Höhere Analysis II

Wintersemester 2018/2019 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 8 **Abgabe Donnerstag 13.12.2018**

(1) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f \in L^1([a, b])$ gegeben. Zeigen Sie, daß die Funktion

$$F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},\ F(x) = \int_{[0,x]} f d\lambda,$$

absolut stetig ist. Hinweis: Approximieren Sie f durch beschränkte Funktionen. (Erinnerung: Es heißt $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ absolut stetig, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \varepsilon$$

für alle disjunkten Intervalle $I_k = [\alpha_k, \beta_k) \subset [a, b]$ mit $\sum_{k=1}^{n} |I_k| < \delta$.)

(2) Sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum (d.h. ein Hausdorffraum, in dem jeder Punkt eine kompakte Umgebung hat). Sei $x \in X$ beliebig und U eine Umgebung von x. Zeigen Sie, daß eine kompakte Umgebung V von x mit $V \subset U$ existiert.

(3) Sei K ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, daß K das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (d.h. eine Folge (U_n) offener Mengen existiert, sodaß jede offene Menge eine Vereinigung von Mengen aus der Folge ist).

(4) (a) Sei X ein topologischer Raum und $\Lambda : C_b(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein positives Funktional. Zeigen Sie, daß Λ stetig ist.

(b) Sei X ein topologischer Raum und $\Lambda : C_0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$ ein positives lineares Funktional. Zeigen Sie, daß Λ stetig ist.