Analysis III

Sommersemester 2009 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 11 **Abgabe Montag 1.2.2010**

(1) a.) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung 'nach unten':

$$\|\|x\| - \|y\|\| \leq \|x - y\|.$$

b.) Sei V ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeigen Sie, dass $d : V \times V \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik ist.

c.) Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Zeigen Sie, dass $d : V \times V \to [0, \infty)$ gegeben durch

$$d(x, y) = (x - y, x - y)^{\frac{1}{2}}$$

eine Metrik ist.

(2) a.) Verwenden Sie das Gram-Schmidt Verfahren, um in $C[0, 1]$ mit dem Skalarproduct $(f, g) = \int_0^1 \bar{f}(x)g(x)dx$ die Funktionen $g_0(x) = 1$, $g_1(x) = x$, $g_2(x) = x^2$ zu orthonormieren.

b.) Bestimmen Sie die Koeffizienten (die sog. verallgemeinerte Fourierkoeffizienten) der Entwicklung der Funktion $h(x) = 1-x^2, (x \in [0, 1])$ bzgl. des Orthonormalsystem aus Aufgabenteil a.).

(3) Bestimmen Sie alle $f \in C^2[0, 1]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ für die gilt

$$-\frac{d^2}{dx^2}f = \lambda f, \quad f(0) = f(1) = 0.$$

b.w.

(4) Betrachten Sie das zweidimensionale Randwertproblem $f \in C^2([0,1]^2)$ mit

$$f_{xx} + f_{yy} = \lambda f, \qquad f(0,y) = f(1,y) = f(x,0) = f(x,1) = 0, \quad x, y \in [0,1].$$

Finden Sie Lösungen mit Hilfe des Produktansatzes (siehe Aufgabe (3)). Bestimmen Sie auch die zugehörigen Eigenwerte λ.

Zusatzaufgabe:

1. a.) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $w_\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $w_\alpha(x) = 1 - \alpha x$. Weiterhin sei auf $C[0,1]$ die Bilinearform $(\cdot,\cdot)_\alpha$ definiert mit

$$(f,g)_\alpha := \int_0^1 \bar{f}(x) g(x) w_\alpha(x) dx.$$

Bestimmen Sie die Menge Z der $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass $(\cdot,\cdot)_\alpha$ ein Skalarprodukt ist.

b.) Sei $\alpha \in Z$. Zeigen Sie explizit, dass für die Polynome g, f mit $g(x) = 1$ und $f(x) = x$ für die durch $(\cdot,\cdot)_\alpha$ induzierte Metrik aus Aufgabe 1.c gilt

$$d(g,f)_\alpha \neq 0.$$