Wintersemester 2015/16 **Prof. Dr. D. Lenz**

Höhere Analysis II

Blatt 6 **Zur Besprechung in der Übung am 08.12.2015**

(1) Sei H ein Hilbertraum und $T\colon D(T) \subset H \longrightarrow H$ ein dicht definierter Operator. Zeigen Sie: Falls $\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in D(T)$ gilt, so ist T abschließbar.

(2) Sei $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ messbar. Sei M_φ der maximale Operator der Multiplikation mit φ in $L^2(X, \mu)$.

Zeigen Sie, dass die Menge der Eigenwerte von M_φ gegeben ist durch

$$\sigma_{\mathrm{P}}(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}.$$

(3) Sei $\Delta\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ der Laplace-Operator. Zeigen Sie, dass $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ bezüglich der Graphennorm $\|\cdot\|_{H^2} = (\|\cdot\|_{L^2}^2 + \|\Delta\cdot\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$ ist.

(4) Sei der Operator T gegeben durch

$$T\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),\ f \mapsto if'.$$

Zeigen Sie, dass T symmetrisch ist.