Einführung in Dirichletformen - Notizen [1]

Jena - Wintersemester 20112 / 2013

Daniel Lenz

[1]Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Konstruktive Kommentare sind willkommen.

Inhaltsverzeichnis

KAPITEL 0

Motivation

Dirichletformen spielen eine Rolle in verschiedenen Bereichen der Mathematik:

- Mathematische Physik: Waermeleitung, Schroedingergleichung, Elektrostatik.
- Partielle Differentialgleichungen (mit singulaeren Koeffizienten): $\nabla \cdot a(x)\nabla$ mit a unstetig. (Stampackia, De Giorgii, Moser...)
- Wahrscheinlichkeitstheorie: Markovprozesse z.B. Brownsche Bewegung. (Fukushima, $\ldots$,...)
- Intrinsische Geometrie: Waermekernabschaetzungen. (Grigoryan, Sturm, Jost, ...)

Hier sollen kurz zwei Probleme (aus der Physik) diskutiert werden:

Die Waermeleitungsgleichung/Diffusionsgleichung.

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \Delta\psi.$$

Hier: $\psi = \psi(x,t)$ mit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $t > 0$, $\Delta = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial^2 x_j}$.

Es beschreibt ψ die Waermeverteilung zu der Zeit t, falls zur Zeit $t = 0$ die Anfangsverteilung $\psi(\cdot, 0)$ geherrscht hat. Dabei wird Waerme als ein Stoff aufgefasst.

Herleitung. $\psi = \psi(x,t)$ Waermeverteilung. Also:

$$\text{Waermemenge in Volumen } V \text{zur Zeit } t = \int_V \psi(x,t)dx.$$

Damit

$$\text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \psi(x,t)dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t)dx.$$

Andererseits (Waerme ist Stoff !):

$$\begin{aligned}
\text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t &= \text{Abfluss aus } V \\
(n \text{ aussere Normale}) &= -\int_{\partial V} \text{Fluss} \cdot ndS \\
(\text{Fluss linear im u entgegen zu Waermegefaelle}) &= \int_{\partial V} (b(x)\nabla\psi(x,t)) \cdot ndS \\
(\textit{Stokes}) &= \int_V (\nabla \cdot (b(x)\nabla\psi(x,t))dx \\
(b \equiv 1) &= \int_V \Delta\psi(x,t)dx.
\end{aligned}$$

Da V beliebig ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \Delta\psi.$$

Etwas allgemeiner erhaelt man

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \nabla \cdot b(x)\nabla\psi$$

mit $b(x)$ positiv definite Matrix. oder in 'schwacher' Form:

$$\int \frac{\partial}{\partial t}\psi\phi dx = -\int \langle b(x)\nabla\psi, \nabla\phi\rangle dx$$

fuer 'alle' ϕ.

Formale Loesung. Eine Loesung ist gegeben durch $\psi_t = e^{t\Delta}\psi_0$.

Die Poissongleichung.

$$(\Delta + \alpha)f = g.$$

Hier: $f = f(x)$, $g = g(x)$ mit $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ und $\alpha \geq 0$. (Der Fall $\alpha = 0$ wird eigentlich als Poissongleichung bezeichnet.)

Es beschreibt f das Potential unter der Ladungsverteilung g, d.h. bei Ladungsverteilung g ist $f(x_1) - f(x_2)$ die Arbeit, die man aufwenden muss, um eine Einheitsladung von x_2 nach x_1 zu bewegen.

Herleitung. Sei g eine gegebene Ladungsverteilung. Das durch g erzeugte Feld ist gegeben durch

$$E(x') = \int g(x)\frac{1}{|x-x'|^3}(x-x')dx = -\nabla' \int \frac{g(x)}{|x-x'|}dx.$$

Das Feld ist also ein Gradientenfeld mit Potential

$$f = \int \frac{g(x)}{|x-x'|}dx.$$

Damit gilt also

$$\Delta' f(x') = \nabla' \cdot E(x') = \int g(x)\nabla' \cdot \frac{x-x'}{|x-x'|^3}dx = g(x').$$

Betrachtet man die Ladungsverteilung in einem Medium, so muss man E ersetzen durch $D = bE$. Man erhaelt

$$\nabla \cdot b\nabla f = g.$$

Formale Loesung. Eine Loesung ist gegeben durch $(\Delta + \alpha)^{-1}g$ fuer $\alpha > 0$ und $\lim_{\alpha\to 0}(\Delta + \alpha)^{-1}g$ fuer $\alpha = 0$.

Eine diskretisierte Version dieser Gleichungen fuehrt auf ungerichtete gewichtete Graphen. Ein ungerichteter Graph ist ein Paar (V, E) bestehend aus

- einer abzaehlbaren Menge V und
- einer symmetrischen Teilmenge $E \subset V \times V \setminus \{(x,x) : x \in V\}$.

Elemente von V heissen Ecken und Elemente von E heissen Kanten. Wir schreiben $x \sim y$ falls $(x,y) \in E$. Ein Gewicht auf (V,E) ist eine Funktion

$$b : V \times V \longrightarrow [0,\infty)$$

mit $b(x,y) = b(y,x)$ fuer alle $(x,y) \in V \times V$ sowie $b(x,y) = 0$ falls $(x,y) \notin E$. Die Elemente von V heissen Vertices. Ein Paar $(x,y) \in V \times V$ mit $b(x,y) > 0$ (aequivalent $b(y,x) > 0$) heisst Kante. Jeder solche Graph liefert dann einen Operator

$$L_b f(x) := \sum_{y \sim x} b(x,y)(f(x) - f(y)).$$

Diesen Operator kann man aehnlich wie oben schreiben. Dazu fuehrt man die Menge F_0 der Funktionen auf den Vertices und die Menge F_1 der Funktionen g auf den Kanten mit $g(x,y) = -g(y,x)$ ein und definiert die Operatoren

$$d : F_0 \longrightarrow F_1, df(e) = f(y) - f(x) \text{ fuer } e = (x,y)$$

und seinen formal adjungierten

$$d^* : F_1 \longrightarrow F_0, d^*g(x) = -\sum_{y \sim x} g(x,y)$$

ein. Dann gilt

$$L_b f = d^* b d f.$$

Fragen. In den obigen Kontexten stellen sich Fragen nach

- Existenz von Loesungen,
- Eindeutigkeit von Loesungen,
- Eigenschaften der Loesungen,
- Abhaengigkeit der Loesungen von der rechten Seite,
- Abhaengigkeit der Loesungen von der Geometrie...

Die obigen Betrachtungen fuehren auf Operatoren der Form

$$\nabla \cdot b\nabla, \text{ bzw. } d^* \cdot bd.$$

Eine entscheidenden Eigenschaft dieser Operatoren laesst sich angeben, wenn man zu den zugehoerigen Formen uebergeht. Dazu noch ein Begriff:
Eine Abbildung $T : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ bzw. $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ heisst normale Kontraktion, wenn gilt

$$T(0) = 0 \text{ und} |T(x) - T(y)| \leq |x - y|.$$

Definiert man nun die quadratische Form Q zu obigen Operatoren durch

$$Q(f) := \int_\Omega \langle b(x)\nabla f, \nabla f\rangle dx$$

bzw.

$$Q(f) := \frac{1}{2} \sum b(x,y)(f(x) - f(y))^2,$$

so gilt in beiden Faellen

$$Q(Tf) \leq Q(f) \quad (*).$$

Bew. *Auf Ω:* Ohne Einschraenkung f reellwertig, stetig differenzierbar. Ohne Einschraenkung T stetig differenzierbar. Dann Kettenregel: $\nabla(Tf)(x) = T'(f(x)\nabla f(x)$ mit $T' \leq 1$ da Kontraktion.

Auf Graphen: klar.

Wesentliche strukturelle Eigenschaften der Loesungen von Waeremleitungsgleichung und Poissongleichung folgen aus (*)!
Das soll in diesem Semester untersucht werden. Dazu folgender Plan:

Kapitel 1: Selbstadjungierte positive Operatoren - Magischer Tetraeder:

Form, Operator, Halbgruppe, Resolvente $\sim$ Form, Laplace, Waermeleitungsgleichung, Poissongleichung

Kapitel 2: Markovhalbruppen und Dirichlet Formen:

Generator– DF – Markovhalbgruppe/Resolvente
— Markoprozess.
Hier: Halbgruppen und Resolventen.

Ende 1. Vorlesung

Kapitel 3: Reguleare DF und Kapazitaet

KAPITEL 1

Selbstadjungierte positive Operatoren

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum ueber $\mathbb{C}$. Das Skalarprodukt in $\mathcal{H}$ wird mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichnet und die Norm mit $\| \cdot \|$.

1. Der Spektralsatz

In diesem Abschnitt diskutieren wir den fundamentalen Satz fuer selbstadjungierte Operatoren. Der Abschnitt ist als Wiederholung gedacht.

Ein linearer Operator T im Hilbertraum besteht aus zwei Teilen:

- einem Unterraum, genannt Definitionsbereich von T und mit $D(T)$ bezeichnet,

- einer linearen Abbildungsvorschrift $D(T) \longrightarrow \mathcal{H}$.

Wir schreiben $T : D(T) \longrightarrow \mathcal{H}$.

Beispiel. Matrizen beschreiben Operatoren in endlich dimensionalen Hilbertraeumen.

Beispiel. $\Delta : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega, dx)$.

Beispiel. Sei (X, m) ein Massraum und $V : X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann wird durch

$$D(M_V) := \{f \in L^2(X, m) : \int |Vf|^2 dm < \infty\}$$
$$M_V f := Vf,$$

ein linearer Operator auf $L^2(X, m)$ definiert.

Ein Operator heisst beschraenkt, wenn ein $C \geq 0$ existiert mit $\|T\xi\| \leq C\|\xi\|$ fuer alle $\xi \in D(T)$. Ist T auf ganz $\mathcal{H}$ definiert so ist T genau dann beschraenkt, wenn gilt

$$\|T\| := \sup\{|\langle T\xi, \eta\rangle| : \|\xi\|, \|\eta\| \leq 1\} < \infty.$$

Die Resolventenmenge von T, $\rho(T)$, ist gegeben durch die λ aus dem Koerper, fuer die ein beschraenkter Operator S auf ganz $\mathcal{H}$ existiert mit

$$(T - \lambda)S = S(T - \lambda) = id.$$

Das Komplement der Resolventenmenge ist das Spektrum $\sigma(T)$.

Beispiel. Das Spektrum einer Matrix sind gerade die Eigenwerte der Matrix.

Um das Spektrum von Multiplikationsoperatoren zu identifizieren brauchen wir eine (sehr schwache) Bedingung an den Massraum. Ein Raum (X, m) heisst Massraum ohne Atome unendlicher Masse, wenn jede messbare Teilmenge mit unendlichem Mass eine messbare Teilmenge mit positivem endlichem Mass enthaelt. (Andernfalls gibt es eine messbare Teilmenge unendlichen Masses, deren messbare Teilmengen alle entweder Mass 0 oder Mass unendlich haben. Diese Teilmenge wawere dann ein 'Atom' unendlichen Masses.)
Jeder σ-endliche Massraum und jede diskunkte Vereinigung σ-endlicher Massraeume erfuellt diese Bedingung. Ebenso auch jeder lokalkompakte Raum mit einem Radonmass (d.h. kompakte Mengen haben endliches Mass), das regulaer ist (d.h. das Mass einer Menge ist das Supremum der Masse ihrer kompakten Teilmengen).

Beispiel. Sei (X, m) ein Massraum (ohne Atome unendlicher Masse). Ist $V : X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar, so ist das Spektrum von M_V ist gerade der wesentliche Wertebereich von V gegeben durch

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : m(V^{-1}(B_\epsilon(\lambda)) > 0 \text{ for all } \varepsilon > 0\}.$$

(Hier bezeichnet $B_s(\lambda)$ die Kugel um λ mit Radius s.) Diese Aussage gilt nicht, wenn es z.b. einen Punkt mit Masse unendlich gibt.

Wir werden meist voraussetzen, dass der Operator dicht definiert ist d.h. dass sein Definitionsbereich dicht im Hilbertraum ist.

Ist T ein dicht definierter Operator, so existiert der adjungiert Operator T^* gegeben durch

$$D(T^*) := \{\eta \in \mathcal{H} : \text{es gibt } \rho \in \mathcal{H} \text{ mit } \langle \eta, T\xi \rangle = \langle \rho, \xi \rangle \text{ fuer alle } \xi \in D(T)\}.$$

$$T^*\eta := \rho.$$

Ist T beschraenkt und ueberall definiert, so ist auch T^* beschraenkt und ueberall definiert.

Beispiel. Ist ein Operator im endlichdimensionalen Hilbertraum durch eine Matrix gegeben, so wird der adjungierte durch die adjungierte Matrix beschrieben.

Beispiel. (X, m) Massraum. Der Operator M_V ist dicht definiert, und es gilt $M_V^* = M_{\overline{V}}$ und $D(M_V) = D(M_{\overline{V}}) = D(M_V^*)$.

Definition. *Ein dicht definierter Operator T im Hilbertraum $\mathcal{H}$ heisst selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt.*

Beispiel. (X, m) Massraum. $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann ist M_V selbstadjungiert.

Das ist tatsaechlich schon das allgemeinste Beispiel eines selbstadjungierten Operator. Es laesst sich jeder selbstadjungierte Operator als Multiplikationsoperator darstellen. Fuer Matrizen ist das nichts anderes als die uebliche Diagonalisierung.

Theorem. *(Spektralsatz fuer selbstadjungierte Operatoren) Sei T ein selbstadjungierter Operator auf dem Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann gibt es einen Massraum (X, m) (ohne Atome unendlicher Masse), eine messbare Funktion $V : X \longrightarrow \mathbb{R}$ und eine unitaere Abbildung*

$$U : L^2(X, m) \longrightarrow \mathcal{H} \text{ mit } T = UM_V U^{-1}.$$

Zeichunung: komm. Diagramm.

Bemerkung. (a) Tatsaechlich kann X als diskunkte Vereinigung von Kopien von $\mathbb{R}$ gewaehlt werden, m als Summe von Radonmassen auf diesen Kopien und V als die Identitaet auf de einzelnen Kopien. Die σ-Algebra wird von den kompakten Teilmengen erzeugt.

(b) Ist der Hilbertraum separabel, so ist (X, m) σ-endlich.

(c) Diese Darstellung eines selbstadjungierten Operator als Multiplikationsoperator ist nicht kanonisch.

Beispiel. Laplaceoperator auf $\mathbb{R}^d$ ist mittels Fouriertransformation unitaer aequivalent zu Multiplikation mit $V : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, $k \mapsto |k|^2$.

Beispiel. Selbstadjungierte Operatoren im N dimensionalen. Zeichnung: N Kopien von $\mathbb{R}$, Eigenwerte...

Beispiel. Multiplikationsoperatoren auf Massraeumen (ohne Atome unendlicher Masse)

Der Spektralsatz erlaubt es uns insbesondere Funktionen eines selbstadjungieren Operator T zu definieren: Zu messbarem $\Phi : \sigma(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ definieren wir $\Phi(T)$ als

$$\Phi(T) := UM_{\Phi\circ V}U^{-1},$$

d.h.

$$D(\Phi(T)) := U\{f \in L^2(X, m) : f \in D(M_{\Phi\circ V})\}, \ \Phi(T)Uf = UM_{\Phi\circ V}f.$$

Hier wird die naheliegende Definition der Funktion eines Multiplikationsoperatoren auf beliebige selbstadjungierte Operatoren herübergezogen.

Ende 2. Vorlesung

Aufgrund der Eigenschaften von Multiplikationsoperatoren folgt dann einfach, dass

$$\Phi(T)^* = \overline{\Phi}(T)$$

und dass $\Phi(T)$ beschraenkt ist, wenn Φ beschraenkt ist. Weiterhin gilt (fuer beschraenkte messbare Φ und Ψ

$$\Phi(T)\Psi(T) = (\Phi\Psi)(T), \ \Phi(T) + \Psi(T) = (\Phi + \Psi)(T).$$

Die Abbildung $\Phi \mapsto \Phi(T)$ ist also ein Algebrenhomomorphismus (von der Algebra der beschraenkten messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ in die Algebra der beschraenkten Operatoren).

Tatsaechlich gelten (etwas komplizierter zu formulierende) Varianten fuer beliebige messbare Φ und Ψ.

Insbesondere erhalten wir fuer jede messbare Menge $A \subset \mathbb{R}$ einen Operator $1_A(T)$. Ebenso folgt aus den Eigenschaften von Multiplikationsoperatoren nun leicht folgende Proposition.

Proposition. *Sei T ein selbstadjungierter Operator. Dann ist $1_A(T)$ ein Projektion fuer jedes messbare $A \subset \mathbb{R}$. Die Abbildung*

$$E : \textit{Borelmengen in } \mathbb{R} \longrightarrow \textit{Projektionen}, E(A) := 1_A(T)$$

ist ein projektionswertiges Mass d.h. es gilt

- *Ist A die disjunkte Vereinigung von Borelmengen A_j, $j \in \mathbb{N}$, so gilt $E(A) = \oplus_j^\infty E(A_j)$ (also $E(A_j) \perp E(A_k)$ fuer $j \neq k$ und $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n E(A_j)\xi = E(A)\xi$ fuer alle $\xi \in \mathcal{H}$).*
- *$E(\mathbb{R}) = id$, $E(\emptyset) = 0$.*

Fuer den Traeger von E definiert als

$$\operatorname{supp} E := \{\lambda \in \mathbb{R} : E(\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) > 0 \textit{ fuer alle } \varepsilon \neq 0\}$$

gilt $\operatorname{supp} E = \sigma(T)$.

Die Abbildung E aus der vorangehenden Proposition heisst Spektralschar von T. Sie ist kanonisch.
Durch E und $\xi \in \mathcal{H}$ wird auf $\mathbb{R}$ ein Mass μ_ξ induziert mit

$$\mu_\xi(A) := \langle E(A)\xi, \xi\rangle = \langle E(A)\xi, E(A)\xi\rangle.$$

Es wird als Spektralmass von ξ bzgl T bezeichnet. Das Spektralmass erfuellt folgende fundamentale Eigenschaft.

Proposition. *Sei $\Phi : \sigma(T) \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Dann gilt $\int |\Phi|^2 d\mu_\xi < \infty$ genau dann wenn ξ zum Definitionsbereich von $\Phi(T)$ gehoert. In diesem Fall gilt*

$$\|\Phi(T)\xi\|^2 = \int |\Phi|^2 d\mu_\xi(t).$$

Beweis. Fuer Elementarfunktionen $\Phi = \sum_{j=1}^n c_j 1_{A_j}$ zeigt man leicht

$$\int |\Phi \circ V|^2 dm = \int |\Phi|^2 d\mu_\xi.$$

Durch Grenzuebergang folgt die Formel dann fuer alle messbaren Φ. Daraus folgen die Aussagen. □

Damit koennen wir nun der Gleichung

$$\Phi(T) = \int \Phi dE$$

in folgender Weise einen Sinn geben: Fuer eine Elementarfunktion $\phi = \sum c_j 1_{A_j}$ definiert man natuerlicherweise

$$\int \phi(t) dE(t) := \sum c_j E(A_j) = \phi(T).$$

Sei nun $\varphi : \operatorname{supp} E \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Sei $\varphi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_\xi)$. Dann konvergiert (nach der Proposition) fuer jede Folge (φ_n) von Elementarfunktionen, die in $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\xi)$ gegen φ konvergiert, die Folge der

$$(\int \varphi_n dE(t)\xi = \varphi_n(T)$$

gegen $\phi(T)\xi$. Wir definieren entsprechend

$$\int \varphi dE\xi := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n dE\xi = \Phi(T)\xi.$$

Beispiel. Ist A eine selbstadjungierte Operator in einem endlichdimensionalen Hilbertraum, so ist A durch eine symmetrische Matrix gegeben. Dann hat A nur reelle Eigenwerte. Zu einem reellen Eigenwert λ sei P_λ die Projektion auf den Eigenraum zu λ. Dann sind Projektionen zu verschiedenen Eigenraeumen orthogonal und es gilt

$$A = \sum_{\lambda \in \sigma(A)} \lambda P_\lambda.$$

2. Operatoren und Formen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass selbstadjungierte nichtnegative Operatoren nichtnegativen Formen in kanonischer Weise entsprechen.

Wir beginnen mit einer Diskussion nichtnegativer Operatoren.

LEMMA. *Sei T eine selbstadjungierter Operator im Hilbertraum $\mathcal{H}$. Dann sind aequivalent:*
(i) $\sigma(T) \subset [0,\infty)$.
(ii) *Es gilt* $\langle Tf, f\rangle \geq 0$ *fuer alle* $f \in D(T)$.
(iii) *Es existiert ein selbstadjungierter Operator* S *mit* $T = S^2$.

*B*eweis. Ohne Einschraenkung koennen wir T als Operator der Multiplikation mit V auf einem Massraum (X,m) (ohne Atome unendlicher Masse) annehmen. Dann ist $\sigma(T)$ der wesentliche Wertebereich von V, und es gilt offenbar

$$\text{Wes. Wertebereich von } V \subset [0,\infty) \Longleftrightarrow \int V|f|^2 dm \geq 0 \text{ fuer alle } f \in D(T).$$

Damit folgt die Aequivalenz von (i) und (ii).
(i) $\Longrightarrow$ *(iii)*: Wir definieren S als den Operator der Multiplikation mit $V^{1/2}$.
(iii) $\Longrightarrow$ *(ii)*: Wir koennen ohne Einschraenkung S als Operator der Multiplikation mit einer Funktion W annehmen. Dann ist T der Operator der Multiplikation mit dem (nichtnegativen) W^2 und es folgt *(ii)*. □

DEFINITION. *Ein selbstadjungierter Operator heisst nichtnegativ, wenn er eine der Bedingungen des vorigen Lemma erfuellt.*

Fuer nichtnegative selbstadjungiert Operatoren T koenen wir die Wurzel $\sqrt{T} = T^{1/2}$ definieren mittels

$$\sqrt{} : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty),\ x \mapsto \sqrt{x}$$

(da $\sigma(T) \subset [0,\infty)$). Es ist dann $T^{1/2}$ wieder ein selbstadjungierter nichtnegativer Operator.

Eine nichtnegative Sesquilinearform auf $\mathcal{H}$ besteht aus einem dichten Unterraum D von $\mathcal{H}$ und einer Abbildung $Q : D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ so dass gilt

- $Q(f,g) = \overline{Q(g,f)}$ fuer alle $f,g \in D$.
- Q ist linear im ersten Argument und Q ist antilinear im zweiten Argument.
- $Q(f,f) \geq 0$ fuer alle $f \in D$.

Damit induziert Q eine Abbildung $Q' : \mathcal{H} \longrightarrow [0,\infty]$ definiert durch $Q'(f) := Q(f,f)$ falls $f \in D$ und $Q'(f) = \infty$ sonst.
Aus Q' kann Q wiedergewonnen werden mittels Polarisastion. Genauer gilt

$$Q(f,g) = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{3} i^k Q'(g + i^k f, g + i^k f).$$

Daher werden wir im folgenden nicht mehr zwischen Q und Q' unterscheiden und nur noch die Bezeichnung Q verwenden. Ist Q eine nichtnegative Form, so ist wird auf D durch

$$\langle f, g\rangle_Q := Q(f,g) + \langle f, g\rangle$$

eine Skalarprodukt eingefuehrt. Die zugehoerige Norm bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_Q$ d.h.

$$\|f\|_Q^2 = Q(f,f) + \langle f, f\rangle.$$

Beispiel. Sei T ein nichtnegativer Operator im Hilbertraum. Dann wird durch $D(Q_T) := D(T^{1/2})$ und

$$Q_T(f,g) := \langle T^{1/2} f, T^{1/2} g\rangle$$

eine nichtnegative Form definiert.

Nach dem Spektralsatz koennen wir diese Formen auch durch folgendes Beispiel beschreiben:

Beispiel. Sei (X,m) ein Massraum und $V : X \longrightarrow [0,\infty)$ messbar. Dann wird durch

$$D := \{f \in L^2(X,m) : \int V|f|^2 dm < \infty\}$$

$$Q_V(f,g) := \int V f g dm$$

eine nichtnegative Form definiert. Ist M der Operator der Multiplikation mit V so gilt $D(Q) = D(M^{1/2})$ und $Q_V(f,g) = \langle M^{1/2} f, M^{1/2} g\rangle$.

Der entscheidende Satz zu nichtnegativen Formen ist der folgende. Er impliziert, dass die Formen der Form Q_V (in gewisser Weise) schon die allgemeinsten Formen sind.

Theorem. *Sei $Q : D \times D \longrightarrow \mathbb{C}$ eine nichtnegative Form auf $\mathcal{H}$. Dann sind aquivalent:*

(i) *Es gibt einen selbstadjungierten nichtnegativen Operator H mit $D = D(H^{1/2})$ und $Q(f,g) = \langle H^{1/2} f, H^{1/2} g\rangle$.*
(ii) *Q ist unterhalbstetig (d.h. es gilt $Q(f) \leq \liminf_{n\to\infty} Q(f_n)$ fuer jede Folge (f_n) mit $f_n \to f$).*
(iii) *Der Unterraum D mit dem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle_Q$ ist ein Hilbertraum (d.h. vollstaendig).*

*B*eweis. (i)$\Longrightarrow$ (ii): Fuer $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Q_n durch

$$Q_n(f) := \langle nH(H+n)^{-1} f, f\rangle = \int \frac{nt}{t+n} d\mu_f(t).$$

Da $\frac{nt}{n+t}$ fuer festes n eine beschraenkte Funktion ist, ist der Operator $nH(H+n)^{-1}$ beschraenkt. Also ist Q_n stetig (in f). Offenbar ist die Folge $Q_n(f)$ monoton und es gilt fuer $n \to \infty$

$$Q_n(f) = \int \frac{nt}{t+n} d\mu_f(t) \to \int t\mu_f(t) = \int t^{1/2} t^{1/2} d\mu_f(t) = Q(f).$$

(Beachte: Der Fall $Q(f) = \infty$ ist eingeschlossen, da $Q(f) = \infty \Longleftrightarrow f \notin D(Q) = D(H^{1/2}) \Longleftrightarrow \int (t^{1/2})^2 d\mu_f(t) = \infty$.) Damit ist also Q das Supremum der stetigen Funktionen Q_n und es folgt (i).

Ende der 3. Vorlesung

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Sei (f_n) eine Cauchy Folge bezgl. des Skalarproduktes $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Dann ist insbesondere (f_n) eine Cauchy Folge in $\mathcal{H}$ und hat konvergiert dort gegen ein f. Weiterhin existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N mit

$$Q(f_n - f_m) + \|f_n - f_m\|^2 \leq \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq N$. Bildet man nun (bei festem $m \geq N$) den Grenzwert $n \to \infty$ so folgt aus (ii), dass $f - f_m$ zu $D(Q)$ gehoert und

$$Q(f - f_m) + \|f - f_m\|^2 \leq \varepsilon$$

erfuellt fuer alle $m \geq N$. Damit folgt $f = (f - f_m) + f_m \in D(Q)$ und (f_n) konvergiert bzgl. $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$ gegen f.

(iii)$\Longrightarrow$ (i):
Idee: Es sollte eigentlich gelten $Q(f, g) = \langle Hf, g \rangle$ also $\langle f, g \rangle_Q = \langle (H+1)f, g \rangle$.
Problem: H kann unbeschraenkt sein und diese Formeln haben dann keinen Sinn.
Loesung: Betrachte $A = (H+1)^{-1}$. Dann gilt $\langle f, g \rangle = \langle Af, g \rangle_Q$ und A ist beschraenkt.

Nach (iii) ist $D(Q)$ ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q$. Wir bezeichnen diesen Hilbertraum mit $\mathcal{H}'$. Wir betrachten die Form

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H}' \times \mathcal{H}' \longrightarrow \mathbb{C}, (f, g) \mapsto \langle f, g \rangle.$$

Diese Form ist offenbar symmetrisch und nichtnegativ. Weiterhin erfuellt sie

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\| \leq \|f\|_Q \|g\|_Q.$$

Daher (siehe folgende 'Erinnerung' fuer Details) ist diese Form durch einen (durch 1) beschraenkten selbstadjungieren nichtnegativen Operator $A : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}'$ gegeben d.h. es gilt

$$\langle f, g \rangle = \langle Af, g \rangle_Q$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}'$.
Nach dem Spektralsatz angewendet auf A existiert dann ein Massraum (X, m') eine messbare Funktion $a : X \longrightarrow [0, 1]$ und eine unitaere Abbildung

$$U : \mathcal{H}' \longrightarrow L^2(X, m') \text{ mit } H = U^{-1} M_a U.$$

Wegen $0 = \langle Af, f \rangle_Q = \|f\|^2$ nur fuer $f = 0$ gilt m' fast sicher $a > 0$. Damit gibt es ein messbares $h : X \longrightarrow [0, \infty)$ mit

$$a = \frac{1}{h+1}.$$

Damit gilt also fuer alle $f, g \in \mathcal{H}'$
$$\langle f, g\rangle = \langle Af, g\rangle_Q = \int UfUg\frac{1}{h+1}dm'$$
sowie
$$Q(f,g) = \langle f,g\rangle_Q - \langle f,g\rangle = \int UfUgdm' - \int UfUg\frac{1}{h+1}dm' = \int UfUg\frac{h}{h+1}dm'.$$
Fuehrt man auf X das Mass $m := \frac{1}{h+1}dm'$ so ist also
$$D(Q) \subset (\mathcal{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \longrightarrow L^2(X,m), f \mapsto Uf$$
isometrisch (erste Formel) mit dichtem Bild (Uf sind dicht in $L^2(X,m')$). Diese Abbildung ist weiterhin dicht definiert, da $D(Q)$ dicht im $\mathcal{H}$ ist. Damit koennen wir sie zu einer unitaeren Abbildung fortsetzen:
$$\widetilde{U} : \mathcal{H} \longrightarrow L^2(X,m).$$
Wir koennen also $\mathcal{H}$ mit $L^2(X,m)$ identifizieren. Unter dieser Identifikation geht $D(Q)$ ueber in
$$\widetilde{U}D(Q) = UD(Q) = L^2(X,m') = \{f \in L^2(X,m) : \int h|f|^2 dm < \infty\}.$$
(Hier folgt die letzte Gleichung durch direktes Nachrechnen unter Verwenden der Definition von m.)
Ohne Einschraenkung koennen wir also setzen: $\mathcal{H} = L^2(X,m)$, $D(Q) = \{f \in L^2(X,m) : \int h|f|^2 dm < \infty\}$ und $Q(f,g) = \int fghdm$. Definiert man nun H als den Operator der Multiplikation mit h in $L^2(X,m)$ so folgt (i). □

Erinnerung. Sei $Q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine symmetrische Bilinearform mit $|Q(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|$ fuer alle $u, v \in \mathcal{H}$. Dann gibt es einen selbstadjungierten beschraenkten Operator A mit $\|A\| \leq C$ und $Q(u,v) = \langle Au, v\rangle$.
Bew. Fuer festes $u \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung
$$\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}, v \mapsto Q(u,v)$$
linear und beschraenkt (durch $C\|u\|$). Nach dem Rieszschen Lemma gibt es also ein $u' \in \mathcal{H}$ mit $\|u'\| \leq C\|u\|$ und
$$Q(u,v) = \langle u', v\rangle$$
fuer alle $v \in \mathcal{H}$. Ersetzt man u durch $u + \lambda w$ so folgt aus der Linearitaet aller beteiligten Abbidlungen leicht, dass $(u+\lambda w)' = u' + \lambda w'$. Die Abbildung $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$, $u \mapsto u'$ ist also linear. Weiterhin gilt $\|Au\| = \|u'\| \leq C\|u\|$, und es folgt $\|A\| \leq C$. Schliesslich gilt
$$\langle Au, v\rangle = Q(u,v) = \overline{Q(v,u)} = \overline{\langle Av, u\rangle} = \langle u, Av\rangle$$
fuer alle $u, v \in \mathcal{H}$. Daher ist A selbstadjungiert.

Uebung. Zeigen Sie, dass man (ii) auch schwach konvergente Folgen einsetzen kann.
Bew.

Definition. *Eine nichtnegative Form heisst abgeschlossen, wenn sie eine der Bedingungen des vorangehenden Satzes erfuellt. Eine nichtnegative Form heisst abschliessbar, wenn sie eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. In diesem Fall heisst die kleinste abgeschlossene Fortsetzung der Abschluss der Form.*

Bemerkung. Eine Form ist genau dann abgeschlossen, wenn sie unitaer equivalent zu einer Form der Form Q_V ist. (Denn nach (i) sind abgeschlossene Formen gerade Formen der Form Q_H. Mit dem Spektralsatz folgt die Behauptung.)

Fuer spaeteren Nutzen geben wir auch noch folgend Definition.

Definition. *Eine nichtnegative Form heisst abschliessbar, wenn sie eine abgeschlossene Fortsetzung besitzt. In diesem Fall heisst die kleinste abgeschlossene Fortsetzung der Abschluss der Form.*

Beispiel. (Gewichteter Graph) Sei V eine abzaehlbare Menge und $b : V \times V \longrightarrow [0, \infty)$ gegeben mit

- $b(x, y) = b(y, x)$ fuer alle $(x, y) \in V \times V$.
- $b(x, x) = 0$ fuer alle $x \in V$
- $\sum_{y \in V} b(x, y) < \infty$ fuer alle $x \in V$.

Wir nennen dann (V, b) einen gewichteten Graphen. Dann wird durch

$$D(Q_G) := \{f \in \ell^2(V) : \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x, y)|f(x) - f(y)|^2 < \infty\},$$

$$Q(f, g) := \frac{1}{2} \sum_{x,y} b(x, y)f(x) - f(y))(g(x) - g(y))$$

eine abgeschlossene Form definiert. (! Fatou) Der zugehoerige Operator heisst Graphenlaplacoperator (mit Neumann Randbedingung).
(Bew. Die Form ist dicht definiert, da $C_c(V)$ im Definitionsbereich enthalten ist. Offenbar ist die Form symmetsrisch und nichtnegative.
Zur Abgeschlossenheit: Sei $u_n \to u$ in $\ell^2(V)$. Dann gilt $u_n(x) \to u(x)$ in allen $x \in V$. Damit konvergiert $f_n : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x, y) := b(x, y)|u_n(x) - u_n(y)|^2$, also punktweise gegen $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = b(x, y)|u(x) - u(y)|^2$. Nach dem Lemma von Fatou folgt also

$$Q(u) = \sum_{x,y} b(x, y)|u(x)-u(y)|^2 \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{(x,y)\in V \times V} b(x, y)f_n(x, y) = \lim_{n\to\infty} Q(u_n).$$

Das zeigt Eigenschaft (ii) des Satzes.)

Sei nun Q_c die Einschraenkung von Q auf $C_c(V) \times C_c(V)$. Dann ist Q_c abschliessbar (da Q eine abgeschlossene Fortsetzung ist) und der Abschluss von Q_c wird mit Q_0 bezeichnet. Der zugehoerige Operator heisst Graphenlaplaceoperator (mit Dirichlet Randbedingung).

Ende der 4. Vorlesung

Erinnerung - Soboloevraeume. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Seien $f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ lokal integrierbar und $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^d$. Dann heisst g die schwache α-te Ableitung von f, wenn gilt

$$\int_\Omega g\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f\partial^\alpha \varphi dx$$

fuer alle $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$. Der Raum

$$W^{1,2} := \{f \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^2(\Omega), |\alpha| = 1\}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{W^{1,2}}^2 := \sum \|\partial^j f\|^2 + \|f\|^2$$

ist ein Banachraum. (Nachrechnen!) Damit ist dann auch

$$W_0^{1,2} := \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{1,2}}$$

ein Banachraum (da es nach Definition ein vollstaendiger Unterraum eines Banachraum ist).

Beispiel - Neumann Laplace. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann wird durch

$$D(Q_N) := W^{1,2}(\Omega), \;\; Q_N(f,g) := \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx$$

eine abgeschlossene symmetrische nichtnegative Form definiert. Der zugehoerige Operator heisst Neumann Laplace Operator.
Bew. Die Form ist dicht definiert, da $C_c^\infty(\Omega)$ im Definitionsbereich enthalten ist. Offenbar ist die Form symmetrisch und nichtnegativ.
Zur Abgeschlossenheit: Die Form ist abgeschlossen, da $\| \cdot \|_Q$ gerade die Sobolevnorm auf $W^{1,2}$ ist (bzgl. derer $W^{1,2}$ ein Banachraum ist).

Beispiel - Dirichlet Laplace. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Dann wird durch

$$D(Q_D) := W_0^{1,2}(\Omega), \;\; Q_D(f,g) := \int_\Omega \langle \nabla f, \nabla g \rangle dx$$

eine abgeschlossene Form definiert. Der zugehoerige Operator heisst Dirichlet Laplace Operator.
Bew. Es ist $W_0^{1,2}$ nach Definition abgeschlossen.

Bemerkung. (a) In obigen Beispielen ist offenbar Q_N eine Fortsetzung von Q_D. Das bedeutet allerdings (fast) nichts fuer die zugehoerigen Operatoren. Insbesondere ist der Neumann Laplace Operator keine Fortsetzung des Dirichlet Laplace Operator, wenn Q_N und Q_D verschieden sind. (Denn sonst muessten die beiden Operatoren und damit auch die zugehoerigen Formen uebereinstimmen.)
(b) In gewissem Sinne (dessen Praezisierung einige Arbeit macht) besteht der Definitionsbereich des Neumann Laplaceoperator aus Funktionen mit zweiten Ableitungen in L^2 und verschwindender Normalenableitung am Rand und der Definitionsbereich des Dirichlet Laplaceoperator besteht aus Funktionen mit zweiten Ableitungen in L^2 mit verschwindenden Funktionswerten am Rand.

Die beiden vorangehenden Beispiele lassen sich in verschiedene Richtungen verallgemeinern.

Beispiel - Divergenzformoperatoren mit singulaeren Koeffizienten. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen. Sei

$$a : \Omega \longrightarrow \text{Symmetrische nichtnegative } n \times n \text{ Matrizen}$$

messbar mit

$$0 < c \leq a(x) \leq C$$

fuer alle $x \in \Omega$. Dann wird durch

$$Q(f,g) := \int_\Omega \langle a(x)\nabla f(x), \nabla g(x)\rangle dx$$

auf $W^{1,2}$ bzw. $W_0^{1,2}$ abgeschlossene Formen definiert. Die entsprechenden Operatoren werden als Divergenzformoperator der Form

$$\nabla \cdot a\nabla \ \text{ mit Neumann Randbedingungen}$$

und

$$\nabla \cdot a\nabla \ \text{ mit Dirichletrandbedingungen}$$

bezeichnet.
Bew. Nach Voraussetzung an a ist $\|\cdot\|_Q$ aquivalent zur Sobolevnorm. Damit folgt die Abgeschlossenheit. Die uebrigen Aussagen folgen einfach.

Gegenbeispiel. Auch wenn Formen denselben Definitionsbereich haben, kann der Definitionsbereich der zugehoerigen Operatoren sehr verschieden sein. Dazu betrachten wir eine eindimensionalen Spezialfall des vorangehenden Beispiel:
Sei $\Omega = (0,1)$. Sei $a : (0,1) \longrightarrow (0,\infty)$ stueckweise stetig diffbar mit $0 < c \leq a(x) \leq C$. Dann ist

$$D(Q_a^N) = W^{1,2}(0,1)$$

unabhaengig von a. Fuer den zugehoerigen Operator Δ_a^N gilt aber

$$D(\Delta_a^N) = \{f \in W^{1,2}(0,1) : a\partial f \in W^{1,2}(0,1)\}$$
$$\Delta_a^N f = \partial(a\partial f).$$

Beispiel. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$. Sei $j : \Omega \times \Omega \longrightarrow [0,\infty)$ messbar, symmetrisch (i.e. $j(x,y) = j(y,x)$ alle $x,y \in \Omega$) und erfuelle $\int |u(x)-u(y)|^2 j(x,y)d(x,y) < \infty$ fuer alle $u \in C_c^1(\Omega)$. Dann ist die Form

$$D(Q^c) = C_c^1(\Omega),\ Q^c(u,v) := \int (u(x)-u(y))\overline{(v(x)-v(y))}j(x,y)d(x,y)$$

symmetrisch und abschliessbar.
Bew. Die Form ist dicht definiert, da $C_c^1(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$. Da j symmetrisch ist, ist sie symmetrisch. Sie ist abschliessbar, da nach dem ueblichen Fatouargument die Form

$$Q(u) := \int\int |u(x)-u(y)|^2 j(x,y)d(x,y)$$

fuer $u \in L^2(\Omega)$ abgeschlossen ist. (Sei $u_n \to u$. Zu zeigen $Q(u) \leq \liminf Q(u_n)$). Ohne Einschraenkung $\liminf Q(u_n) = \lim Q(u_n)$. Ohne Einschraenkung $u_n \to u$ punktweise fast ueberall...)

Der vorangehende Satz (und sein Beweis) geben keine explizite Beschreibung von H mittels Q. Dazu dient das folgende Theorem. Zunaechst eine Vorbereitung.

Proposition. *($H = H^{1/2}H^{1/2}$) Sei H ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator. Dann gilt*

$$D(H) = \{f \in D(H^{1/2}) : H^{1/2}f \in D(H^{1/2})\}$$

sowie $H = H^{1/2}(H^{1/2}f))$ fuer $f \in D(H)$.

*B*eweis. Sei D' die Menge auf der rechten Seite der Formel. Ohne Einschraenkung koennen wir H als Operator der Multiplikation mit dem nichtnegativen V auf einem Massraum (X, m) auffassen. Damit gehoert ein messbares $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ zu $D(H)$ genau dann wenn gilt

$$\int (1 + V^2)|f|^2 dm < \infty\}.$$

Ein messbares $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ gehoert zu D' genau dann wenn gilt

$$\int (1 + V)|f|^2 dm < \infty$$

und

$$\int V^2|f|^2 dm < \infty.$$

Damit folgt die Behauptung (da $V \leq 1 + V^2$). $\square$

Bemerkung. Fuer beliebige selbstadjungierte H und messbare Φ und Ψ gilt immer $(\Phi \cdot \Psi)(H) = \overline{\Phi(H)\Psi(H)}$. Allerdings gilt im allgemeinen keine Gleichheit ohne den Abschluss. (Betrachte z.b. auf dem Spektrum von H unbeschraenkte Φ und Ψ mit $\Phi\Psi = 0$. Dann ist $\Phi(H)\Psi(H)$ nicht auf dem ganzen Hilbertraum definiert, aber es ist $(\Phi\Psi)(H) = 0$ auf dem ganzen Hilbertraum definiert.)

Ende der 5. Vorlesung

Theorem. *Sei Q eine nichtnegative abgeschlossene Form auf $\mathcal{H}$. Dann gilt fuer den zugehoerigen Operator H*

$$D(H) = \{f \in D(Q) : \textit{es existiert ein } h \in \mathcal{H} \textit{ mit } Q(f,g) = \langle h, g\rangle \textit{ fuer alle } g \in D(Q)\}$$

$$Hf = h.$$

*B*eweis. Wir verwenden die schon bewiesene Formel $H = H^{1/2}H^{1/2}$. Sei D' die Menge auf der rechten Seite der behaupteten Formel fuer $D(H)$.

Fuer alle $f \in D(H)$ und $g \in D(Q) = D(H^{1/2})$ gilt

$$\langle Hf, g\rangle = \langle H^{1/2}H^{1/2}f, g\rangle = \langle H^{1/2}f, H^{1/2}g\rangle = Q(f, g),$$

und es folgt $D(H) \subset D'$. Umgekehrt gilt fuer jedes $f \in D'$ und $g \in D(Q)$

$$\langle h, g\rangle = Q(f, g) = \langle H^{1/2}f, H^{1/2}g\rangle.$$

Damit folgt $H^{1/2}f \in D(H^{1/2})$ und $h = H^{1/2}H^{1/2}f = Hf$. $\square$

Unter Umstaenden hat man nicht eine abgeschlossene Form, sondern einen symmetrischen Operator gegeben. Dann kann man folgenden Satz zur Erzeugung einer abgeschlossenen Form benutzen.

Theorem. *(Friedrichs Fortsetzung) Sei $S : D \longrightarrow \mathcal{H}$ ein symmetrischer Operator (d.h. $\langle Sx, y\rangle = \langle x, Sy\rangle$ fuer alle $x, y \in D$) mit $\langle Sx, x\rangle \geq 0$ fuer alle $x \in D$ und*

$$Q^\sharp : D \times D \longrightarrow \mathbb{C},\ \ Q^\sharp(f, g) = \langle Sf, g\rangle$$

die zugehoerige nichtnegative symmetrische Form. Dann ist $Q^\sharp$ abschliessbar. Der selbsadjungierte Operator, der zum Abschluss von $Q^\sharp$ gehoert, ist eine Fortsetzung von S. Er heisst die Friedrichtsfortsetzung von S.

*B*eweis. Es sind zwei Aussagen zu beweisen, naemlich die Abschliessbarkeit von $Q^\sharp$, und dass der zum Abschluss gehoerige Operator eine Fortsetzung von S ist.

Abschliessbarkeit von $Q^\sharp$: Sei $\mathcal{H}_Q$ der (abstrakte) Abschluss von D bzgl. $\|\cdot\|_Q$ und Q die Fortsetzung von $Q^\sharp$ auf $\mathcal{H}_Q$. Wegen $\|f\| \leq \|f\|_Q$ fuer alle $f \in D$ gibt es eine Kontraktion $A : \mathcal{H}_Q \longrightarrow \mathcal{H}$ mit $Af = f$ fuer alle $f \in D$. Wir zeigen, dass A injektiv ist. (Dann kann man Q auf $\mathcal{H}_Q$ mit einer Form auf dem Teilraum $A\mathcal{H}_Q$ von $\mathcal{H}$ identifizieren. Diese Form ist nach Konstruktion abgeschlossen und eine Fortsetzung von $Q^\sharp$.) Sei $f \in \mathcal{H}_Q$ mit $Af = 0$ gegeben. Dann existieren f_n in D mit $\|f_n - f\|_Q \to 0$ und

$$\|f_n\| = \|Af_n\| \to \|Af\| = \|0\| = 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\langle f, f\rangle_Q &= \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\langle f_m, f_n\rangle_Q \\
&= \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty}\langle f_m, f_n\rangle + \langle Sf_m, f_n\rangle) \\
&= \lim_{m\to\infty}\langle f_m, 0\rangle + \langle Sf_m, 0\rangle \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Damit folgt $f = 0$.

Fortsetzungseigenschaft: Sei H der Operator, der zum Abschluss Q von $Q^\sharp$ gehoert. Fuer $f, g \in D \subset D(Q) = D(H^{1/2})$ gilt

$$\langle H^{1/2}f, H^{1/2}g\rangle = Q(f,g) = Q^\sharp(f,g) = \langle Sf, g\rangle.$$

Nach Definition ist D dicht in $D(Q)$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$ und durch Approximation folgt dann

$$\langle H^{1/2}f, H^{1/2}g\rangle = \langle Sf, g\rangle$$

fuer alle $f \in D$ und $g \in D(Q)$. (Waehle $g_n \in D$ mit $g_n \to g$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Wende auf jedes g_n obige Formel an, bilde Grenzwert...) Damit folgt dann $Sf = H^{1/2}H^{1/2}f = Hf$ fuer alle $f \in D$. $\square$

Bemerkung/Beispiel. Ein symmetrischer Operator kann verschiedene selbstadjungierte Fortsetzungen haben. So hat

$$\Delta : C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$$

sowohl den Dirichlet Laplaceoperator Δ^D als auch den Neumann Laplaceoperator Δ^N als Fortsetzungen. Diese Fortsetzungen sind im allgemeinen **nicht** ineinander enthalten (sonst muessten sie gleich sein), obwohl fuer die entsprechenden Formbereiche gilt $D(Q_D) \subset D(Q_N)$.

Im allgemeinen ist die Summe von selbstadjungierten Operatoren kein selbstadjungierter Operator. Fuer abgeschlossenen Formen ist die Lage besser und das zeigt (einmal mehr) den Nutzen von Formen.

Theorem. *(Summe von Formen) Seien Q_1 und Q_2 abgeschlossene Formen auf $\mathcal{H}$. Dann ist*

$$Q_1 + Q_2 : \mathcal{H} \longrightarrow [0,\infty),\ \ u \mapsto Q_1(u) + Q_2(u),$$

unterhalbstetig. Insbesondere gilt: Ist $D(Q_1) \cap D(Q_2)$ dicht, so gehoert zu $Q_1 + Q_2$ ein eindeutiger selbstadjungierter Operator H mit

$$D(H^{1/2}) = D(Q_1) \cap D(Q_2) = \{u \in \mathcal{H} : Q_1(u) + Q_2(u) < \infty\}$$

und

$$Q_1(u,v) + Q_2(u,v) = \langle H^{1/2}u, H^{1/2}v\rangle.$$

*B*eweis. Die Summe von unterhalbstetigen Funktionen ist wieder unterhalbstetig. (Denn:

$$(f+g)(u) = f(u)+g(u) \leq \liminf_{n\to\infty} f(u_n)+\liminf_{n\to\infty} g(u_n) \leq \liminf_{n\to\infty}(f(u_n)+g(u_n)).$$

Damit ist $Q_1 + Q_2$ auf $D(Q_1) \cap D(Q_2)$ abgeschlossen und die Aussage zum 'Insbesondere' folgt. □

3. Halbgruppen und ihre Erzeuger

In diesem Abschnitt diskutieren wir wie nichtnegative selbstadjungierte Operatoren in einer eins zu eins Beziehung zu gewissen Halbgruppen stehen.

Definition. *(Kontraktionshalbgruppe) Eine Familie $T_t, t \geq 0$, von stetigen auf ganz $\mathcal{H}$ definierten Operatoren heisst Halbgruppe, wenn gilt*

$$T_tT_s = T_{t+s} \ \ (Halbgruppeneigenschaft)$$

fuer alle $t, s \geq 0$. Eine Halbgruppe heisst (stark) stetig, wenn gilt,

$$T_tu \longrightarrow u, t \longrightarrow 0,$$

fuer alle $u \in \mathcal{H}$. Eine Halbgruppe heisst symmetrisch, wenn alle T_t, $t \geq 0$, selbstadjungiert sind. Eine Halbgruppe heisst Kontraktionshalbgruppe, wenn $\|T_t\| \leq 1$ fuer alle $t \geq 0$.

Bemerkungen.

- Ist T_t eine stark stetige Halbgruppe, so gilt $T_0 = I$. Denn:

$$u = \lim_{s\to 0} T_su = \lim_{s\to 0} T_0T_su = T_0 \lim_{s\to 0} T_su = T_0u.$$

- In einer Dimension, geht es gerade um Funktionen $F : \mathbb{R}^{\rightarrow}\mathbb{C}$mit $F(t + s) = F(t)F(s)$. Aus Analysis I wissen, wir dass jede stetige Loesung dieser Funktionalgleichung gerade die Exponentialfunktion sein muss.

Beispiel. Ist $A \geq 0$, so ist $T_t := e^{-tA}$ eine stark stetige, symmetrische Kontraktionshalbgruppe.
Bew. Ohne Eimschraenkung $A = M_f$ mit $f \geq 0$ auf Hilbertraum $L^2(X, m)$. Nun folgen die Aussagen einfach.

Es ist unser Ziel zu zeigen, dass die Kontraktionshalbgruppen im Beispiel die 'einzigen' symmetrischen Kontraktionshalbgruppen sind.

Ende der Vorlesung.

PROPOSITION. *(Generator) Sei T_t, $t \geq 0$, eine stark stetige Halbgruppe auf $\mathcal{H}$. Dann wird durch*

$$D(H) := \{u \in \mathcal{H} : v := \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(T_t u - u) \text{ existiert}\},\ Hu := v$$

ein linearer Operator definiert.

*B*eweis. Es ist nicht schwer zu sehen, dass $D(H)$ ein Unterraum und H linear ist. □

Notation. Der Operator H aus der vorigen Proposition heisst der (infinitesimale) Generator / Erzeuger der Halbgruppe.

Wesentliche Teile der Theorie der Halbgruppen beruhen auf den folgenden drei (algebraischen) Identitaeten.

LEMMA. *(3 Formeln fuer Halbgruppen) Sei T_t, $t \geq 0$, eine stark stetige Halbgruppe mit Generator H. Dann gilt:*

- *(Ableitung der Halbgruppe) Fuer alle $u \in D(H)$ ist $t \mapsto T_t u$ stark differenzierbar mit $HT_t u = T_t H u = \frac{d}{dt} T_t u$.*
- *(Integrierte Form der Ableitung) Fuer alle $u \in \mathcal{H}$ und $\delta \geq 0$ gilt $\int_0^\delta T_s u ds \in D(H)$ und $T_\delta u - u = H \int_0^\delta T_s u ds$.*
- *(Inverse) Sei $\beta \geq 0$ mit $\|T_t\| \leq e^{t\beta}$ fuer alle $t \geq 0$. Dann gilt fuer alle $u \in \mathcal{H}$ und $\alpha > \beta$, dass $u_\alpha := \int_0^\infty e^{-t\alpha} T_t u dt$ zu $D(H)$ gehoert und $(-H + \alpha) u_\alpha = u$ erfuellt.*

*B*eweis. Zum ersten Punkt:

$$\frac{d}{dt} T_t u = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T_{t+h} - T_t) u = \lim_{h \to 0} T_t \frac{1}{h}(T_h - I) u = T_t H f.$$

Im letzten Schritt wird $u \in D(H)$ und die Stetigkeit von T_t genutzt. Die eben gezeigte Existenz des Grenzwert liefert dann auch

$$T_t H u = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T_{t+h} - T_t) u = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(T_h - I)(T_t u).$$

Damit folgt $T_t u \in D(H)$ und $HT_t f = T_t H f$.

Zum zweiten Punkt: Es gilt

$$T_t \int_0^\delta T_s u ds - \int_0^\delta T_s u ds = \int_t^{\delta + t} T_s u ds - \int_0^\delta T_s u ds = \int_\delta^{\delta + t} T_s u ds - \int_0^t T_s u ds.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung (gilt mit ueblichem Beweis auch hier!) gilt aber

$$\frac{1}{t} \int_0^t g(s) ds \to g(0)$$

fuer jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}$. Damit koennen wir nun weiterschliessen:

$$H \int_0^\delta T_s u ds = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left(T_t \int_0^\delta T_s u ds - \int_0^\delta T_s u ds \right) = T_\delta u - u.$$

Hierbei folgt aus der Existenz des Grenzwertes auf der rechten Seite auch, dass das Integral auf der linken Seite zum Definitionsbereich von H gehoert.

Zum dritten Punkt: Das ist in gewisser Weise eine Variante des zweiten Punktes. Beachte, dass die Vorrausetzungen an α und β sicherstellen, dass das u_α definierende Integral existiert.

$$\begin{aligned}
Differenz(t) &:= T_t \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds \\
&= e^{t\alpha} \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds \\
&= (e^{t\alpha} - 1) \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds + \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds \\
&= (e^{t\alpha} - 1) \int_t^\infty e^{-s\alpha} T_s u ds - \int_0^t e^{-s\alpha} T_s u ds.
\end{aligned}$$

Damit folgt aufgrund der starken Stetigkeit

$$H u_\alpha = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} Differenz(t) = \alpha u_\alpha - u.$$

Das beendet den Beweis. □

Theorem. *(Halbgruppen und nichtnegative Operatoren) Sei T_t, $t \geq 0$, eine symmetrische Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger H. Dann ist $-H$ selbstadjungiert und nichtnegativ, und es gilt $T_t = e^{tH}$. Weiterhin ist fuer $u \in D(H)$ die Funktion $w : [0, \infty) \longrightarrow \mathcal{H}$, $t \mapsto T_t u$ die eindeutige Loesung der Gleichung*

$$\frac{d}{dt} w_t = H w_t, \ w_0 = u.$$

Bemerkung. Der Satz hat zwei Aussagen: Zum einen entsprechen sich Halbgruppen und nichtnegative Operatoren. Zum anderen sind Halbgruppen als Loesungen der 'Waermeleitungsgleichung' characterisiert.
*B*eweis. Wir zeigen eine Reihe von Aussagen.

H ist dicht definiert. Nach dem zweiten Punkt des vorigen Lemma ist jedes Element der Form $\int_0^\delta T_s u ds$ im Definitionsbereich von H. Da T stark stetig ist, sind diese Elemente dicht in $\mathcal{H}$.

H ist symmetrisch: Die Selbstadjungiertheit der T_t, $t \geq 0$, liefert leicht, dass H symmetrisch ist.

H ist selbstadjungiert: Da es sich um Kontraktionen handelt, kann der dritte Punkt des vorigen Lemma mit $\beta = 0$ und $\alpha > 0$ angewendet werden und liefert zu jedem $u \in \mathcal{H}$ ein u_α mit

$$(-H + \alpha) u_\alpha = u.$$

Damit ist also $-H + \alpha$ surjektiv. Insgesamt folgt, dass $-H$ selbstadjungiert ist.

(Erinnerung: A symmetrisch und $A + \alpha$ surjektiv fuer ein $\alpha \in \mathbb{R}$ impliziert, dass A selbstadjungiert ist: Zu jedem beliebigen $x \in D(A^*)$ existiert aufgrund der Surjektivitaet ein $u \in D(A)$ mit $(A^* + \alpha)x = (A + \alpha)u$. Damit folgt fuer alle $v \in D(A)$

$$\langle x, (A + \alpha)v \rangle = \langle (A^* + \alpha)x, v \rangle = \langle (A + \alpha)u, v) = \langle u, (A + \alpha)v \rangle.$$

Damit folgt (wieder aufgrund der Surjektivitaet von $A+\alpha$)) $x = u \in D(A)$.
)

$-H \geq 0$: Da T_s fuer alle $s \geq 0$ eine Kontraktion ist, gilt fuer alle $u \in D(H)$

$$\langle -Hu, u\rangle = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(\langle u, u\rangle - \langle T_t u, u\rangle) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}(\langle u, u\rangle - \langle T_{t/2}u, T_{t/2}u\rangle) \geq 0.$$

Wegen $-H \geq 0$, koennen wir nun definieren $S_t := e^{tH}$. Mit Spektralkalkuel sieht man leicht, dass S_t eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger H ist.

Sei $u \in D(H)$. Ist $w : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{H}$ eine Loesung von $\frac{d}{dt}w_t = Hw_t$, $w_0 = u$, so gilt $w_t = T_t u$. (Beachte: Dass w eine Loesung ist, bedeutet insbesondere dass w stark differenzierbat ist mit $w_t \in D(H)$ fuer alle $t \geq 0$.) Der Fall $t = 0$ ist klar. Sei also $t > 0$. Sei fuer $0 \leq s \leq t$

$$F(s) := T_s w_{t-s}.$$

Dann gilt nach Produktregel (Nachrechnen auf die uebliche Art!) und dem im drei Formeln Lemma bewiesenen ersten Punkt

$$\frac{d}{ds}F(s) = (\frac{d}{ds}T_s)w_{t-s} + T_s\frac{d}{ds}w_{t-s} = T_sHw_{t-s} - T_sHw_{t-s} = 0.$$

Damit folgt nach dem HDI also

$$F(s) \equiv constant.$$

Einsetzen von $s = t$ und $s = 0$ liefert dann $T_t u = F(t) = F(0) = w(t)$.

Es gilt $T_t = S_t$ fuer alle $t \geq 0$. Es reicht $T_t u = S_t u$ fuer alle $u \in D(H)$ zu zeigen (da $D(H)$ dicht in $\mathcal{H}$ ist und T_t, S_t stetig). Spektralsatz liefert leicht, dass $w_t = S_t u$ eine Loesung von $\frac{d}{dt}w = Hw$, $w(0) = u$, ist. Damit folgt die gewuenscht Gleichheit von $T_t u$ und $S_t u$ aus dem vorangegangenen Schritt.

Zur letzten Aussage: Wie im drei Formeln Lemma bewiesen ist $t \mapsto T_t u$ eine Loesung von $u_t' = Hu$, $u_0 = u$. Es bleibt die Eindeutigkeit zu beweisen: Das folgt wieder aus der schon bewiesenen Eindeutigkeitsaussage. $\square$

Bemerkungen. (a) Ein sehr aehnlicher Beweis funktioniert auch fuer stark stetige Kontraktionshalbgruppen in Banachraeumem. Das ist als Theorem von Hille / Yoshida bekannt.
(b) Die starkte Stetigkeit kann auch durch schwache Messbarkeit ersetzt werden (die dann die starke Stetigkeit impliziert). Ohne eine 'Glattheitsvoraussetzung' ist die Aussage schon in einer Dimension falsch.

Ende der 6. Vorlesung.

Die bisherigen Betrachtungen zeigen, wie Halbgruppen und nichtnegative Operatoren zusammenhaengen. Wir geben nun noch an, wie man aus einer Halbgruppe die Form des Operators leicht gewinnen kann.

LEMMA. *(Halbgruppe $--{>}$ Form) Sei $T_t, t \geq 0$, eine symmetrische stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger H (d.h. $T_t = e^{tH}$). Sei Q die zugehoerige Form (d.h. Q gehoert zu $-H$!). Sei fuer $t > 0$, Q_t definiert durch*

$$D(Q_t) := \mathcal{H},\ \ Q_t(u,v) := \frac{1}{t}\langle (I - T_t)u, v\rangle.$$

Dann ist Q_t eine nichtnegative Form, es ist $Q_t(u)$ strikt wachsend fuer $t \to 0$ fuer jedes $u \in \mathcal{H}$, und es gilt

$$D(Q) = \{u \in \mathcal{H} : \lim_{t \to 0} Q_t(u,u) < \infty\}$$
$$Q(u,v) = \lim_{t \to 0} Q_t(u,v).$$

*B*eweis. Ohne Einschraenkung sei $\mathcal{H} = L^2(X,m)$ und $-H = M_f$ mit $f \geq 0$. Dann ist

$$Q_t(u,v) = \frac{1}{t} \int (1 - e^{-tf(x)}) u(x) \overline{v(x)} dm(x).$$

Damit folgen die Aussagen einfach. Denn es konvergiert $\frac{1-e^{-at}}{t}$ nichtfallend gegen ae^{-at}. (Nichtfallend: Berechne die Ableitung oder betrachte als Mittel...) (Uebung) □

4. Resolventen

Wie Halbgruppen so stehen auch (gewisse) Resolventen in einer eins zu eins Beziehung zu nichtnegativen Operatoren. Anders als bei Halbgruppen reicht jedoch schon die Kenntnis einer einzelnen Resolvente, um den gesammten Operator festzulegen. Das diskutieren wir in diesem Abschnitt.

DEFINITION. *(Resolvente) Eine Familie G_α, $\alpha > 0$, von auf ganz $\mathcal{H}$ definiereten Operatoren auf $\mathcal{H}$ heisst Resolvente, wenn gilt*

$$G_\alpha - G_\beta = -(\alpha - \beta) G_\alpha G_\beta. \ (\textit{Resolventengleichung})$$

Eine Resolvente heisst stark stetig, wenn gilt $\alpha G_\alpha u \to u$, $\alpha \to \infty$, fuer jedes $u \in \mathcal{H}$. Eine Resolvente heisst symmetrisch, wenn jedes G_α, $\alpha > 0$, selbstadjungiert ist. Eine Resolvente heisst Kontraktion wenn gilt $\|\alpha G_\alpha\| \leq 1$ fuer alle $\alpha > 0$.

Bemerkung. In manchen Zusammenhaengen ist es sinnvoll den Operator αG_α als das primaere Objekt aufzufassen (und nicht G_α).

Folgerung (a) Resolventengleichung impliziert $G_\alpha G_\beta = G_\beta G_\alpha$, sowie $Range(G_\beta) \subset Range(G_\alpha)$, also $Range(G_\alpha) = Range(G_\beta)$ fuer alle $\alpha, \beta > 0$.
(b) Resolventengleichung impliziert fuer Kontraktionen insbesondere $G_\alpha u \to G_\beta u$ fuer $\alpha \to \beta$.

Notation. Wir betrachten ausschliesslich Resolventen, die symmetrisch und Kontraktionen sind. Daher wird das nicht immer erwaehnt.

Beispiel. Sei $H \geq 0$. Dann ist $G_\alpha := (H + \alpha)^{-1}$ eine symmetrische stark stetige Kontraktionsresolvente.
Bew. Ohne Einschraenkung ist $H = M_f$ mit $f \geq 0$ auf $L^2(X,m)$. Nun folgen die Aussagen einfach.

Wir wollen zeigen, dass die im Beispiel gegebenen die 'einzigen' Resolventen sind.

PROPOSITION. *(Erzeuger einer Resolvente) Sei G_α, $\alpha > 0$, eine stark stetige Resolvente. Dann ist G_α invertierbar fuer alle $\alpha > 0$ und der Operator H mit*

$$D(H) = Range(G_\alpha) \ \ Hu = -G_\alpha^{-1} u + \alpha u$$

haengt nicht von $\alpha > 0$ ab.

*B*eweis. G_α ist injektiv: Sei $G_\alpha u = 0$. Dann folgt aus der Resolventengleichung, dass $G_\beta u = 0$ fuer alle $\beta > 0$. Damit folgt aus der starken Stetigkeit, dass $u = \lim \alpha G_\alpha u = 0$.

Nach der Resolventengleichung haengt $Range(G_\alpha)$ nicht von $\alpha > 0$ ab. Ebenso folgt aus der Resolventengleichung, dass H nicht von $\alpha > 0$ abhaengt. $\square$

THEOREM. *(Erzeuger einer Resolvente) Sei G_α, $\alpha > 0$, eine stark stetige symmetrische Kontraktions Resolvente und H der zugehoerige Erzeuger. Dann ist $-H$ ein nichtnegativer selbstadjungierter Operator und es gilt $G_\alpha = (-H + \alpha)^{-1}$.*

*B*eweis. *H ist selbstadjungiert.*
Da G_α symmetrisch und auf dem ganzen Raum definiert ist, ist sein Inverser ein selbstadjungierter Operator und das gilt dann auch fuer $H = -G_\alpha^{-1} + \alpha$.
(Erinnerung: G_α symmetrisch impliziert H symmetrisch. Da $H - \alpha$ surjektiv ist folgt H selbstadjungiert. s.o. fuer aehnlichen Schluss.)

H ist nichtnegativ. Die Funktion $f(\alpha) := \langle u, G_\alpha u\rangle$ erfuellt nach der Resolventengleichung

$$f'(\alpha) = \lim_{\beta\to\alpha} \frac{1}{\beta - \alpha}\langle (G_\beta - G_\alpha)u, u\rangle = -\langle G_\alpha u, G_\alpha u) \leq 0$$

sowie (nach der starkten Stetigkeit) $f(\alpha) \to 0$, $\alpha \to \infty$. Damit gilt also $f(\alpha) \geq 0$. fuer alle $\alpha \geq 0$. Das liefert dann also

$$\langle -Hu, u\rangle = \lim_{\alpha\to 0}\langle (-H + \alpha)u, u\rangle = \lim_{\alpha}\langle v_\alpha, G_\alpha v_\alpha\rangle \geq 0$$

mit $v_\alpha = (H + \alpha)u$.
$G_\alpha = (-H + \alpha)^{-1}$. Nach Definition gilt $-H + \alpha = G_\alpha^{-1}$. Damit folgt die Aussage durch Bilden des Inversen. $\square$

THEOREM. *(Charakterisierung der Resolvente als Minimierer) Sei $H \geq 0$ in $\mathcal{H}$ und Q die zugehoerige Form. Seien $\alpha > 0$ und $u \in \mathcal{H}$ beliebig. Sei das Funktional ψ definiert durch*

$$\psi : D(Q) \longrightarrow [0, \infty), \psi(v) = Q(v) + \alpha\|v - \frac{u}{\alpha}\|^2.$$

Dann gilt

$$\psi(v) = \psi(H + \alpha)^{-1}u) + Q((H + \alpha)^{-1}u - v) + \alpha\|(H + \alpha)^{-1}u - v\|^2.$$

Insbesondere ist $(H + \alpha)^{-1}u$ der eindeutige Minimierer des Funktionals ψ.

*B*eweis. Es reicht die Formel fuer ψ zu beweisen. Sei $G_\alpha := (A + \alpha)^{-1}$ und

$$Q_\alpha(u, v) := Q(u, v) + \alpha\langle u, v\rangle.$$

Dann ist die rechte Seite A der behaupteten Formel gerade gegeben durch

$$A = \psi(G_\alpha u) + Q_\alpha(G_\alpha u - v).$$

Es gilt (offenbar)

$$Q_\alpha(G_\alpha u, v) = \langle u, v\rangle(*)$$

und damit auch

$$Q_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) = \langle u, G_\alpha u\rangle (**)$$

sowie (direkte Rechnung)

$$\psi(v) = Q_\alpha(v) - \langle v, u\rangle - \langle u, v\rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 . (***)$$

Damit koennen wir nun die beiden Terme in A berechnen.
Es folgt mit $(***)$ und $(**)$

$$\begin{aligned}\psi(G_\alpha u) &= Q_\alpha(G_\alpha u) - \langle G_\alpha u, u\rangle - \langle u, G_\alpha u\rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 \\ &= \langle u, G_\alpha u\rangle - \langle G_\alpha u, u\rangle - \langle u, G_\alpha u\rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 \\ &= -\langle G_\alpha, u\rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2\end{aligned}$$

sowie mit $(**)$

$$\begin{aligned}Q_\alpha(G_\alpha u - v) &= Q_\alpha(G_\alpha u, G_\alpha u) - Q_\alpha(G_\alpha u, v) - Q_\alpha(v, G_\alpha) + Q_\alpha(v) \\ &= \langle u, G_\alpha u\rangle - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + Q_\alpha(v).\end{aligned}$$

Damit koennen wir nun den gesuchten Ausdruck

$$A = \psi(G_\alpha u) + Q_\alpha(G_\alpha u - v)$$

berechnen und erhalten

$$A = Q_\alpha(v) - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \frac{1}{\alpha}\|u\|^2 = \psi(v).$$

Dabei haben wir $(***)$ in der letzten Gleichung benutzt. □

Ende der 7. Vorlesung.

Geometrische Deutung. Sei $u \in \mathcal{H}$ gegeben. Es ist $v = G_\alpha u$ equivalent zu $(H+\alpha)v = u$, was wiederum aequivalent ist zu $v \in D(Q)$ mit $Q_\alpha(v, w) = \langle (u, w)\rangle$ fuer alle $w \in D(Q)$. Das laesst sich aber auch schreiben als

$$Q(v, w) + \alpha\langle v - \frac{1}{\alpha}u, w\rangle = 0 \text{ fuer alle } w \in D(Q).$$

Fuehren wir nun (Trick !) auf $D(Q) \times D(Q)$ das Skalarprodukt

$$\langle (a, b), (c, d)\rangle^* := Q(a, c) + \alpha\langle b, d\rangle$$

ein, so gilt also $v = G_\alpha u$ genau dann wenn

$$(v, v - \frac{1}{\alpha}u) = (v, v) - (0, 1/\alpha u) \perp U,$$

wobei U der Unterraum $U := \{(w, w) : w \in D(Q)\}$ ist. Wegen $(v, v) \in U$ handelt es sich dabei aber um das Problem (Zeichnung !) das bzgl $\|\cdot\|^*$ kleinste Element von $(0, 1/\alpha u) + U$ zu finden.

Bemerkung. Variationsrechnung.
Bemerkungen. (a) Fuer $\alpha = 1$ erhaelt man $v = (H+1)^{-1} \Longleftrightarrow v$ minimiert $\psi(v) = Q(v) + \|v - u\|^2$.
(b) Es gilt $Q_\alpha((H+\alpha)^{-1}u, v) = \langle u, v\rangle$. Mit $J : (D(Q), Q_\alpha) \longrightarrow \mathcal{H}$ folgt dann also

$$\langle f, Jg\rangle = Q_\alpha(J^* f, g)$$

fuer alle $f \in \mathcal{H}$ und $g \in D(Q)$.

Auch mittels der Resolventen laesst sich die Form darstellen.

LEMMA. *(Resolvente $--$ > Form) Sei G_α, $\alpha > 0$, symmetrische Kontraktionsresolvente mit Erzeuger H. Sei Q die zu $-H$ gehoerige Form. Auf $\mathcal{H}$ sei fuer $\beta > 0$ die Form Q^β definiert durch*

$$Q^\beta(u,v) := \beta\langle u - \beta G_\beta u, v\rangle.$$

Dann ist $Q^\beta(u)$ fuer jedes u nicht fallend fuer $\beta \to \infty$ und es gilt

$$D(Q) = \{u \in \mathcal{H} : \lim_{\beta\to\infty} Q^\beta(u) < \infty\}$$

sowie

$$Q(u,v) = \lim_{\beta\to\infty} Q^\beta(u,v).$$

*B*eweis. Ohne Einschraenkung sei $\mathcal{H} = L^2(X,m)$ und $-H = M_f$ mit $f \geq 0$. Dann ist

$$Q^\beta(u,v) = \int \beta(1 - \frac{\beta}{\beta + f(x)})u(x)\overline{v(x)}dm(x).$$

Mit

$$\beta(1 - \frac{\beta}{f+\beta}) = \frac{f}{1 + \frac{f}{\beta}}$$

folgen die Aussagen einfach. (Uebung) □

5. Der magische Tetraeder oder, wie alles zusammenhaengt

In diesem Abschnitt buendeln wir unsere Kenntnisse ueber nichtnegative Operatoren, nichtnegative Formen, Halbgruppen und Resolventen. Die grundsaetzliche Philosophie ist, dass diese Objekte alle aequivalent sind und fuer den taeglichen Gebrauch folgendes gilt:

- Formen sind einfacher als Operatoren (Ihr Definitionsbereich ist groesser und meist explizit bekannt im Unterschied zum Definitionsbereich des Operators).
- Halbgruppen und Resolventen sind einfacher als Formen (Beschraenkte Operatoren. Definitionsbereich ist noch groesser.)
- Halbgruppen und Resolventen sind im wesentlichen 'gleich einfach'. Allerdings haben Resolventen den Vorteil, dass man nur eine kennen muss, um den Operator zu gewinnen.

THEOREM. *(T_t $--$ > G_α) Sei T_t eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe mit Erzeuger $-H$ (d.h. $T_t = e^{-tH}$, $H \geq 0$.) Dann gilt fuer alle $\alpha > 0$*

$$(H+\alpha)^{-1} = \int_0^\infty e^{-t\alpha}e^{-tH}dt.$$

*B*eweis. Zu zeigen

$$\langle (H+\alpha)^{-1}f, f\rangle = \int_0^\infty e^{-t\alpha}\langle e^{-tH}f, f\rangle dt.$$

Nach Spektralkalkuel gibt es zu jedem $f \in \mathcal{H}$ ein Mass μ_f auf $[0,\infty)$ mit

$$\int_0^\infty F(s)d\mu_f(s) = \langle F(H)f, f\rangle.$$

Damit erhaelt man

$$\begin{aligned} RS &= \int_0^\infty e^{-t\alpha} \int_0^\infty e^{-ts} d\mu_f(s) dt \\ Fubini &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t(\alpha+s)} dt d\mu_f(s) \\ (Ausrechnen) &= \int_0^\infty \frac{1}{\alpha+s} d\mu_f(s) \\ &= \langle (H+\alpha)^{-1} f, f\rangle. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM. *($G_\alpha - - > T_t$) Sei $H \geq 0$ und $G_\alpha = (H+\alpha)^{-1}$ fuer $\alpha > 0$. Dann gilt*

$$e^{-tH} f = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{t}^n G^n_{\frac{n}{t}} f.$$

Beweis. Setze $R_n := \frac{n}{t}^n G^n_{\frac{n}{t}} f$. Wir betrachten die Differenz und nuezten Spektralkalkuel. Das fuehrt auf

$$D_n := \|e^{-tH} f - R_n\|^2 = \int_0^\infty \left| e^{-ts} - \frac{n}{t}^n \frac{1}{\frac{n}{t}+s}\right|^2 d\mu_f(s).$$

Mit $\left(\frac{\frac{n}{t}}{\frac{n}{t}+s}\right)^n = (1+\frac{ts}{n})^{-n}$ vereinfacht sich dies zu

$$D_n = \int_0^\infty |e^{-ts} - (1+\frac{ts}{n}^{-n}|^2 d\mu_f(s).$$

Der Integrand geht dabei punktweise gegen 0 (Analysis I) und ist beschraenkt durch $1+1=2$. Damit folgt nach dem Satz von Lebesgue $D_n \to 0$, $n \to \infty$. □

Bemerkung. Im allgemeinen hat man keine gleichmaessige Konvergenz der Integranden bzgl. der supremum norm. Daher liefert die Aussage des Theorem nur eine starke Konvergenz der Resolventen und keine Normkonvergenz.

Zusammenfassung $H \geq 0$. Tetraeder malen.

(1) $Q \to H$: $D(H) = \{f \in D(Q) : ex.\ g \in \mathcal{H}\ Q(f,g) = \langle g,h\rangle\ fueralle\ h \in D(Q)\}$. $Hf = g$.
$H \to Q$: $D(Q) = D(H^{1/2})$, $Q(f,g) = \langle H^{1/2} f, H^{1/2} g\rangle$.

(2) $H \to T$: $T_t := e^{-tH}$.
$T \to H$: $D(H) = \{f \in \mathcal{H} : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t - I)f\ ex.\}$. $Hf = -\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_t - I)f$.

(3) $H \to G$: $G_\alpha = (H+\alpha)^{-1}$.
$G \to H$: $H = G_\alpha^{-1} - \alpha$.

(4) $T \to G$: $G_\alpha = \int_0^\infty e^{-t\alpha} T_t dt$.
$G \to T$: $T_t = s - \lim_{n\to\infty} (\frac{n}{t} G_{\frac{n}{t}})^n$.

(5) $T \to Q$: $D(Q) = \{u : \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle (I - T_t)u, u\rangle < \infty\}$, $Q(u,v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\langle (I - T_t)u, v\rangle$.
$Q \to T$: ??????

(6) $G \to Q$: $D(Q) = \{u : \lim_{\beta\to\infty} \beta\langle u - \beta G_\beta u, u\rangle < \infty\}$, $Q(u,v) = \lim_{\beta\to\infty} \beta\langle u - \beta G_\beta u, v\rangle$.
$Q \to G$: $G_\alpha f = u$ ist eindeutiges Element mit $Q_\alpha(u,v) = \langle f, v\rangle$ fuer alle $v \in D(Q)$.

Bemerkung. Gilt $H \geq c > 0$, so existiert G_α fuer alle $\alpha > -c$. Entsprechend bleiben Resolventenformeln und Berechnung der Resolvente mittels $e^{-t\alpha}$ gueltig. (Ersetzte z.B. H durch $H - c$ in den obigen Formeln etc.)

KAPITEL 2

Markovhalbgruppen und Dirichletformen

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, dass ein Massraum (X, B, m) gegegen ist. Wir betrachten dann

$$\mathcal{H} := L^2(X, m).$$

Damit gibt es einen Begriff von positiven Funktionen. Es wird um Operatoren gehen, die mit positivitaet von Funktionen gut vertraeglich sind. Dabei handelt es sich um ein reelles Phaenomen. Entsprechend wird auch der Raum

$$L^2_{\mathbb{R}} := L^2_{\mathbb{R}}(X, m) := \{f \in L^2(X, m) : \Im f = 0\}$$

eine Rolle spielen.

1. Reelle Operatoren

Dirichletformen leben in gewisser Weise auf reellen Hilbertraumen. Tatsaechlich werden sie auch oft nur fuer solche Raeume definiert. Bei Betrachtung von komplexen Hilbertraeumen spielt dann eine zusaetzliches Erforderniss eine Rolle. Darum geht es in diesem Abschnitt.

Definition. *Ein Operator H auf $\mathcal{H}$ heisst reell, wenn gilt*

- $\overline{D(H)} \subset D(H)$ *also* $\overline{D(H)} = D(H)$.
- $H\overline{f} = \overline{Hf}$.

Eine Form Q heisst reell, wenn gilt

- $\overline{D(Q)} \subset D(Q)$ *also* $\overline{D(Q)} = D(Q)$.
- $Q(f, g) \in \mathbb{R}$ *fuer alle* $f, g \in L^2_{\mathbb{R}}$.

Bemerkung. Sind T, S beschraenkt und reell, so ist auch TS beschraenkt und reell.

Proposition. *Sei $H \geq 0$ und Q die zugehoerige Form. Dann sind aequivalent:*

(i) *H reell.*
(i') $H\Re f = \Re Hf$
(ii) *Q reell.*
(iii) $(H + \alpha)^{-1}$ *reell fuer alle* $\alpha > 0$.
(iv) e^{-tH} *reell fuer alle* $t > 0$.

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (i') ist klar.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Sei $u \in D(Q)$ beliebig. Dann existiert eine Folge (u_n) in $D(H)$ mit $u_n \to u$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Insbesondere ist (u_n) also eine Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$ und konvergiert in L^2 gegen u. Da H reell ist gilt (kleine Rechunung)

$$\|u_n-u_m\|_Q^2 = \langle H(u_n-u_m),(u_n-u_m)\rangle+\|u_n-u_m\|^2 = \|\Re(u_n-u_m)\|_Q^2+\|\Im(u_n-u_m)\|_Q^2.$$

Damit sind dann $(\Re u_n)$, und $(\Im u_n)$ Cauchy Folgen bzgl. $\|\cdot\|_Q$ und haben daher einen Grenzwert in $D(Q)$ (Form ist abgeschlossen). Da sie in L^2 konvergieren, folgt also Konvergenz von $\Re u_n$ gegen $\Re u$ und $(\Im u_n)$ gegen $\Im u$ bgzl. $D(Q)$. Damit folgt (ii).

Ende Vorlesung

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Sei $f \in D(H)$. Dann gilt also $f \in D(Q)$ und damit nach (ii) und einer kurzen Rechnung fuer alle $g \in L^2_{\mathbb{R}} \cap D(Q)$

$$Q(\overline{f},g) = \overline{Q(f,g)} = \overline{\langle Hf,g\rangle} = \langle \overline{Hf},g\rangle.$$

Damit gilt dann

$$Q(\overline{f},g) = \langle \overline{Hf},g\rangle$$

fuer alle $g \in D(Q)$ und es folgt $\overline{f} \in D(H)$ mit $H\overline{f} = \overline{Hf}$.

$(i) \Longrightarrow (iii)$: Sei $v := (H+\alpha)^{-1}u$. Dann gilt also $u = (H+\alpha)v$ und damit

$$\overline{u} = \overline{(H+\alpha)v} = (H+\alpha)\overline{v}.$$

Das liefert (iii) nach Anwenden von $(H+\alpha)^{-1}$ auf beiden Seiten.

$(iii) \Longrightarrow (iv)$: Das folgt aus $e^{-tH}f = \lim_{n\to\infty}(\frac{t}{n}(H+\frac{n}{t})^{-n}$.

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Das folgt, da H die 'Ableitung' von e^{-tH} ist:

$$\overline{Hf} = \lim_{t\to 0}\overline{\frac{1}{t}(I-T_t)f} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(I-T_t)\overline{f} = H\overline{f}.$$

Hier verwendet man (iv) in der vorletzten Gleichung. In der letzte Gleichung nutzt man die Existenz des Grenzwertes um $\overline{f} \in D(H)$ zu erhalten. □

Wir untersuchen noch naeher, wann Q reell ist.

Proposition. *(Charaktersierungen reeller Formen). Sei $Q \geq 0$ mit $D(Q) = \overline{D(Q)}$ und Q reell gegeben. Dann gilt:*

(a) $Q(\overline{u},\overline{v}) = \overline{Q(u,v)}$ *fuer beliebige* $u,v \in D(Q)$.
(b) $Q(\overline{u},\overline{u}) = Q(u,u)$ *fuer beliebige* $u \in D(Q)$.
(c) $Q(u+iv) = Q(u)+Q(v)$ *fuer reelle* u,v.

*B*eweis. (a) Zerlegen in Real und Imaginaerteil und Nachrechnen.
(b) Folgt sofort aus (a) da $Q(u,u)$ reell ist.
(c) Das folgt aus der Definition reeller Formen.

□

Beachte. Ist Q reell, so ist die Komplexe Konjugtion also eine Isometrie auf $D(Q)$ mit $\|\cdot\|_Q$.

2. Das erste Beurling/Deny Kriterium und die Kato Ungleichung

In diesem Abschnitt charakterisieren wir Formen von positivitaetserhaltenden Operatoren.

Definition. *(Positivitaetserhaltend) Ein beschraenkter Operator auf $\mathcal{H}$ heistt positivitaetserhaltend, p.e., wenn aus $f \geq 0$ folgt $Tf \geq 0$.*

Notation. Fuer reellwertige f definieren wir $f_+ := \max\{f, 0\}$ und $f_- := -\min\{f, 0\}$. **Zeichnung.**. Dann gilt also $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

LEMMA. *(Nuetzliches zu p.e. Operatoren) Seien T, S, T_n beschraenkte Operatoren auf $\mathcal{H} = L^2(X, m)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist T p.e. genau dann wenn gilt $|Tf| \leq T|f|$ fuer alle $f \in \mathcal{H}$.*
(b) *Ist T p.e. so ist T auch reell.*
(c) *Sind T, S beschraenkte p.e. Operatoren, so ist auch TS ein beschraenkter p.e. Operator.*
(d) *Sind T_n p.e. und konvergiert T_n stark gegen T, so ist auch T p.e.*

*B*eweis. $\Longleftarrow$: Sei $f \geq 0$. Dann gilt $f = |f|$ und damit $Tf = T|f| \geq |Tf| \geq 0$.

$\Longrightarrow$: Es reicht Funktionen der Form

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{C}$ und $A_j \subset X$ messbar und paarweise disjunkt zu betrachten (da diese Funktionen dicht in $\mathcal{H}$ sind). Fuer ein solches f gilt

$$\begin{aligned} |Tf| &= |\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T 1_{A_j}| \\ (\textit{Dreiecksugl.}) \quad &\leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j||T1_{A_j}| \\ (T \textit{ p.e.}) \quad &= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| T 1_{A_j} \\ &= T(\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| 1_{A_j}) \\ &= T|f|. \end{aligned}$$

Hier wird in der letzten Gleichung genutzt, dass die A_j paarweise disjunkt sind.

(b) $f \in L?^2_{\mathbb{R}}$ kann man zerlegen in $f_+ - f_-$ mit $f_+, f_- \geq 0$. Dann gilt $Tf = Tf_+ - Tf_-$.

(c) Einfach.

(d) Einfach. $\square$

THEOREM. *(Erstes Beurling/Deny Kriterium) Sei $H \geq 0$ auf $L^2(X, m)$ und Q die assoziierte Form. Dann sind aequivalent:*

(i) *Fuer alle $u \in L^2(X, m)$ gilt $Q(|u|) \leq Q(u)$. (Hier ist der Wert ∞ erlaubt.)*
(i') *Es ist Q reell mit $Q(u_+ + u_-) \leq Q(u)$ fuer alle $u \in L^2_{\mathbb{R}}$.*
(i'') *Es ist Q reell mit $Q(u_+) \leq Q(u)$ fuer alle $u \in L^2_{\mathbb{R}}$.*
(ii) *Es ist $(H + \alpha)^{-1}$ p.e. fuer jedes $\alpha > 0$.*
(iii) *Es ist e^{-tH} p.e. fuer jedes $t \geq 0$.*

Beweis. Sei $Q_\alpha(f) := Q(f) + \alpha\|f\|^2$. Wir zeigen zunaechst die Aequivalenz von $(i), (ii)$ und (iii).

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Sei $u \in L^2(X,m)$ mit $u \geq 0$ gegeben. Sei $w := (H+\alpha)^{-1}u$. Zu zeigen: $|w| - w = 0$.
Fuer $\varphi \in D(H)$ und $\psi \in L^2(X,m)$ gilt

$$Q_\alpha(\varphi + \psi) = Q_\alpha(\varphi) + Q_\alpha(\psi) + 2\Re\langle (H+\alpha)\varphi, \psi\rangle.$$

Wendet man dies an auf $\varphi = w$ und $\psi = v$ mit $\Re v \geq 0$ so erhaelt man

$$Q_\alpha(w+v) = Q_\alpha(w) + Q_\alpha(v) + 2\Re\langle u, v\rangle \geq Q_\alpha(w) + Q_\alpha(v).$$

Damit folgt $(*)$:

$(*)$ $Q_\alpha(w+v) \geq Q_\alpha(w)$ fue alle v mit $\Re v \geq 0$ und Gleichheit gilt genau dann wenn $v = 0$.

Sei nun $v = |w| - w$. Dann gilt $\Re v \geq 0$ sowie

$$Q_\alpha(w) \overset{(*)}{\leq} Q_\alpha(w+v) = Q_\alpha(|w|) \overset{(i)}{\leq} Q_\alpha(w).$$

Mit $(*)$ folgt dann $v = 0$ und damit $w = |w| \geq 0$.

$(ii) \Longrightarrow (iii)$: Sei $f \geq 0$. Nach (ii) gilt dann

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \left(\frac{t}{n}(H + \frac{n}{t}\right)^{-n} f = e^{-tH} f.$$

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Sei $u \in D(Q)$ beliebig. (Fuer $u \notin D(Q)$ ist die Aussage (i) sowieso wahr.) Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\langle \frac{1}{t}(1 - e^{-tH})|u|, |u|\rangle &= \frac{1}{t}\left(\|u\|^2 - \int_X e^{-tH}|u| \cdot |u| dm\right)\\
(iii) \quad &\leq \frac{1}{t}\left(\|u\|^2 - \int_X |e^{-tH}u| \cdot |u| dm\right)\\
(e^{-tH} \geq 0) \quad &\leq \frac{1}{t}\left(\|u\|^2 - \int_X e^{-tH}u \cdot \overline{u} dm\right)\\
&= \frac{1}{t}(1 - e^{-tH})u, u\rangle.
\end{aligned}$$

Bildet man nun den Grenzwert $t \to 0$ so folgt

$$Q(|u|) \leq Q(u).$$

$(i) \Longrightarrow (i')$: Aufgrund von $(i) \Longrightarrow (iii)$ ist e^{-tH} p.e.. Insbesondere ist e^{-tH} reell. Damit ist auch Q reell. Weiterhin ist fuer $u \in L^2_{\mathbb{R}}$ offenbar $|u| = u_+ + u_-$ und aus (i) folgt damit die gewuenschte Abschaetzung.

$(i') \Longrightarrow (i'')$: Fuer $u \in L^2_{\mathbb{R}}$ gilt

$$Q(u_+ + u_-) = Q(u_+) + Q(u_-) + 2Q(u_+, u_-)$$

sowie

$$Q(u_+ - u_-) = Q(u_+) + Q(u_-) - 2Q(u_+, u_-).$$

Damit impliziert die Ungleichung in (i') also

$$Q(u_+, u_-) \le 0.$$

Also folgt

$$Q(u) = Q(u_+ - u_-) = Q(u_+) + Q(u_-) - 2Q(u_+, u_-) \ge Q(u_+).$$

$(i'') \Longrightarrow (ii)$ (Wir wissen schon, dass (i) equivalent zu (ii) ist.): Der Beweis ist eine Variante von $(i) \Longrightarrow (ii)$. Sei also $u \ge 0$ und $w := (H+\alpha)^{-1}u$. Da Q reell ist, ist H reell und damit w eine reelle Funktion. Insbesondere existiert w_+ und $v := w_+ - w = w_-$ erfuellt $\Re v = v \ge 0$. Wir koennen also (*) anwenden und erhalten

$$Q_\alpha(w) \overset{(*)}{\le} Q_\alpha(w+v) = Q(w_+) \overset{(i'')}{\le} Q_\alpha(w).$$

Damit folgt wieder mit $(*)$, dass $v = 0$ also $w = w_+ \ge 0$. □

Ende der Vorlesung.

Wir kommen nun zu einer ersten Folgerung aus dem Satz.

(Erinnerung: Die Funktion sgn : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ ist definiert durch $\mathrm{sgn} z := \frac{\overline{z}}{|z|}$ fuer $z \neq 0$ und $\mathrm{sgn} z = 0$ fuer $z = 0$.)

THEOREM. *(Kato Ungleichung) Sei $H \ge 0$ und Q die assoziierte Form. Es gelte eine der Bedingungen des vorigen Theorem. Dann gilt fuer alle $f \in D(H)$ und alle $u \in D(Q)$ mit $u \ge 0$*

$$Q(|f|, u) \le \langle \Re(sgn(f) Hf), u\rangle = \Re\langle sgn f Hf, u\rangle.$$

Bemerkungen.

- Die Ungleichung kann man fuer reelle f (manchmal) als die Aussage

$$H|f| \le \mathrm{sgn} f Lf$$

im Sinne von Distributionen interpretieren. Allerdings wird im allgemeinen $|f|$ nicht in $D(H)$ sein auch wenn $f \in D(H)$ wie folgendes Beispiel zeigt: Δ auf $\mathbb{R}^n$, $Q(u,v) = \int \nabla u \nabla v dx$. Beispiel auf $\mathbb{R}$: $f = id$. Dann $|f| = |\cdot|$. $\Delta|f| = 2\delta_0$, $\Delta f = 0$.
- Ohne den Realteil hat die Ungleichung im allgmeinen keinen Sinn, da $\overline{f} Hf$ nicht notwendig reell ist. Beispiel: Diskreter Laplace on $\mathbb{Z}$

$$Hf(x) = 2f(x) - f(x-1) - f(x+1)$$

und $f = \delta_0 + i\delta_1$. Dann ist $\overline{f(0) Hf(0)} \notin \mathbb{R}$.
- Die Gueltigkeit der Ungleichung des Theorems ist tatsaechlich aequivalent zu den Bedingungen im ersten Beurling / Deny Kriterium. Setze dazu $u = |f|$ fuer $f \in D(H)$. Dann liefert die Kato Ungleichung

$$Q(|f|) \le \Re\langle \mathrm{sgn} f Hf, |f|\rangle = \Re\langle Hf, f\rangle = Q(f).$$

Ist nun $f \in D(Q)$ beliebig, so koennen wir eine Folge (f_n) in $D(H)$ waehlen, die im Sinne von $\|\cdot\|_Q$ gegen f konvergiert. Aufgrund der Abgeschlossenheit / Unterhalbstetigkeit der Form gilt dann

$$Q(|f|) \le \liminf Q(|f_n|) \le \liminf Q(f_n) = Q(f).$$

*B*eweis. Wir schreiben $\frac{\overline{f}}{|f|}$ statt sgn$f$. An den Stellen x mit $f(x) = 0$ werden die noetigen Ungleichungen sowieso offensichtlich sein an den anderen Stellen koennen wir diese Ersetzung anwenden.
Wir beginnen mit einer kleinen Rechnung:

$$(*)\ \Re\frac{\overline{f}}{|f|}e^{-tH}f \le \left|\frac{\overline{f}}{|f|}e^{-tH}f\right| \le |e^{-tH}f| \le e^{-tH}|f|.$$

Letzter Schritt: e^{-tH} ist p.p.
Wir setzten nun unsere Betrachtungen mit einer kleinen Rechnung fort:

$$\begin{array}{rcl} Q(|f|,u) & = & \lim\limits_{t\to 0}\langle\frac{1}{t}(1-e^{-tH})|f|,u\rangle \\ & = & \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\langle|f|,u\rangle - \langle e^{-tH}|f|,u\rangle\right) \\ & = & \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\langle|f|,u\rangle - \langle e^{-tH})|f|,u\rangle\right) \\ (*) & \le & \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\langle|f|,u\rangle - \Re\langle\frac{\overline{f}}{|f|}e^{-tH}f,u\rangle\right) \\ & = & \lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\langle\Re(\frac{\overline{f}}{|f|}(f-e^{-tH}f)),u\rangle\right) \\ (f\in D(H)) & = & \langle\Re(\frac{\overline{f}}{|f|}Hf),u\rangle. \end{array}$$

Das beendet den Beweis. □

3. Das zweite Beurling/Deny Kriterium, Dirichletformen und Submarkovsche Halbgruppen

In diesem Abschnitt fuehren wir Dirichlet Formen ein.

Definition. *Eine Abbildung $\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst normale Kontraktion, wenn fuer alle $z, z* \in \mathbb{C}$ gilt:*

- $|\gamma(z) - \gamma(z^*)| \le |z - z^*|$.
- $|\gamma(z)| \le |z|$ *fuer alle* $z \in \mathbb{C}$. *(Bei Gueltigkeit der ersten Bedingung aequivaelten zu $\gamma(0) = 0$.)*

Beispiele. (mit Zeichnung auf $\mathbb{R}$). $\gamma(z) = |z|$.
$\gamma(z) = \Re z \wedge 1$. (*wedge* heisst Minimum.)
Fuer $I = [0,1]$ $\gamma(z) = \gamma_I(z) =$ der zu z naechste Punkt von I.

Theorem. *(Zweites Beurling / Deny Kriterium) Sei $H \ge 0$, Q die zughoerige Form und e^{-tH}. Dann sind aequivalent:*

(i) *Die Halbgruppe ist positivitaetserhaltend und kontrahierend auf L^p (d.h. es gilt $\|e^{-tH}f\|_p \le \|f\|_p$ fuer alle $f \in L^2 \cap L^p$und alle $t \ge 0$) fuer jedes $p \in [1,\infty]$.*
(ii) *Die Halbgruppe ist positivitaetserhaltend und kontrahierend auf L^∞.*
(ii') *Es gilt $0 \le e^{-tH}f \le 1$ fuer alle $f \in L^2$ mit $0 \le f \le 1$.*
(iii) *Halbgruppe ist positivitaetserhaltend und kontrahierend auf L^1.*

(iv) *Die Resolvente ist positivitaetserhaltend und kontrahierend auf* L^p *(d.h. es gilt* $\|(H+\alpha)^{-1}f\|_p \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_p$ *fuer alle* $f \in L^2 \cap L^p$ *und alle* $\alpha > 0$*) fuer jedes* $p \in [1,\infty]$.

(v) *Die Resolvente ist positivitaetserhaltend und kontrahierend auf* L^∞.

(v') *Es gilt* $0 \leq (H+\alpha)^{-1}f \leq \frac{1}{\alpha}$ *fuer alle* $f \in L^2$ *mit* $0 \leq f \leq 1$.

(vi) *Die Resolvente positivitaetserhaltend und kontrahierend auf* L^1.

(vii) *Es gilt* $Q(|u|) \leq Q(u)$ *fuer alle* u *und* $Q(u \wedge 1) \leq Q(u)$ *fuer alle* $u \geq 0$.

(viii) *Es ist* Q *reell mit* $Q(\gamma_I u) \leq Q(u)$ *fuer alle* $u \in L^2$.

(ix) *Es gilt* $Q(\gamma u) \leq Q(u)$ *fuer alle* $u \in L^2$ *und alle normalen Kontraktionen* $\gamma : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$.

Bemerkung.

- (i),(ii), (iii): Halbgruppe. (iv), (v), (vi): Resolvente. (vii), (viii), (ix): Form.
- Resolvente / Halbgruppe sind kontrahierend auf L^2, da $H \geq 0$ (Spektralkalkuel).

Beweis. Wir zeigen zunaechst die Aequivalenz von (i), (ii), (ii') und (iii):

(ii) $\Longleftrightarrow$ (ii'): Das ist einfach.
(iii) $\Longleftrightarrow$ (ii): Da die Halbgruppe symmetrisch und reell (p.e.) ist gilt fuer $f, g \in L^2$

$$\int_X e^{-tH} f g dx = \langle e^{-tH} f, \overline{g}\rangle = \langle f, \overline{e^{-tH} g}\rangle = \int_X f e^{-tH} g dx.$$

Damit folgt die gewuenschte Aequivalenz durch Dualitaet.
(iii)/(ii) $\Longleftrightarrow$ (i). Die eine Richtung ist klar. Die andere folgt durch Interpolation (keine Details).

Die Aquivalenz zwischen (iv), (v), (v'), (vi) folgt analog.

(i)$\Longrightarrow$ (ix). Der Beweis erfolgt nach zwei Reduktionen:.

Es reicht fuer jedes $t > 0$ die Aussage fuer Q_t mit $Q_t(u) := \langle (1 - e^{-tH})u, u\rangle$ zu zeigen.
Bew. Wie wir schon wissen, gilt $Q(u) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} Q_t(u)$.

Es reicht $Q_t(\gamma u) \leq Q_t(u)$ zu zeigen fuer Funktionen u der Form $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j 1_{A_j}$ mit paarweise disjunkten A_j.
Bew. Das folgt aus Dichtheit solcher Funktionen.

Seien nun paarweise disjunkte messbare A_j, $j = 1, \ldots, N$, mit endlichem Mass gegeben. Definiere

$$a_{ij} := \langle (1 - e^{-tH}) 1_{A_i}, 1_{A_j}\rangle.$$

Dann gilt fuer $u = \sum_{j=1}^N \alpha_j 1_{A_j}$

$$Q_t(\gamma u) = \sum_{i,j} a_{ij} \gamma(\alpha_i) \overline{\gamma(\alpha_j)} \;\; Q_t(u) = \sum_{i,j} a_{ij} \alpha_i \overline{\alpha_j}.$$

Mit der auf $\mathbb{C}^N$ definierten Form

$$q(z) := \sum a_{ij} z_i \overline{z_j} = \langle Az, z\rangle_{\mathbb{C}^N}$$

reicht es also zu zeigen

$$q(\gamma z) \leq q(z).$$

Definiert man

$$c_j := a_{jj} + \sum_{i:i\neq j} a_{ij} = \sum_i a_{ij},$$

$$b_{ij} := -a_{ij},\ i \neq j$$

so gilt (!) $c_j \geq 0$ fuer alle j und $b_{ij} \geq 0$ fuer all $i \neq j$. sowie (!!)

$$q(z) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} b_{i,j}(z_i - z_j)\overline{(z_i - z_j)} + \sum_j c_j |z_j|^2.$$

An dieser Darstellung der Form q kann man leicht die gewuenschte Eigenschaft ablesen (da $b_{ij}, c_j \geq 0$.)

Zu !: Fuer $i \neq j$ gilt $b_{ij} = -\langle (1 - e^{-tH})1_{A_i}, 1_{A_j}\rangle = \langle e^{-tH}1_{A_i}, 1_{A_j}\rangle \geq 0$ (da p.e.).
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}
\sum_i \langle 1_{A_i}, e^{-tH}1_{A_j}\rangle &= \langle 1_{\cup A_i}, e^{-tH}1_{A_j}\rangle \\
&= \int_{\cup A_i} e^{-tH}1_{A_j}\,dm \\
(p.e.) &\leq \int e^{-tH}1_{A_j}\,dm \\
(p.e.) &= \|e^{-tH}1_{A_j}\|_1 \\
(i) &\leq \|1_{A_j}\|_1 \\
&= \langle 1_{A_j}, 1_{A_j}\rangle.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$0 \leq \langle 1_{A_j}, 1_{A_j}\rangle - \sum_i \langle 1_{A_i}, e^{-tH}1_{A_j}\rangle = a_{jj} + \sum_{i:i\neq j} a_{ij} = c_j.$$

Zu !!: Direkte Rechnung.

$$\begin{aligned}
\textit{Rechte Seite} &= \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} b_{i,j}|z_i|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} b_{i,j}|z_j|^2 - \sum_{i\neq j} b_{i,j} z_i \overline{z_j} + \sum_j a_{jj}|z_j|^2 + \sum_j (\sum_{i:i\neq j} a_{ij})|z_j|^2 \\
&= -\sum_{i\neq j} b_{ij} z_i \overline{z_j} + \sum_j a_{jj}|z_j|^2 \\
&= q(z).
\end{aligned}$$

Hier nutzten wir $a_{ij} = -b_{ij}$ und die Symmetrie von a, b. Daher bleiben nur der zweite und dritte Term uebrig.

(iv)$\Longrightarrow$ (viii): klar.

(viii)$\Longrightarrow$ (vii): Sei $u \in L^2$ gegeben. Nach dem ersten Beurling / Deny Kriterium reicht es zu zeigen, dass

$$Q(u_+) \leq Q(u)$$

fuer alle $u = u_+ - u_-$. Sei nun $a > 0$ und $u = u_+ - u_-$ gegeben. Dann gilt

$$\frac{1}{a} C_I(au) \to u_+ \text{ in } L^2$$

fuer $a \to 0$. Damit folgt aus der Unterhalbstetigkeit der Form

$$Q(u_+) = \lim_{a \to 0+} Q(\frac{1}{a} C_I(au)) \leq Q(u).$$

(vii)$\Longrightarrow$ (v') (Wir wissen schon, dass (i),..., (vi) alle untereinander aequivalent sind.): Wir betrachten den Fall $\alpha = 1$. (Die anderen Faelle koennen aehnlich behandelt werden.) Sei $R := (H+1)^{-1}$. Sei $0 \leq u \leq 1$. Wir muessen zeigen

$$0 \leq Ru \leq 1.$$

Die erste Ungleichung folgt aus dem ersten Beurling / Deny Kriterium. Zum Beweis der zweiten Ungleichung betrachten wir die Charakterisierung der Resolvente: Ru ist der eindeutige Minimierer von

$$\psi(v) := Q(v) + \|v - u\|^2.$$

Sei $v^* := Ru \wedge 1$. Wegen $Ru \geq 0$ gilt aufgrund der Voraussetzungen an Q

$$Q(v^*) \leq Q(Ru).$$

Wegen $0 \leq u \leq 1$ und $Ru \geq 0$ gilt weiterhin

$$\|v^* - u\|^2 \leq \|Ru - u\|^2.$$

Damit folgt also

$$\psi(v^*) \leq \psi(Ru).$$

Aus der Eindeutigkeit des Minimierers folgt also $Ru = v^*$.

Damit ist der Beweis beendet. □

DEFINITION. *Eine Form Q auf $L^2(X, m)$ mit $Q \geq 0$ heisst Dirichletform, wenn sie eine der Bedingungen des zweiten Beurling / Deny Kriterium erfuellt.*

Bemerkung. Unser Beweis des zweite Beurling / Deny Kriterium zeigt:

- Ist Q eine Dirichletform mit Erzeuger H, so ist auch Q_t mit $Q_t(u) = \langle (1 - e^{-tH} u, u \rangle$ eine Dirichletform.
- Ist Q eine auf ganz L^2 definierte Dirichletform und sind $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkte messbare Teilmengen von X mit endlichem Mass, so ist auch

  $$q : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

  mit

  $$q(\alpha, \beta) := \sum_{i,j=1}^{n} Q(\sum_i \alpha_i 1_{A_i}, \sum_j \beta_j 1_{A_j}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} \alpha_i \overline{\beta_j}$$

  mit

  $$a_{i,j} = \langle Q(1_{A_i}, 1_{A_j})$$

  eine Dirichletform. (Solche Dirichletformen gehoeren zu endlichen Graphen (s.u.)).

FOLGERUNG. *Sei Q eine Dirichletform mit Erzeuger H. Dann gilt:*

(a) Es laesst sich fuer $1 \leq p < \infty$ die zugehoerige Halbgruppe $e^{-tH}|_{L^2 \cap L^p}$ eindeutig zu einer stark stetigen positivaetserhaltenden Kontraktionshalbgruppe $U_p(t)$ auf L^p fortsetzen.

(b) Es laesst sich fuer $p = \infty$ die Halbgruppe $e^{-tH}|_{L^2 \cap L^\infty}$ eindeutig zu einer positivitaetserhaltenden Kontraktionshalbgruppe $U_\infty(t)$ auf L^∞ fortsetzen mit

$$U_\infty(t)f = \lim e^{-tH} f_n$$

fuer $f_n \to f$ monoton wachsend. Diese Halbgruppe ist schwach $*$-stetig (d.h. $\langle U_\infty(t)f, g\rangle$ ist stetig fuer alle $f \in L^\infty$ und $g \in L^1$.

(c) Fuer $1 \leq p, g \leq \infty$ mit $1/p + 1/q$ ist $U_p(t)$ der adjungierte Operator zu $U_q(t)$.

*B*eweis. (a) *Eindeutige Fortsetzbarkeit:* Es ist $L^p \cap L^2$ dicht in L^p und die eindeutige Fortsetzbarkeit folgt.
Starke Stetigkeit: Wir zeigen zunaechst die Starke Stetigkeit auf L^1: Es reicht

$$e^{-tL} f \to f, t \to 0$$

fuer $f \in L^1 \cap L^2$ zu zeigen, da diese Menge dicht in L^1 ist und die Halbgruppe Kontraktionen auf L^1 sind. Es reicht dann weiterhin nur $f \geq 0$ zu betrachten (sonst Zerlegen...).
Sei $M_n := \{x \in X : f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ und $1_n := 1_{M_n}$. Dann gilt also $1_n f \to f$ in L^1 und in L^2. Wegen

$$\|e^{-tL} f - f\|_1 \leq \|(e^{-tL} 1_n f - 1_n f\| + \|(1 - 1_n)f\| + \|(e^{-tL}(1 - 1_n)f\|.$$

reicht es also

$$\|(e^{-tL} 1_n f - 1_n f\|_1 \to 0,$$

fuer jedes feste $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Es ist

$$\int |1_n e^{-tH} 1_n f - 1_n f| dx = \int 1_n |e^{-tH} 1_n f - 1_n f| dx \leq m(M_n)^{1/2} \|e^{-tH} 1_n f - f\|_2^{1/2} \to 0, n \to \infty.$$

Damit gilt also

- $\|e^{-tH} 1_n f\|_1 \leq \|1_n f\|_1$
- $\|1_n e^{-tH} 1_n f - f\|_1 \to 0$

Das liefert leicht die gewuenschte Behauptung. (Denn:

$$\begin{aligned} \|(1 - 1_n)e^{-tH} 1_n f\|_1 &= \|e^{-tH} 1_n f\|_1 - \|1_n e^{-tH} 1_n f\|_1 \\ &\leq \|1_n f\|_1 - \|1_n e^{-tH} 1_n f\|_1 \\ &\leq \|1_n e^{-tH} 1_n f - f\|_1 \to 0.) \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die starke Stetigkeit fuer $1 \leq p < \infty$: Es reicht $f \in \cap L^1 \cap L^\infty$ zu betrachten. Fuer solche f folgt die gewuenschte Aussage aus der starken Stetigkeit auf L^1 und der Abschaetzung

$$\int |e^{-tH} f - f|^p dx \leq \|e^{-tH} f - f\|_\infty^{p-1} \int |e^{-tH} f - f| dx.$$

Ende der 11. Vorlesung.

(b) Die Halbgruppe ist positivitaetserhaltend, und es folgt die (punktweise monotone) Konvergenz von $e^{-tH}f_n$ fuer $f_n \to f$ monoton wachsend. Da man auf diese Weise alle Funktionen in L^∞ approximieren kann, folgt die Eindeutigkeit.

Wir zeigen nun, dass diese Halbgruppe gerade die adjungierte der Halbgruppe auf L^1 ist. (Damit folgt, dann insbesondere, dass U_∞ wohldefiniert ist):
Sei $f \in L^\infty$. Ohne Einschraenkgung $f \geq 0$ (sonst Zerlegen...). Sei $g \in L^1 \cap L^2$. Dann gilt (kleine Rechnung

$$\int (U_1(t)^* f) g dm = ... = \int U_\infty(t) f g dm.$$

Da $g \in L^1 \cap L^2$ beliebig war und diese Menge dicht ist in L^1 folgt diese Gleichheit fuer alle $g \in L^1$. Damit folgt $U_\infty = U_1^*$.

Mit $U_\infty = U_1^*$ folgt aus der starken Stetigkeit der L^1-Halbgruppe die schwach-$*$-Stetigkeit der L^∞ Halbgruppe.

Wir beweisen nun die letzte Aussage: Das folgt, da die Halbgruppe auf L^2 selbstadjungiert und reell ist.

□

Definition. *Eine Halbgruppe $U(t)$, $t \geq 0$, auf L^2 heisst submarkovsch, wenn fuer alle $0 \leq f \leq 1$ gilt*

$$0 \leq U(t) f \leq 1.$$

Gilt fuer solche f darueberhinaus noch $\|U(t)f\|_1 = \|f\|_1$, so heisst sie markovsch.

Beachte. Das zweite Beurling / Deny Kriterium sage also: Dirichletformen erzeugen submarkovsche Halbgruppen und umgekehrt. Stochastik liefert dann, dass submarkovsche Halbgruppen gerade zu Markovprozessen gehoeren gemaess der Formel

$$E_x(f(X_t)) = e^{-tL} f(x).$$

Zum Abschluss des Abschnittes zeigen wir, dass es reicht, die charakteristischen Eigenschaften einer Dirichlet form auf geeigneten dichten Mengen zu wissen.

Proposition. *Sei $Q \geq 0$ eine abgeschlosse Form und $D \subset D(Q)$ dicht im Formsinne mit $D = \overline{D}$.*
(a) Gilt $Q(u, v) \in \mathbb{R}$ fuer alle $u \in D \cap L^2_{\mathbb{R}}$, so ist Q reell.
(b) Gilt $Q(|u|) \leq Q(u)$ fuer alle $u \in D$, so erfuellt Q das erste Beurling Deny Kriterium.
(c) Ist Q reell mit $Q(\gamma_I(u)) \leq Q(u)$ fuer alle reellen $u \in D$, so erfuellt Q das zweite Beurling Deny Kriterium.

*B*eweis. (a) Sei (u_n) eine Cauchy Folge in D, die bzgl. $\|\cdot\|_Q$ gegen $u \in D(Q)$ konvergiert. Dann ist auch (kleine Rechnung bzw. Nutzen, dass Konjugation eine Isometry bzgl. $\|\cdot\|_Q$ ist) $\overline{u_n}$ eine Cauchy Folge in D. Da $\overline{u_n}$ offenbar gegen $\overline{u}$ in L^2 konvergiert, folgt Konvergenz von $\overline{u_n}$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$ gegen $\overline{u}$. Damit folgt $\overline{u} \in D(Q)$. Weiterhin sieht man damit, dass

$$Q(\overline{u}) = Q(u)$$

und (a) folgt.

(b) / (c) Die Beweise von (b) und (c) sind aehnlich: Man approximiert $u \in D(Q)$ durch eine Folge (u_n), die gegen u bzgl. $\|\cdot\|_Q$ konvergiert. Ohne Einschraenkung koennen wir $u_n \to u$ in L^2 und punktweise annehmen (sonst Teilfolge). Dann gilt fuer eine normale Kontraktion γ also $\gamma(u_n) \to \gamma(u)$ in L^2 und damit nach Abgeschlossenheit der Form

$$Q(\gamma(u)) \leq \liminf_{n\to\infty} Q(\gamma(u_n)) \leq \liminf_{n\to\infty} Q(u_n) = Q(u)$$

falls $Q(\gamma(u_n)) \leq Q(u_n)$. Damit folgen (b) und (c) einfach. $\square$

4. Beispiele

In diesem Abschnitt diskutieren wir drei Klassen von Beispielen fuer Dirichletformen. Wir werden im naechsten Abschnitt sehen, dass jede (regulaere) Dirichletform im wesentlichen aus diesen drei Beispielen zusammengesetzt werden kann.

Multiplikation mit nichtnegativer Funktion. Sei $L^2(X,m)$ gegeben und $V : X \longrightarrow [0,\infty)$ messbar. Dann ist $Q = Q_V$ mit $Q_V(u) := \int_X V(x)|u(x)|^2 dm(x)$ eine Dirichletform.
Bew. Einfach.

Dirichletformen auf endlichen Mengen (Beurling/Deny '50ies. Sei X endlich und m ein Mass auf X. Wir untersuchen nun Formen, die symmetrisch, reell, erstes Beurling/Deny Kriterium erfuellend und zweiters Beurling / Deny Kriterium erfuellend sind:
Es ist jede symmetrische Form auf $\ell^2(X,m)$ gegeben durch

$$Q(u,v) = \sum a(x,y)u(x)\overline{v(x)}$$

mit $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $a(x,y) = \overline{a(y,x)}$ fuer alle $x,y \in \mathbb{C}$. Dann ist Q genau dann reell, wenn a nur reelle Werte annimmt. Nun zeigt eine kleine Rechung (s.o.)

$$Q(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y \in X)(u(x)-u(y))\overline{(u(x)-u(y))} + \sum_x c(x)u(x)\overline{v(x)}$$

mit

$$c(x,x) = a(x,x) + \sum_{y:y\neq x} a(x,y),\ b(x,y) := -a(x,y).$$

Behauptung: Es gilt $Q(|u|) \leq Q(u)$ genau dann wenn $b(x,y) = -a(x,y) \geq 0$ fuer alle x,y mit $x \neq y$.
Bew: Es gelte $Q(|u|) \leq Q(u)$. Setzt man $u = \delta_x - \delta_y$ so folgt

$$Q(\delta_x) + Q(\delta_y) + 2Q(\delta_x,\delta_y) = Q(|u|) \leq Q(u) = Q(\delta_x) + Q(\delta_y) - 2Q(\delta_x,\delta_y).$$

Damit folgt

$$a(x,y) = Q(\delta_x,\delta_y) \leq 0.$$

Die umgekehrte Implikation folgt einfach.

Behauptung: Sei

$$Q(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{x,y}b(x,y)(u(x)-u(y))\overline{(u(x)-u(y))}+\sum_x c(x)u(x)\overline{v(x)}$$

mit reellen b,c. Dann gilt $Q(u\wedge 1)\leq Q(u)$ fuer $u\geq 0$ genau dann wenn, $c_x\geq 0$ alle x.

Bew. Wir betrachten $u=(1+t\delta_x)$ mit $t>0$. Dann gilt

Ende der 12. Vorlesung.

$$Q(1)=Q((1+t\delta_x)\wedge 1)\leq Q(1+t\delta_x)=Q(1)+t2Q(1,\delta_x)+t^2Q(\delta_x).$$

Damit folgt

$$0\leq 2tQ(1,\delta_x)+t^2Q(\delta_x)=2tc_x+t^2a(x,x)$$

und nach Division durch $t>0$

$$0\leq 2c(x)+ta(x,x).$$

Fuer $t\to 0$ folgt die Behauptung. Umgekehrt folgt aus $0\leq c_x$ offenbar die gewuenschte Ungleichung.

Bisher hat dass Mass m und das zugehoerige Skalarprodukt

$$\langle u,v\rangle_m:=\sum_{x\in X}u(x)\overline{v(x)}m(x)$$

noch keine Rolle gespielt. Es tritt auf, wenn wir versuchen, den Operator zu der Form $Q=Q_{b,c}$ anzugeben. Genauer gilt fuer

$$Q(u,v)=\frac{1}{2}\sum_{x,y}b(x,y)(u(x)-u(y))\overline{v(x)-v(y))}+\sum_{x\in X}c(x)u(x)\overline{v(x)}$$

naemlich

$$Q(u,v)=\langle Hu,v\rangle_m$$

mit

$$Hu(x)=\frac{1}{m(x)}\left(\sum_{y\neq x}b(x,y)(u(x)-u(y))+c(x)u(x)\right).$$

(Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
Hu(z) &= \langle Hu,\frac{1}{m(z)}\delta_z\rangle_m\\
&= Q(u,\frac{1}{m(z)}\delta_z)\\
&= \frac{1}{m(z)}\left(\frac{1}{2}\sum_{y\neq x}b(x,y)(u(x)-u(y))\overline{\delta_z(x)-\delta_z(y)}+\sum c(x)u(x)\right)\overline{\delta_z}(x)\\
&= \frac{1}{(m(z)}\left(\sum_{y\neq x}b(x,y)(u(x)-u(y))+c(x)u(x)\right).
\end{aligned}$$

Beachte. Entsprechende Betrachtungen haben wir bei der Approximation von DF schon gemacht.

Beispiel unendliche Menge: Sei X abzaehlbar endlich und m ein Mass auf X. Sei $c:X\longrightarrow[0,\infty)$ und $b:X\times X\longrightarrow[0,\infty)$ mit

- $b(x,y) = b(y,x)$ fuer alle $x, y \in X$,
- $\sum_{y \in X} b(x,y) < \infty$ fuer jedes $x \in X$,

gegeben. Dann definiert

$$D(Q) := \{u \in \ell^2(X,m) : \sum b(x,y)|u(x) - u(y)|^2 + \sum c(x)|u(x)|^2 < \infty\}$$

$$Q(u,v) = \frac{1}{2}\sum_{x,y} b(x,y)(u(x) - u(y))\overline{(v(x) - v(y))} + \sum c(x)u(x)\overline{v(x)}$$

eine Dirichletform.

Die klassische Dirichletform - Dirichlet Randbedingungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit dem Lebesguemass und $L^2(\Omega)$ der zugehoerige Raum. Sei

$$Q_\Omega^D(u,v) = Q(u,v) := \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx$$

auf $W_0^{1,2}$. Dann ist Q eine Dirichletform.

Bew. Wir zeigen die noetigen Eigenschaften des zweiten Beurling / Deny Kriteriums:

Es ist Q reell. Das sieht man direkt.

Es ist $C_c^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{1,2}$ bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Das folgt aus der Definition.

Es gilt $Q(\gamma_I(u)) \leq Q(u)$ fuer alle reellen $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Wir approximieren γ_I durch eine Folge P_n von Funktionen in $C^\infty(\mathbb{R})$ mit

- $0 \leq P_n \leq \gamma_I$
- $P_n' \leq 1$
- $P_n(x) \to \gamma_I(x)$ fuer alle $x \in \mathbb{R}$.

Fuer jedes $u \in C_c^\infty(\Omega)$ gehoert dann $P_n(u)$ zu $C_c^\infty(\Omega)$ und erfuellt $P_n(u)$ gegen $\gamma_I(u)$ in L^2 und es ist nach Kettenregel $Q(P_n(u)) \leq Q(u)$. Damit folgt

$$Q(\gamma_I(u)) \leq \liminf Q(P_n(u)) \leq Q(u).$$

Aus den beiden vorangegangenen Behauptungen folgt dann Gueltigkeit des zweiten Beurling / Deny Kriterium nach der vorigen Proposition.

Die klassische Dirichletform - Neumann Randbedingungen. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge mit dem Lebesguemass und $L^2(\Omega)$ der zugehoerige Raum. Sei

$$Q_\Omega^N(u,v) := Q(u,v) := \int_\Omega \langle \nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx$$

auf $W^{1,2}$. Dann ist Q eine Dirichletform.

Bew. Das folgt wie im vorigen Beispiel, wobei man verwendet, dass $C^\infty \cap L^2$ dicht in $W^{1,2}$ (ohne Beweis).

KAPITEL 3

Regulaere Dirichlet Formen und Kapazitaet

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Dirichletform Q auf X und nehmen wir an, dass X ein lokalkompakter separabler Raum mit der Borelsigmaalgebra ist. Damit haben wir drei vollstaendige Vektorraeume zur Verfuegung:

- den Hilbertraum $L^2(X, m)$ mit dem dichten Teilraum $D(Q)$.
- Den Hilbertraum $D(Q)$ mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_Q = (Q + 1)$ und der Norm $\|u\|_Q^2 := Q(u) + \|u\|^2 = (Q + 1)(u)$.
- Den Banachraum $C_0(X)$ der stetigen Funktionen, die im unendlichen verschwinden mit dem dichten Teilraum $C_c(X)$ der stetigen Funktionen mit kompaktem Traeger.

Regularitaet und Kapazitaet befassen sich damit, wie diese drei Strukturen und insbesondere die letzten beiden miteinander vertraeglich sind.

1. Regulaere Dirichletformen

DEFINITION. *(Regulaere DF) Sei Q eine Dirichletform auf einem lokalkompakten, metrischen Raum X. Dann heisst Q regulaer, wenn gilt $D(Q) \cap C_c(X)$ dicht ist*

- *in $D(Q)$ bzgl. $\| \cdot \|_Q$ und*
- *in $C_0(X)$ bzgl. $\| \cdot \|_\infty$.*

Beachte. Funktionen aus $D(Q) \cap C_c(X)$ sind die besonders schoenen Funktionen. Regulaer bedeutet dann, dass alle relevanten Funktionen in den relevanten Normen durch 'schoene' Funktionen approximiert werden koennen.

Beispiel. Die klassische Dirichletform Q_Ω^D auf einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist regulaer.
Bew. Es ist C_c^∞ dicht in $C_0(\Omega)$ (Falten). Weiterhin ist C_c^∞ dicht in $W_0^{1,2}(\Omega) = D(Q_\Omega^D)$ bzgl. $\| \cdot \|_Q$ nach Definition.

Beispiel. Die klassische Dirichletform Q_Ω^N einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann regulaer, wenn $W_0^{1,2}(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ also $Q_\Omega^N = Q_\Omega^D$ gilt. Insbesondere ist sie im allgemeinen also NICHT regulaer.
Bew. Es gilt

$$W_0^{1,2}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\| \cdot \|_{Q^N}} = \overline{W^{1,2}(\Omega) \cap C_c(\Omega)}^{\| \cdot \|_{Q^N}}.$$

Hier folgt die erste Gleichung nach Definition von $W_\Omega^{1,2}$ und die zweite Gleichung folgt durch Falten. Damit folgt die erste Aussage. Das 'Insbesonder' ergibt sich, da im allgmeinen nicht $W_0^{1,2} = W_0^{1,2}$.

Beispiel. Dirichletformen auf endlichdimensionalen Raumen sind regulaer.
Bew. Sie sind fuer alle Funktionen definiert.

Beispiel. Ist X eine abzaehlbare Menge, $m : X \longrightarrow (0,\infty)$ und $b : X \times X \longrightarrow [0,\infty)$ mit $b(x,y) = b(y,x)$ und $\sum_y b(x,y) < \infty$ fuer alle x gegeben. Dann ist die zugehoerige Form Q regulaer, falls $\inf_{x\in X} m(x) > 0$.
Bew. Nicht hier.

2. Kapazitaet

Die Kapazitaet ist eine Mengenfunktion (aehnlich wie das Mass). Sie beruht auf der Norm $\| \cdot \|_m$.

Definition. *(Kapazitaet) Q Dirichletform auf dem metrischen lokalkompakten separablen X. Fuer $U \subset X$ offen sei*

$$cap(U) := \inf\{\|\varphi\|_Q : \varphi \in D(Q)\ \varphi \geq 1 \ auf\ U\ m\text{-}fast\ sicher\} \in [0,\infty].$$

Fuer $B \subset X$ sei dann

$$cap(B) := \inf\{cap(U) : U\ offen\ mit\ B \subset U\}.$$

Beachte. Statt $\varphi \geq 1$ auf U (f.s.) koennte man auch fordern $\varphi \geq 1_U$ (f.s).
Bew: Wir zeigen zunaechst, dass wir ohne Einschraenkung φ reell annehmen koennen: Da Q reell ist gilt

$$\|u\|_Q^2 = \langle \Re u + i\Im u, \Re u + i\Im u\rangle_Q = \|\Re u\|_Q^2 + \|Imu\|_Q^2.$$

Gilt also $u = 1$ auf U, so ist $\|\Re u\|_Q \leq \|u\|_Q$ und es ist (natuerlich) $\Re u \geq 1$ auf U.
Wir zeigen nun, dass wir bei reellem u ohne Einschraenkung $u \geq 0$ annehmen koennen: Wir koennen u durch $\min\{u, 0\}$ ersetzen und (Dirichletform) machen dadurch die Formnorm hoechstens kleiner.

Lemma. *(Einfache Eigenschaft von cap) Es gilt $m(B) \leq cap(B)$.*

*B*eweis. Offenbar gilt $m(U) \leq cap(U)$ fuer alle offenen U. Damit folgt

$$m(B) \leq m(U) \leq cap(U)$$

fuer alle $B \subset U$ offen und die Aussage folgt. □

Beispiel. $Q = 0$. Ist $Q = 0$ so gilt $cap = m$ (da m regulaer ist).

Beispiel $Q = Q_V$. Ist $Q = Q_V$ d.h. $Q_V(u) = \int_V |u(x)|^2 V(x)dm(x)$ mit $V : X \longrightarrow [0,\infty)$ messbar, so gilt $cap = (1 + V)dm$.
Bew. Es handelt sich um $Q^* = 0$ auf dem neuen Massraum mit Mass $(1 + V)dm$.

Beispiel $Q = Q_{b,c}$ auf X. ????????
Beispiel. $Q = Q_{R^n}$ klassische Dirichletform. Dann gilt

- $cap(Punkt) > 0$ falls $d = 1$.
- $cap(Punkt) = 0$ falls $d > 1$.

Bew. $d = 1$: Nach einer Sobolevungleichung ist jedes $f \in W^{1,2}(\mathbb{R}) = W_0^{1,2}(\mathbb{R})$ stetig und beschraenkt und es gilt

$$\|f\|_\infty \leq const\|f\|_Q.$$

Ist also U offen und nichtleer so folgt fuer $f \geq 1$ auf U also $\|f\|_Q \geq 1/C$ und damit $cap(Punkt) \geq 1/C$.

Ende der 13. Vorlesung

$d = 2$: Sei $\varphi \in C_c^\infty(U_1(p))$ mit $\varphi \geq 1_{B_{1/2}(p)}$ gegeben. Setze fuer $\varepsilon > 0$

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

(Es handelt sich um eine Skalierung. Damit ist φ_ε durch $\|\varphi\|_\infty$ beschraenkt und sein Traeger ist in $\varepsilon \operatorname{supp} \varphi$ enthalten.)
Betrachte

$$C := \{\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2) : \psi \geq 1_U \quad \text{fuer ein } U \supset \{p\} \text{ offen}\}.$$

Dann ist C konvex(!). Es gilt

$$cap(\{p\}) \leq \inf\{\|\psi\|_Q : \psi \in C\}.$$

Daher reicht es zu zeigen, dass 0 im Abschluss von C bgzl. $\|\cdot\|_Q$ ist. Da C konvex ist, reicht es also zu zeigen, dass 0 im schwachen Abschluss von C ist. Da $\varphi_{1/n}$ offenbar zu C gehoeren, reicht es zu zeigen, dass $\varphi_{1/n}$ schwach gegen 0 konvergiert (im Hilbertraum $(D(Q), \langle\cdot,\cdot\rangle_Q)$. Wir zeigen:

(!) $\|\varphi_{1/n}\|_Q$ ist beschraenkt.
(!!) $(Q+1)(u, \varphi_{1/n}) \to 0$, fuer alle $u \in D(H)$.

Da $D(H)$ dicht in $D(Q)$ ist, folgt dann die Aussage.

Zu !: Nach Substitutionsregel gilt

$$\|\varphi_\varepsilon\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^2} |\varphi_\varepsilon(x)|^2 dx = \int \varepsilon^2 |\varphi(y)|^2 dy = \varepsilon^2 \|\varphi\|^2 \to 0, \varepsilon \to 0.$$

Weiterhin $\nabla\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\nabla\varphi(\frac{x}{\varepsilon})$. Damit folgt nach Substitutionsregel also

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\varphi_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla\varphi(y)|^2 dy.$$

Insgesamt ist also

$$\|\varphi_\varepsilon\|_Q^2 = Q(\varphi_\varepsilon) + \|\varphi\|_\varepsilon^2$$

beschraenkt.
Zu !!: $(Q+1)(u, \varphi_{1/n}) = \langle (H+1)u, \varphi_{1/n}\rangle \to 0$ (da $\varphi_{1/n} \to 0$ in L^2.
$d \geq 3$: Einfach (da $\|\varphi_{1/n}\|_Q \to 0$, da nach Anwenden der Substitutionsregel ein ε 'uebrigbleibt'.)
Wir koennen nun die Kapazitaet einer offenen Menge charakterisieren.

Theorem. *(Charakterisierung der Kapazitaet) Sei X lokalkompakter separablen metrischer Raum. Sei m ein Radon mass auf X mit vollem Traeger. Sei Q eine DF auf X. Dann existiert zu jedem offenen $U \subset X$ ein eindeutiges Element e_U in $\{\varphi \in D(Q) : \varphi \geq 1 \text{ auf } U \text{ f.s.}\}$ mit*

$$\|e_U\|_1 = cap(U).$$

Dieses e_U erfuellt $0 \leq e_U \leq 1$. Weiterhin gilt:
(a) Es ist e_U das eindeutige Element in $D(Q)$ mit

- *$e_U = 1$ fast sicher auf U und*
- *$(Q+1)(e_U, v) \geq 0$ fuer alle reellen $v \in D(Q)$ mit $v \geq 0$ auf U.*

(b) Es ist e_U das eindeutige Element in $D(Q)$ mit

- *$e_U = 1$ fast sicher auf U und*
- *$(Q+1)(e_U, w) = cap(U)$ fuer alle $w \in D(Q)$ mit $w = 1$ fast sicher auf U.*

*B*eweis. Die Menge $F_U := \{\varphi \in D(Q) : \varphi \geq 1_U j \ f.s.\}$ ist konvex und abgeschlossen in $D(Q)$. Die Kapazitaet ist nach Definition gerade gegeben als

$$cap(U) = distance(0, F_U).$$

Damit folgt die erste Aussage aus einem fundamentalen Satz der Hilberttraumtheorie (im Hilberttraum $(D(Q), \|\cdot\|_Q)$). Wie schon diskutiert muss e_U reell sein. (Sonst Realteil betrachten...) Wegen $\|C_I u\|_Q \leq \|u\|$ folgt die zweite Aussage.

(a) Wir zeigen zunaechst, dass e_U die beiden Eigenschaften hat: Die eine Eigenschaft haben wir schon diskutiert. Sei $v \geq 0$ auf U. Dann gilt $e_U + tv \in F_U$ fuer alle $t \geq 0$. Damit hat also

$$h : [0, \infty) \to \mathbb{R}, \ h(t) := \|e_U + tv\|_Q^2 = Q(e_U + tv) + \|e_U + tv\|^2$$

ein Minimum bei $t = 0$. Daher gilt

$$0 \leq h'(0) = 2(Q + 1)(e_U, v).$$

(Ableitung von rechts, da Minimum am linken Randpunkt).
Es sei nun e^* gegeben, dass die beiden Eigenschaften hat. Sei $\varphi \in F_U$ beliebig. Sei $v := \varphi - e^*$. Dann gilt nach der ersten Eigenschaft $v \geq 0$ auf U f.s.. Damit folgt aus der zweiten Eigenschaft also

$$\begin{aligned}
(Q+1)(\varphi) &= (Q+1)(v + e^*) \\
&= (Q+1)(v) + (Q+1)(v, e^*) + (Q+1)(e^*, v) + (Q+1)(e^*) \\
2.Eig. \quad &\geq (Q+1)(e^*).
\end{aligned}$$

Damit ist e^* der gesuchte Minimierer.

(b) Wir zeigen zunaechst, dass e_U diese Eigenschaften hat: Die erste Eigenschaft ist klar. Sei nun $w \in D(Q)$ mit $w = 1$ auf U f.s. Sei $v = e_U - w$. Dann gilt $v = 0$ auf U und $-v = 0$ auf U. Damit erhaelt man aus (a)

$$(Q + 1)(e_U, v) = 0.$$

Das liefert

$$(Q + 1)(e_U, w) = (Q + 1)(e_U, e_U - v) = (Q + 1)(e_U) = cap(U).$$

Sei nun ein e' gegeben, das die beiden Eigenschaften hat. Dann gilt also mit $w = e'$

$$(Q + 1)(e') = (Q + 1)(e', w) = cap(U)$$

und aufgrund der Eindeutigkeit des Minimierers folgt die Aussage. □

Beachte. Gilt $v \equiv 0$ auf U so folgt $\langle v, e_U\rangle_Q$. (Bew. Einsetzen von v und $-v$ in (a).)

LEMMA. *(Eigenschaften der Kapazitaet auf offenen Mengen) Sei X lokalkompakter separablen metrischer Raum. Sei m ein Radonmass auf X mit vollem Traeger. Sei Q eine DF auf X. Dann gilt:*
(a) Sind U, V offen mit $U \subset V$ so gilt $cap(U) \subset cap(V)$.
(b) Sind U, V offen so gilt $cap(U \cup V) + cap(U \cap V) \leq cap(U) + cap(V)$.
(c) Sind U_n offen mit $U_n \subset U_{n+1}$ alle n und $U = \cup U_n$ so gilt $cap(U) = \sup cap(U_n)$.

*B*eweis. (a) klar.
(b) Sei $u := e_U$, $v := e_V$. Idee: Vergleiche mit $u \wedge v$ und $u \vee v$.
Das fuehrt auf

$$cap(U \cup V) + cap(U \cap V) \leq (Q+1)(u \vee v) + (Q+1)(u \wedge v).$$

Einsetzen von

$$u \vee v = 1/2(u+v) + 1/2|u-v|, \;\; u \wedge v = 1/2(u+v) - 1/2|u-v|$$

liefert dann

$$\begin{aligned} cap(U \cup V) + cap(U \cap V) &\leq \frac{1}{4}(Q+1)(u+v) + \frac{1}{4}(Q+1)(|u-v|) + \frac{1}{4}(Q+1)(u+v,|u-v|) \\ &\quad + \frac{1}{4}(Q+1)(u+v) + \frac{1}{4}(Q+1)(|u-v|) - \frac{1}{4}(Q+1)(u+v,|u-v|) \\ &= \frac{1}{2}(Q+1)(u+v) + \frac{1}{2}(Q+1)(|u-v|) \\ (Dirichletform) &\leq \frac{1}{2}(Q+1)(u+v) + \frac{1}{2}(Q+1)(u-v) \\ &= (Q+1)(u) + (Q+1)(v) \\ &= cap(U) + cap(V). \end{aligned}$$

(c) Sei $u_n := e_{U_n}$. Idee: Zeige u_n Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$ mit Grenzwert e_U.
Nach (a) ist die Folge $(1+Q)(u_n)$ monoton wachsend also konvergent. Nach Teill (b) des Satz zur Charakterisierung von e_* gilt fuer $m < n$

$$(Q+1)(u_n - u_m) = (Q+1)(u_n) - 2(Q+1)(u_n, u_m) + (Q+1)(u_m) = (Q+1)(u_n) - (Q+1)(u_m).$$

Da $Q(u_n)$ konvergiert, ist also (u_n) eine Cauchy Folge bzgl. $\|\cdot\|_Q$. Aufgrund der Vollstaendigkeit des Formbereichs konvergiert dann (u_n) gegen ein $u \in D(Q)$. Dieses u erfuellt

- $u \geq 1$ auf U f.s. (da $u_n \geq 1$ auf U_n und eine Teilfolge fast sicher konvergiert).
- $(Q+1)(u,v) = \lim (Q+1)(u_n, v) \geq 1$ fuer jedes $v \geq 1$ auf U (da dann $v \geq 1$ auf U_n und (a) des Satzes zur Charakterisierung von e_* angwendet werden kann.)

Damit folgt also auch Teil (a) des Satzes zur Charakterisierung von e_*, dass $u = e_U$. Damit folgt

$$\sup cap(U_n) = \sup (Q+1)(u_n) = \lim (Q+1)(u_n) = (Q+1)(u) = \cap(U).$$

□

Das vorige Resultat liefert aufgrund von allgemeinen Saetzen zu Mengenfunktionen auf lokalkompakten metrischen Rauemen die folgenden Aussagen (hier ohne Beweis.)

Theorem. *(Choquet Kapazitaet). Fuer die Kapazitaet cap einer Dirichlteform auf einem lokalkompakten metrischen Raum gilt fuer alle messbaren A_n, A:*

- $cap(A) \leq cap(B)$ *falls* $A \subset B$.
- $A_n \to A$ *monoton wachsend liefert* $cap(A) = \lim cap(A_n) = \sup cap(A_n)$.

- *A_n compakt, monoton fallend gegen A, so folgt $cap(A) = \lim cap(A_n) = \inf cap(A_n)$.*
- *$cap(A) = \sup\{cap(K) : K \subset A,\ K$ kompakt$\}$ (Innenregulaer).*

*B*eweis. hat nichts mit Dirichletformen zu tun. (vgl. Appendix von Fukishima). □

Proposition. *('Tchebychef') Q DF auf lk, metrischen Raum. Dann gilt fuer jedes $u \in D(Q) \cap C_c(X)$*

$$cap(\{x : |u(x)| > \lambda\} \leq \frac{1}{\lambda^2}(Q+1)(u)$$

fuer jedes $\lambda > 0$.

*B*eweis. Es gilt $\frac{1}{\lambda}u \geq 1$ auf $\{|u| > \lambda\}$. Damit folgt

$$cap() \leq (Q+1)(\frac{1}{\lambda}|u|) = \frac{1}{\lambda^2}(1+Q)(|u|) \leq \frac{1}{\lambda^2}(1+Q)(u).$$

Hier nutzten wir die Dirichletformeigenschaft im lezten Schritt. □

Definition. *Eine Funktion $u : X \longrightarrow \mathbb{C}$ heisst quasistetig, wenn fuer jedes $\varepsilon > 0$ eine offenen Menge $U = U_\varepsilon$ existiert mit $cap(U_\varepsilon) < \varepsilon$ und $f|_{X \setminus U_\varepsilon}$ stetig auf $X \setminus U_\varepsilon$. Eine Menge heisst Polar, wenn sie die Kapazitaet Null hat. Eine Eigenschaft gilt quasiueberall, wenn sie ausserhalb einer polaren Menge gilt.*

Bis hier haben wir Regularitaet der Form nicht gebraucht. Die folgenden beiden Resultate brauchen Regularitaet der Form.

Theorem. *(Quasistetiger Representant) Sei Q eine regulaere Dirichletform auf einem lokalkompakten metrischen separablen Raum. Dann besitzt jedes $u \in D(Q)$ einen quasistetigen Representanten. Zwei solche Representanten stimmen quasiueberall ueberein.*

Theorem. *(Cauchy Folgen) Sei Q eine regulaere Dirichletform auf einem lokalkompakten metrischen separablen Raum. Sei (u_n) eine Cauchy Folge bzlg. $\|\cdot\|_Q$. Dann gilt:*

- *Es existiert eine Teilfolge u_{n_k} mit quasistetigen Representanten $\widetilde{u}_{n_k}$ und ein quasistetiger Representant $\widetilde{u}$ von $\lim u_n$ so dass die Teilfolge quasiueberall gegen $\widetilde{u}$ konvergiert.*
- *Konvergieren die stetigen Representanten $\widetilde{u}_n$ gegen eine Funkteion $\widetilde{u}$ quasiueberall, so gehoert $\widetilde{u}$ zu $D(Q)$ und die (u_n) konvergieren bzgl. $\|\cdot\|_Q$ gegen $\widetilde{u}$.*

Wir geben hier aus Zeitgruenden keinen Beweis fuer die beiden vorangehenden Saetze. Der Beweis nutzt jeweils die 'Tchebychef' Ungleichung, um zu zeigen, dass (stetige) Funktionen, die in Formnorm nahe sind auch in punktweise nahe sein muessen bis auf Mengen kleiner Kapazitaet:

$$cap\{|u-v| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}(Q+1)(u-v).$$

3. Ein Darstellungssatz

Jede regulaere DF kann in drei spezifische Teile zerlegt werden. Genaueres studieren wir in diesem Abschnitt.

Eine Dirichletform Q heisst stark lokal, wenn gilt $Q(u,v) = 0$ falls v konstant auf dem Traeger von u.

THEOREM. *(Beurling-Deny Formel) Sei Q eine regulaere Dirichletform auf dem lokalkompakten separablen metrischen Raum X. Dann gibt es eine stark lokale Dirichletform $Q^{(c)}$, ein symmetrisches Radonmass J auf $X \times X \setminus \{(x,x) : x \in X\}$ und ein RAdnomass k auf X mit*

$$Q(u,v) = Q^{(c)}(u,v) + \int (u(x)-u(y))\overline{(v(x)-v(y))}dJ(x,y) + \int u(x)\overline{v(x)}dk(x)$$

fuer alle $u, v \in C_c(X) \cap D(Q)$.

Literaturverzeichnis

[1] Davies, E. B.: Heat kernels and spectral theory. Cambridge Tracts in Mathematics, 92. Cambridge University Press, Cambridge, 1990. x+197 pp. ISBN: 0-521-40997-7

[2] Fukushima, Masatoshi; O-shima, Yo-ichi; Takeda, Masayoshi: Dirichlet forms and symmetric Markov processes. de Gruyter Studies in Mathematics, 19. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1994. x+392 pp. ISBN: 3-11-011626-X

[3] Ma, Zhi Ming; R?ckner, Michael: Introduction to the theory of (nonsymmetric) Dirichlet forms. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1992. vi+209 pp. ISBN: 3-540-55848-9