Höhere Analysis I

Sommersemester 2012 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 6 **Abgabe Freitag 08.06. 2012**

(1) Sei (M, d) ein metrischer Raum, in dem jede Kugel $B_r(x)$, $x \in M$, $r > 0$ kompakt ist. Dann sind äquivalent:

  (i) M ist kompakt.

  (ii) $C_c(M)$ ist vollständig.

  (iii) $C_c(M) = C_0(M)$

(2) Seien $m : \mathbb{N} \to (0, \infty)$ und $1 \leq p < \infty$ gegeben. Wir definieren die gewichteten Folgenräume

$$\ell^p(\mathbb{N}, m) = \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p m(n) < \infty\}$$

und normieren diese mittels

$$\|x\|_{p,m} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p m(n) \right)^{1/p}.$$

Desweiteren seinen $I = \inf_{n \in \mathbb{N}} m(n)$ und $S = \sum_{n=1}^{\infty} m(n)$. Zeigen Sie, dass für $1 \leq p < q < \infty$ die folgenden Aussagen gelten:

  (a) Falls $I > 0$, so gilt $\ell^p(\mathbb{N}, m) \subseteq \ell^q(\mathbb{N}, m)$, sowie

$$\sup\{\|x\|_{q,m} \mid x \in \ell^p(\mathbb{N}, m), \|x\|_{p,m} \leq 1\} = I^{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}.$$

  (b) Falls $S < \infty$, so gilt $\ell^q(\mathbb{N}, m) \subseteq \ell^p(\mathbb{N}, m)$, sowie

$$\sup\{\|x\|_{p,m} \mid x \in \ell^q(\mathbb{N}, m), \|x\|_{q,m} \leq 1\} = S^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

  (c) Ist $I = 0$ bzw. $S = \infty$, so gelten die in (a) bzw. (b) gegebenen Inklusionen nicht.

(3) Seien $1 \leq p, q < \infty$ und $0 < \vartheta < 1$ und sei r durch $\frac{1}{r} = \frac{1-\vartheta}{p} + \frac{\vartheta}{q}$ definiert. Zeigen Sie: Es gilt

$$\ell^p(\mathbb{N}, m) \cap \ell^q(\mathbb{N}, m) \subseteq \ell^r(\mathbb{N}, m),$$

insbesondere gilt die Lyapunovsche Ungleichung

$$\|f\|_{r,m} \leq \|f\|_{p,m}^{1-\vartheta} \|f\|_{q,m}^{\vartheta}.$$

Hinweis: Höldersche Ungleichung.

(4) Zeigen Sie:

(a) Für jedes $x \in c_c$ gilt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$, für $p \to \infty$.

(b) Sei $1 \leq q < \infty$. Für jedes $x \in \ell^q$ gilt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$, für $p \to \infty$.