Höhere Analysis I

Sommersemester 2018 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Donnerstag 10.05.2018**

(1) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Es gehoere $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$ zu $\mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$ für alle $p \in [1, \infty]$. Zeigen Sie

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

(2) (a) Sei $\mathbb{R}$ ausgestattet mit der Borel σ-algebra und dem Lebesguemaß λ. Zeigen Sie, dass für $p, q \in [1, \infty]$ beliebig mit $p \neq q$ nicht die Inklusion $L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda) \subseteq L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ gilt.

(b) Was gilt für $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ versehen mit der Einschränkung des Lebesguemasses?

(3) Gegeben sei der Raum $\mathcal{C}([0, 1])$ der stetigen Funktionen auf den Intervall $[0, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 \overline{f(x)}g(x)\, dx, \qquad f, g \in \mathcal{C}([0, 1]),$$

ein Skalarprodukt auf $\mathcal{C}([0, 1])$ ist.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathcal{C}([0, 1])$ mit dem eben definierten Skalarprodukt kein Hilbertraum ist.

(4) Zeigen Sie:

(a) Die Normen $\| \cdot \|_p$ auf ℓ^p werden für $p \neq 2$ nicht von einem Skalarprodukt induziert.

(b) Die Supremumsnorm auf $C([0, 1])$ wird nicht durch ein Skalarprodukt induziert.

<u>Hinweis:</u> In Hilberträumen gilt die Parallelogrammidentität.

Zusatz: Sei V ein Vektorraum und s ein Skalarprodukt auf V. Zeigen Sie, dass

$$|s(x, y)| = s(x, x)^{\frac{1}{2}} s(y, y)^{\frac{1}{2}}$$

genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.