Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Weihnachtsserie **Abgabe Mittwoch 06.01.2016**

(1) Seien $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, $x_0 \in U$ und $f, g : U \to \mathbb{R}$ gegeben. Sei f in x_0 stetig und g in x_0 differenzierbar mit $g(x_0) = 0$. Zeigen Sie, dass dann fg in x_0 differenzierbar ist und $D(fg)(x_0) = f(x_0)Dg(x_0)$ gilt.

(2) Gegeben sei
$$Y := \{(y, \sin(1/y)) \mid y > 0\} \cup \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2,$$
ausgestattet mit der euklidischen Metrik d. Zeigen Sie, dass (Y, d) zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

(3) Betrachte $\mathcal{C}([a,b])$, den Raum der stetigen, reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$. Für $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ definieren wir
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$
sowie
$$d(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$
Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt und d eine Metrik auf $\mathcal{C}([a,b])$ ist.

(4) Skizzieren Sie die folgende Menge komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene.

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 4, |z + 2i| \geq 2, |z + 2 - 2i| \geq 4 - 2\sqrt{2}, |z - 2 - 2i| \geq 4 - 2\sqrt{2}\}$$
$$\cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq 4,\ \text{Im } z \geq -2\text{Re } z - 8,\ \text{Im } z \leq -\frac{1}{2}\text{Re } z + 4,\ \text{Re } z \leq 0,\ \text{Im } z \geq 0\}$$
$$\cup \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 8 - 8i| \leq 1\} \cup \{-2 + 2i, 2 + 2i\}$$

(5) Sei $n \geq 3$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{|x|^{n-2}}$$

harmonisch ist, dass also für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 0.$$

(6) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2}{x+y} & \text{falls } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x+y = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für jede Gerade $G \subseteq \mathbb{R}^2$ durch Null gilt

$$\lim_{\substack{(x,y)\to 0 \\ (x,y)\in G}} f(x,y) = 0.$$

(b) f ist in allen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x+y=0$ nicht stetig.

(7) Sei $R : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine Drehung, $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^N$ im Punkt $p \in U$ differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $R \circ f$ ist differenzierbar in p und es gilt

$$D(R \circ f)(p) = R \circ Df(p).$$

(b) Es gilt

$$\|D(R \circ f)(p)\| = \|Df(p)\|.$$

Erinnerung: Für eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ ist

$$\|L\| = \sup\{|Lx| \mid |x| \leq 1\}.$$

(8) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^N$ offen und $x, y \in U$. Zeigen Sie: Existiert eine eine stetige Funktion

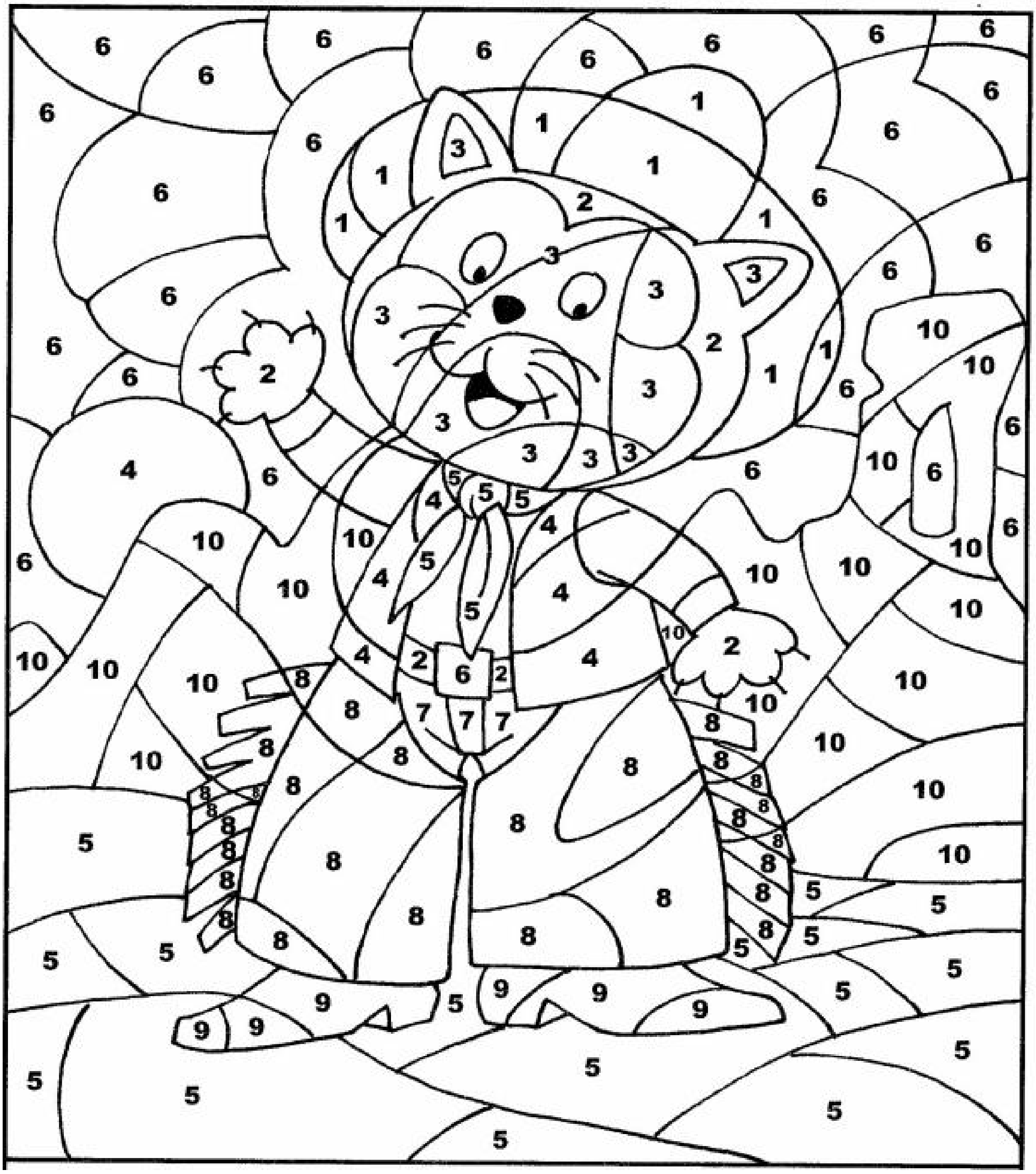
$$\gamma : [0,1] \to U \text{ mit } \gamma(0) = x,\ \gamma(1) = y,$$

so existiert auch eine stückweise lineare Funktion

$$\tilde{\gamma} : [0,1] \to U \text{ mit } \tilde{\gamma}(0) = x, \tilde{\gamma}(1) = y.$$

Erinnerung: $\tilde{\gamma} : [0,1] \to U$ ist stückweise linear, falls es $x = x_0, x_1, \ldots, x_{n+1} = y$ in U und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = 1$ gibt, sodass für $t \in [t_i, t_{i+1}]$ gilt

$$\tilde{\gamma}(t) = x_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}(x_{i+1} - x_i).$$



(9) Malen nach Zahlen:

(a) Ignorieren Sie die Zahlen auf der Zeichnung und färben Sie die Flächen mit vier Farben, sodass zwei aneinandergrenzende Flächen nie die selbe Farbe besitzen.

(b*) Beweisen Sie (ohne Zuhilfenahme computeralgebraischer Mittel!), dass eine solche Färbung für ein beliebiges "Malen nach Zahlen" Bild möglich ist.