Analysis III

Wintersemester 2009/2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 2 **Abgabe Montag 9.11. 2009**

(1) Benutzen Sie die Methode der Picard'schen Iteration, um das AWP

$$Y' = AY, \qquad Y(0) = \mathbb{I} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\mathbb{I}$ der Identitätsmatrix zu lösen.

Hinweis: Definieren Sie $Y_o(t) := Y(0)$ und $Y_{n+1}(t) := Y(0) + \int_0^t AY_n(s)ds$ und berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} Y_n(t)$.

(2) Zeigen Sie mit Hilfe der Theorie der Differentialgleichungen, dass für jede $m \times m$ Matrix A und für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(sA)\exp(tA) = \exp((s+t)A).$$

(3) Sei der Punkt A durch ein 'Gummiband' mit dem Ursprung verbunden und bewege sich gradlinig mit konstanter Geschwindigkeit u vom Ursprung weg. Auf dem Gummiband bewege sich ein weiterer Punkt B mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zum Gummiband. Für welche v holt der Punkt B den Punkt A in endlicher Zeit ein?

(4) Betrachten Sie das homogene lineare DGL-System 1. Ordnung

$$y' = Ay$$

mit einer reellen quadratischen Matrix A.

a.) Zeigen Sie, dass für jede komplexe Lösung ϕ der Realteil $\mathrm{Re}(\phi)$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}(\phi)$ auch Lösungen sind.

b.) Lösen Sie nun das AWP für

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad y(0) = (1,1).$$

Hinweis: Diagonalisieren Sie A und verwenden Sie Aufgabenteil a.).