(x) dx = 0$ für jeden beschränkten achsenparallelen Quader $Q \subseteq U$. Zeigen Sie $f \equiv 0$.

(c) Seien $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $\int_Q f dx = \int_Q g dx$ für alle beschränkten achsenparallelen Quader $Q \subseteq U$. Zeigen Sie $f = g$.

(4) Für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ mit glattem Rand sei $u : \Omega \cup \partial\Omega \to \mathbb{R}$ auf einer Umgebung von Ω zweimal stetig differenzierbar mit $u \not\equiv 0$, $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ und für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gelte

$$-\Delta u = \lambda u.$$

Zeigen Sie $\lambda > 0$.

Zusatzaufgaben

(Z1) Zeigen Sie, dass die orthogonale Gruppe $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\top A = I\}$, $n \geq 1$, eine kompakte $n(n-1)/2$ dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist. (Tipp: Betrachten Sie $F(A) = I$ für $F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}_{sym}, A \mapsto A^\top A$ und wobei $\mathbb{R}^{n\times n}_{sym}$ der Raum der symmetrischen, reellen $n \times n$ Matrizen ist.)