

Analysis III - Notizen ¹

Daniel Lenz

Jena - Wintersemester 2017 / 2018

¹Es handelt sich nicht um ein Skriptum zur Vorlesung. Besonderer Dank an Erik Hebestreit, Fabian Heisler und Jürgen Reiter für die Arbeit an einer früheren Fassung und das Anfertigen der Zeichnungen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Etwas zu Kurvenintegralen	5
1. Kurven und ihre Laenge	5
2. Kurvenintegrale	9
3. Gradientenfelder	11
Kapitel 2. Etwas Integrationstheorie	19
Probleme des Riemann-Integrals	19
1. Prämaße	20
2. Integrale von Elementarfunktionen	25
3. Cauchy Folgen von Elementarfunktionen	27
4. Integrierbare Funktionen und Integrale	32
5. Die berühmten Integralsätze	37
6. σ -Algebren, Messbarkeit und Masse	41
7. Der Satz von Fubini-Tonelli	45
Kapitel 3. Determinanten und Volumina	47
Kapitel 4. Transformationsformel und Koordinatensysteme im \mathbb{R}^N	53
Kapitel 5. Untermannigfaltigkeiten und Oberflächenintegrale	57
Kapitel 6. Der Satz von Stokes	71
Kapitel 7. Die klassischen Integralsätze	77
1. Grundlegende Groessen der Vektoranalysis	77
2. Die Sätze von Gauss und Green	78
3. Der Satz von Stokes in der Ebene	80
4. Der Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 .	81
Kapitel 8. Etwas Fourieranalysis	83
1. Die Fouriertransformation auf \mathbb{R}^N	83
2. Etwas Distributionentheorie	92
3. Die Fouriertransformation auf \mathbb{T}^N	96
4. Die allgemeine Fouriertransformation	103
Kapitel 9. Die Waermeleitungsgleichung	105
1. Herleitung der Waermeleitungsgleichung und formale Loesung	105
2. Die Waermeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^N .	106
3. Waermeleitungsgleichung auf einem Würfel - periodische Randbedingungen	110
Kapitel 10. Die Wellengleichung	113

Kapitel 11. Die Laplacegleichung

117

KAPITEL 1

Etwas zu Kurvenintegralen

In diesem Kapitel geht es um Kurven und Kurvenintegrale. Kurven spielen eine Rolle in verschiedenen Bereichen der Mathematik und Physik. Sie treten zum Beispiel bei der Beschreibung von Massepunkten in der klassischen Mechanik auf. Die Kurve beschreibt die Bewegung eines solchen Punktes und ihre Ableitung beschreibt die Geschwindigkeit. Mit dieser Anwendung im Sinn werden wir meist Differenzierbarkeit der Kurve vorausgesetzt. Wesentliche Themen des Kapitels sind die folgenden:

- Kurven und ihre Laenge.
- Kurvenintegrale ueber Vektorfelder und ihre Wegunabhaengigkeit.
- Homotopieinvarianz von Kurvenintegralen.

1. Kurven und ihre Laenge

DEFINITION (Kurve). *Eine Kurve in \mathbb{R}^N ist eine stetige Abbildung $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$, wobei I ein Interval in \mathbb{R} ist.*

Bemerkung. Man kann auch Kurven in der komplexen Ebene \mathbb{C} betrachten. Wegen $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wird dieser Fall hier nicht separat diskutiert. Die unten gezeigten Aussagen gelten entsprechend.

ABBILDUNG 1. Eine Kurve im Raum.



Bemerkung - Interpretation. Kurven beschreiben die Bewegungen von Massepunkten im Raum. Die Ableitung der Kurve (falls existent) beschreibt dann die Geschwindigkeit des Massepunktes. (--- > Klassische Mechanik).

Weitere Notation und Definitionen zu Kurven:

- Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve, so heisst $\gamma(a)$ der Anfangspunkt von γ und $\gamma(b)$ der Endpunkt.

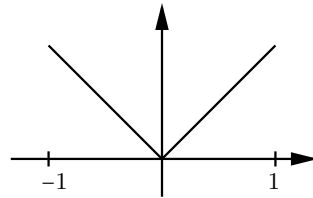
- Stimmen Anfangs- und Endpunkt der Kurve ueberein, so heisst die Kurve geschlossen.

- Zu einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ (oder \mathbb{C}) definieren wir die inverse Kurve $\tilde{\gamma} : [-b, -a] \rightarrow \mathbb{R}^N$, $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(-t)$. Ist γ (stueckweise) stetig diffbar, so auch $\tilde{\gamma}$,

- Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ heisst stueckweise stetig differenzierbar, wenn es $n \in \mathbb{N}$ und Intervalle I_j , $j = 1, \dots, n$, gibt mit $I = \bigcup_{j=1}^n I_j$, sodass die Einschränkungen von γ auf die I_j stetig differenzierbar sind. (Hierbei ist natuerlich vor allem der Fall von Interessen, in denen die I_j , $j = 1, \dots, n$, bis auf Randpunkte paarweise disjunkt sind.)

Bemerkung - Vorsicht! Auch wenn γ stetig diffbar ist, kann doch $\gamma([a, b])$ einen Knick haben.

- *Beispiel - Neilsche Parabel*: $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ (Zeichnung).
- *Betragspotenz* $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t^3, |t|^3)$



Physikalische Interpretation: Massepunkt wird immer langsamer und dreht sich dann bei Geschwindigkeit Null auf der Stelle.

Es ist oft sinnvoll Kurven als 'gleich' aufzufassen, wenn das Bild uebereinstimmt und sie sich nur die Geschwindigkeit beim Durchlaufen verschieden ist. Das fuehrt auf folgende Definition.

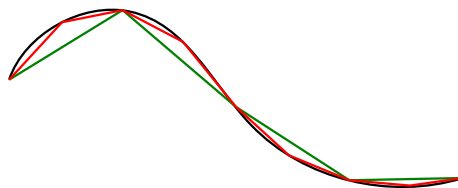
DEFINITION (Aequivalenz von Kurven). Zwei Kurven $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ und $\varrho : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^N$ heissen *aequivalent*, wenn es ein ein strikt wachsendes stetiges bijektives $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ gibt mit $\gamma = \varrho \circ \varphi$.

Bemerkung. Manchmal werden die von uns als Kurve bezeichneten Objekte als 'Weg' bzw. 'parametrisierte Kurve' bezeichnet und dann Klassen im obigen Sinne aequivalenter Wege unter dem Begriff 'Kurve' zusammengefaßt.

Wir kommen nun zum Begriff der Kurvenlaenge (= Wegstrecke, die von einem Massepunkt zurueckgelegt wird).

Dabei ist die *Idee* folgende:

- Approximiere Kurve durch Polygonzug. (Zeichnung.)
- Berechne Laenge des Polygonzugs.
- Bilde Grenzwert.



Hier sind die Details: Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve und $Z = (t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n)$ eine Zerlegung von $[a, b]$ (d.h. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$), so definiert man

$$L_Z(\gamma) = \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|.$$

DEFINITION (Rektifizierbarkeit). Die Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$) heisst rektifizierbar, wenn gilt

$$\sup_Z L_Z(\gamma) < \infty.$$

In diesem Fall definiert man die Laenge $L(\gamma)$ der Kurve als das angegebene Supremum.

Bemerkung. Ist die Kurve γ nicht rektifizierbar, so kann man die uneigentliche Laenge von γ definieren durch $L(\gamma) = \infty = \sup_Z L_Z(\gamma)$.

Das Supremum in der Definition kann man sich als eine Art Grenzwert vorstellen (und das passt zu der anfangs geschilderten Idee zur Kurvenlaenge). Um das genauer fassen zu koennen, erinnern wir zunaechst kurz an den Begriff des Grenzwertes ueber Zerlegungen: Sei I ein beschraenktes abgeschlossenes Intervall in \mathbb{R} und F eine komplexwertige Funktion auf den Zerlegungen von I . Dann heisst A der Grenzwert von F ueber die Zerlegungen, geschrieben als

$$A = \lim_{|Z| \rightarrow 0} F(Z),$$

wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine $\delta > 0$ existiert mit

$$|F(Z) - A| \leq \varepsilon$$

fuer alle Zerlegungen Z von I mit Feinheit $|Z| \leq \delta$. Hierbei ist die Feinheit $|Z|$ einer Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ definiert als

$$|Z| = \max\{t_j - t_{j-1} : j = 1, \dots, n\}.$$

THEOREM (Kurvenlaenge als Grenzwert). Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine Kurve. Dann sind aequivalent:

- (i) Es ist γ rektifizierbar.
- (ii) Es existiert $\lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$.

In diesem Fall gilt $L(\gamma) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$.

Bemerkung. Ein ganz aehnlicher Satz ist uns schon im Zusammenhang mit Riemann-integrierbaren Funktionen begegnet.

Beweis. (ii) \implies (i): Sei $L := \lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$L_Z(\gamma) \leq L + 1$$

fuer alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ mit $|Z| < \delta$. Ist nun eine beliebige Zerlegung Z' gegeben, so koennen wir aus dieser durch Hinzufuegen von Punkten eine Zerlegung Z'' erhalten mit $|Z''| < \delta$. Durch Hinzufuegen von Punkten kann die Laenge des entsprechenden Polygonzuges sich aber hoechstens ver-groessern. Damit gilt also

$$L_{Z'}(\gamma) \leq L_{Z''}(\gamma) \leq L + 1.$$

Da Z' beliebig war, folgt also die Rektifizierbarkeit von γ .

(i) \implies (ii): Wir zeigen: $L(\gamma) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$. (Das beweist dann auch gleichzeitig den letzten Teil der Aussage des Theorems.) Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es eine Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ mit

$$L(\gamma) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L_Z(\gamma) \leq L(\gamma).$$

Da γ auf dem kompakten $[a, b]$ gleichmaeÙig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|\gamma(s) - \gamma(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

fuer alle $s, t \in [a, b]$ mit $|s - t| < \delta$. Waehlt man nun eine Zerlegung Z' mit $|Z'| < \delta, |Z|$, so gilt dann also

$$L(\gamma) \geq L_{Z'}(\gamma) \geq L_Z(\gamma) - (n+1)\delta \geq L(\gamma) - \varepsilon.$$

Das zeigt (ii). \square

Bemerkung. Erlaubt man auch Kurven mit unendlicher Laenge und passt man das Konzept des Grenzwertes ueber Zerlegungen in der naheliegenden Weise an, um auch den Wert ∞ zuzulassen, so gilt die im Theorem behauptete Aussage $L(\gamma) = \lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma)$ fuer alle Kurven.

In dieser Vorlesung werden wir das vorangehende Theorem nicht direkt benutzen, sondern stattdessen mit (stueckweise) stetig differenzierbaren Kurven arbeiten. Das folgende Theorem zeigt, dass diese Kurven rektifizierbar sind und liefert auch eine Formel zur Berechnung der Laenge. Fuer die Anwendung ist es meist keine Einschraenkung, nur (stueckweise) stetig differenzierbaren Kurven betrachten.

THEOREM (Berechnen der Kurvenlaenge fuer glatte Kurven). *Ist $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ stueckweise stetig diffbar, so ist γ rektifizierbar, und es gilt*

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \left(\sum_{j=1}^N \gamma_j'(t)^2 \right)^{1/2} dt.$$

Bemerkung. In der Interpretation der Bewegung eines Massepunktes ist γ' die Geschwindigkeit des Massepunktes. Der Satz sagt also, dass der Weg das Integral ueber den Betrag der Geschwindigkeit ist (wie es ja auch sein sollte).

Beweis. Ohne Einschraenkung sei γ stetig differenzierbar (andernfalls kann man 'stueckweise' argumentieren). Wir zeigen,

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} L_Z(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Damit folgt dann nach dem vorangehenden Theorem Rektifizierbarkeit der Kurve und die gewuenschte Formel fuer die Laenge.

Das folgt im wesentlichen aus dem Mittelwertsatz und der gleichmaessigen Stetigkeit von $|\gamma'|$. Hier sind die Details: Mit dem Mittelwertsatz folgt

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{|\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)|}{t_{j+1} - t_j} (t_{j+1} - t_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left| (\gamma_1'(\tilde{t}_j^1), \dots, \gamma_N'(\tilde{t}_j^N)) \right| (t_{j+1} - t_j) \end{aligned}$$

mit geeigneten $t_j \leq \tilde{t}_j^s \leq t_{j+1}$ fuer $s = 1, \dots, N$. Aufgrund der gleichmaessigen Stetigkeit von γ' wird damit dann

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^{n-1} |\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)| - \int_a^b |\gamma'(t)| dt \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} |(\gamma'_1(\tilde{t}_j^1), \dots, \gamma'_N(\tilde{t}_j^N))| (t_{j+1} - t_j) - \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)| dt \right| \\ & \leq \sum_{j=0}^{n-1} \left| |(\gamma'_1(\tilde{t}_j^1), \dots, \gamma'_N(\tilde{t}_j^N))| (t_{j+1} - t_j) - \int_{t_j}^{t_{j+1}} |\gamma'(t)| dt \right| \end{aligned}$$

klein, wenn die Zerlegung nur eine genuegend kleine Feinheit besitzt. Das liefert die gewuenschte Aussage. \square

2. Kurvenintegrale

Wir kommen nun zum Kurvenintegral. Das Kurvenintegral beschreibt (zum Beispiel) die Arbeit/ Energie die die Bewegung eines Massepunktes in einem Vektorfeld kostet / liefert. Wie ueblich nennen wir dabei eine auf $U \subset \mathbb{R}^N$ definierte Funktion F mit Werten in \mathbb{R}^N ein Vektorfeld (oder auch 'Kraftfeld').

Idee. Ist die Kraft konstant und verlaeuft die Bewegung entlang einer Gerade, so gilt

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft (inWegrichtung)} \times \text{Weg} = \langle \text{Kraft}, \text{Weg} \rangle.$$

Sei nun ein stetiges Kraftfeld $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ gegeben und ein Partikel, der sich entlang dem stetigen γ bewegt. Dann sind approximativ (da F stetig und γ stetig) F und γ lokal konstant und die Arbeit gegeben (Zeichnung)

$$\begin{aligned} \text{Arbeit} &\approx \sum_{j=0}^{n-1} \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j) \rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \langle F(\gamma(t_j)), \frac{\gamma(t_{j+1}) - \gamma(t_j)}{t_{j+1} - t_j} \rangle (t_{j+1} - t_j). \end{aligned}$$

Macht man die Zerlegungen immer feiner so erhalt man ein Integral. Tatsaechlich gilt folgende Aussage.

PROPOSITION (Kurvenintegral als Grenzwert). *Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Dann existiert fuer jedes stueckweise stetig differenzierbare $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ der Grenzwert $\lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle$ und es gilt*

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Beweis. Wir zeigen

$$\lim_{|Z| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Dazu betrachten wir fuer eine Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ die Differenz

$$\sum_{j=1}^n \langle F(\gamma(t_j)), \gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1}) \rangle - \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

In der Norm kann diese Differenz mittels Dreiecksungleichung leicht abgeschätzt werden durch

$$\sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} |\langle F(\gamma(t_j)), \frac{1}{t_j - t_{j-1}} (\gamma(t_j) - \gamma(t_{j-1})) \rangle - \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle| dt.$$

Mit dem Mittelwertsatz und der gleichmaessigen Stetigkeit der Funktionen $F \circ \gamma$ und γ' auf $[a, b]$ folgt dann, dass der gewünschte Term beliebig klein wird, wenn nur $|Z|$ genuegend klein ist (evtl. Details). \square

Die vorangehende Proposition legt folgende Definition nahe.

DEFINITION (Kurvenintegral fuer glatte Kurven). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein stetiges Vektorfeld. Dann definiert man fuer jedes stueckweise stetig differenzierbare $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ das Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} F d\gamma := \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \sum_{j=1}^N F_j(\gamma(t)) \gamma'_j(t) dt.$$

Bemerkung (Kurvenintegral fuer rektifizierbare Kurven). Man kann tatsaechlich das Kurvenintegral fuer alle rektifizierbaren Kurven durch den entsprechenden Grenzwert definieren. Dann gelten fuer das so definierte Kurvenintegral ebenfalls die weiter unten gezeigten Aussagen. Wir diskutieren dies hier nicht weiter.

Bemerkung (Beziehung Kurvenintegral und Kurvenlaenge). Ist $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ eine stueckweise stetige Kurve und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig mit

$$F(\gamma(t)) = \frac{1}{|\gamma'(t)|} \gamma'(t)$$

(d.h. F ist in den Punkten der Kurve gerade das normalisierte Tangentialfeld), so gilt offenbar

$$\int_{\gamma} F d\gamma = L(\gamma).$$

Im allgemeinen wird es allerdings zu einer gegebenen Kurve kein solches F geben (da zu verschiedenen Werten von t der Wert der zugehoerigen $\gamma(t)$ uebereinstimmen kann, ohne dass $\gamma'(t)$ uebereinstimmt).

Bemerkung (Verschiedene Notationen) In der (physikalischen) Literatur finden sich zahlreiche weitere Schreibweisen fuer das Kurvenintegral.

Kurvenintegrale aendern sich nicht, wenn man dieselbe Kurve mit unterschiedlicher Geschwindigkeit durchlauft:

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Sind $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ und $\varrho : [c, d] \rightarrow U$ äquivalente, stetig differenzierbare Kurven, so gilt $\int F d\gamma = \int F d\varrho$.

Beweis. Sei $\gamma = \varrho \circ \varphi$. Sei $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$. Sei $t'_k := \varphi(t_k)$. Dann ist $Z' : c = t'_0 < t'_1 < \dots < t'_n = d$ eine Zerlegung von $[c, d]$. Da φ stetig also auch gleichmaessig stetig ist, wird die Feinheit

von Z' beliebig klein, wenn die Feinheit von Z beliebig klein wird. Damit ist dann (fuer genuegend feine Z) sowohl

$$S_Z(\gamma) := \sum_{k=1}^n \langle F(\gamma(t_k)), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle$$

eine gute Naehung von $\int F d\gamma$ als auch

$$S_{Z'}(\varrho) := \sum_{k=1}^n \langle F(\varrho(t'_k)), \varrho(t'_k) - \varrho(t'_{k-1}) \rangle$$

eine gute Naehung von $\int F d\varrho$. Es gilt aber nach Konstruktion

$$S_Z(\gamma) = S_{Z'}(\varrho).$$

Damit folgt die Behauptung. \square

Ersetzt man in einem Kurvenintegral die Kurve durch ihr Inverses so aendert sich lediglich das Vorzeichen:

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ stueckweise stetig differenzierbar. Dann ist auch die inverse Kurve $\tilde{\gamma}$ stueckweise stetig differenzierbar und es gilt

$$L(\gamma) = L(\tilde{\gamma})$$

sowie

$$\int_{\gamma} F d\gamma = - \int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}$$

fuer jedes stetige $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Beweis. Offenbar gilt

$$\tilde{\gamma}'(t) = -\gamma'(-t).$$

Damit folgen die gewuenschten Aussagen leicht. \square

3. Gradientenfelder

Im folgenden Teil des Kapitels geht es darum, ob (bei gegebenem Vektorfeld) das Kurvenintegral nur von Anfangs und Endpunkt der Kurve (und nicht dem Verlauf der Kurve) abhaengt. Wenn das der Fall ist, spricht man von 'Wegunabhaengigkeit des Kurvenintegrals'. Dabei handelt es sich also um eine Eigenschaft des Vektorfeldes. Wenn es um Vektorfelder geht, die zur Beschreibung von Arbeit/ Energie verwendet werden ('Kraftfelder'), sollte diese Eigenschaft gelten, da man sonst Energie gewinnen kann.

Fuer die weitere Untersuchungen benoetigen wir noch ein weiteres Konzept.

DEFINITION (Gradientenfeld). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine stetige Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ heisst Gradientenfeld, wenn es ein stetig differenzierbares $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\nabla\varphi = F$. Ein solche φ heisst dann Potential von F .

Ist φ ein Potential zu F , so ist offenbar auch $\varphi + const$ ein Potential zu F . Im wesentlichen ist das die einzige Freiheit, wie die folgende Proposition zeigt.

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhaengend und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Sind φ_1 und φ_2 Potentiale zu F , so gilt $\varphi_1 - \varphi_2 = constant$.

Beweis. Das wissen wir schon aus dem vorigen Semester. Zur Sicherheit ;-)
geben wir noch einen Beweis. Sei $\psi := \varphi_1 - \varphi_2$. Dann gilt $\nabla\psi = F - F = 0$.
Seien x und y beliebige Punkte in U . Zu zeigen: $\psi(x) = \psi(y)$.

Da U offen und zusammenhaengend ist, existiert eine stueckweise stetig
differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow U$ von x nach y . Dann gilt

$$\psi(y) - \psi(x) = \psi(\gamma(b)) - \psi(\gamma(a)) = \int_a^b (\psi \circ \gamma)'(t) dt = 0$$

(da $(\psi \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla\psi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0$). Damit folgt die Behauptung. \square

Damit koennen wir die folgende Charakterisierung beweisen.

THEOREM. (*Abstrakte Charakterisierung Gradientenfeld bzw. Wegunabhaen-
gigkeit des Kurvenintegral*) Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Sei $F: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig. Dann
sind aequivalent:

- (i) Fuer jedes (stueckweise) stetig diffbare γ haengt $\int_\gamma F d\gamma$ nur von
Anfangs und Endpunkt von γ ab.
- (ii) Ist γ eine geschlossene (stueckweise) stetig diffbare Kurve, so gilt
 $\int_\gamma F d\gamma = 0$.
- (iii) Es ist F ein Gradientenfeld (d.h. es existiert ein stetig diffbares
 $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $F = \nabla\varphi$).

In diesem Fall gilt $\int_\gamma F d\gamma = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a))$.

Beweis. (i) \implies (ii): Sei γ eine geschlossene Kurve. Offenbar hat $\tilde{\gamma}$ denselben
Anfangs/Endpunkt wie γ . Damit folgt aus (i)

$$\int_\gamma F d\gamma = \int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}.$$

Wie wir oben gesehen hatten gilt ausserdem

$$\int_\gamma F d\gamma = - \int_{\tilde{\gamma}} F d\tilde{\gamma}.$$

Damit folgt $\int_\gamma F d\gamma = 0$.

(ii) \implies (i): Sind γ, ϱ zwei (stueckweise) stetig diffbare Kurven mit gleichem
Anfangs und Endpunkt so kann man γ mit $\tilde{\varrho}$ zu einer geschlossenen Kurve
 σ zusammensetzen (Zeichnung). Dann gilt natuerlich

$$\int_\sigma F d\sigma = \int_\gamma F d\gamma + \int_{\tilde{\varrho}} F d\tilde{\varrho}.$$

Damit folgt dann nach (ii)

$$0 = \int_\sigma F d\sigma = \int_\gamma F d\gamma + \int_{\tilde{\varrho}} F d\tilde{\varrho} = \int_\gamma F d\gamma - \int_\varrho F d\varrho.$$

(i) \implies (iii): Ohne Einschraenkung sei U wegzusammenhaengend (sonst koenen
wir auf jeder Komponente einzeln argumentieren). Sei $p \in U$ fest. Fu-
er jedes $x \in U$ sei γ_x eine stetig diffbare Kurve von p nach x . Definiere
 $\varphi(x) := \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$. Aufgrund der Voraussetzung (i) gilt

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_{\gamma_h} F d\gamma_h$$

mit $\gamma_h : [0, h] \rightarrow U$, $\gamma_h(t) = x + te_j$. (Zeichnung.) Es gilt (wie wir schon beweisen haben) $\gamma_h'(t) = e_j$. Damit folgt also

$$\varphi(x + he_j) - \varphi(x) = \int_0^h \langle F(\gamma_h(t)), e_j \rangle dt = \int_0^h F_j(x + te_j) dt.$$

Da $t \mapsto F_j(x + te_j)$ stetig ist, folgt aus dem HDI

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(x + he_j) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h F_j(x + te_j) dt = F_j(x).$$

(iii) \implies (i): Nach Voraussetzung gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F d\gamma &= \int_a^b \langle \nabla \varphi(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ (\text{s.o.}) &= \int_a^b (\varphi \circ \gamma)'(t) dt \\ (\text{HDI}) &= \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)). \end{aligned}$$

Die letzte Aussage wurde im Beweis von (iii) \implies (i) mitbewiesen. \square

Aus dem vorangehenden Theorem folgt eine Vorschrift zum Berechnen des Potentials eines Vektorfeldes (wenn ein solches Potential existiert).

FOLGERUNG (Berechnung des Potentials). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und zusammenhängend und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein Gradientenfeld. Sei $p \in U$ beliebig und zu jedem $x \in U$ eine stetig diffbare Kurve γ_x von p nach x gewählt. Dann definiert $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x$$

ein Potential von F .

Beweis. Variante 1: Das wurde im Beweis von (iii) \implies (i) des vorigen Theorems mitbewiesen.

Variante 2: Sei ψ ein Potential von F (d.h. $\nabla \psi = F$). Dann gilt nach der letzten Aussage des vorigen Theorem also

$$\varphi(x) = \int_{\gamma_x} F d\gamma_x = \psi(x) - \psi(p).$$

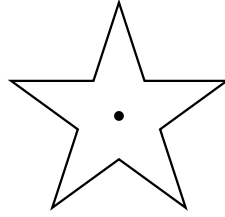
Damit folgt $\nabla \varphi = \nabla \psi = F$. \square

Das Hauptziel ist nun, ein einfach nachprüfbares Kriterium zu geben, wann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld ist (äquivalent: Kurvenintegrale ueber geschlossene Kurven verschwinden). Das erfordert noch einige Vorbereitung.

DEFINITION (Sternförmige Menge). Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ heisst sternfoermig, wenn es einen Punkt $p \in U$ gibt, so dass fuer jedes $x \in U$ die Verbindungsstrecke von p nach x ganz in U liegt. Dann heisst p Zentrum von U .

Beispiele.

- Jede Kugel ist sternfoermig.
- Ist U konvex, so ist U sternfoermig (mit $p \in U$ beliebig).
- Stern in \mathbb{R}^2 (s.o.)
- Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist nicht sternfoermig. (Bew. Die Verbindung von p zu $-p$ enthaelt 0. Widerspruch).



- Die Menge $\mathbb{R}^2 \setminus \{(-t, 0) : t \geq 0\}$ ist sternfoermig (zu $p = (1, 0)$ beispielsweise). Zeichnung.

Bemerkung. Die beiden letzten Beispiele zeigen: Eine Menge kann durch 'Weglassen von Punkten' sternfoermig werden. Man kann z.B. $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ersetzen durch $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$. So kann man oft Potentiale auf Teilmengen von U erhalten.

THEOREM (Lemma von Poincaré). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und sternfoermig. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist F genau dann ein Gradientenfeld wenn gilt $\partial F_j / \partial x_i = \partial F_i / \partial x_j$ fuer alle i, j .

Beweis. \implies : Sei $F = \nabla \varphi$ stetig diffbar. Dann ist also φ zweimal stetig diffbar und es gilt nach dem Satz von Schwarz und der Voraussetzung:

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}.$$

\impliedby : Ohne Einschraenkung sei 0 das Zentrum von U . Zu $x \in U$ waehlen wir die stetig differenzierbare Kurve $\gamma(t) = tx$ und definieren

$$\phi(x) := \int_0^1 \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^N F_j(\gamma(t)) x_j dt.$$

(Wenn F ein Potential besitzt, so muss es durch dieses ϕ gegeben sein.) Nun muessen wir die Ableitung von ϕ nach den x_k bestimmen. Die Summe liefert eine Funktion, deren Ableitung nach x_k stetig in x_k und t ist. Daher koennen wir Integration und Differentiation (nach x_k) vertauschen und erhalten

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \int_0^1 \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_k} (F_j(tx) x_j) dt.$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^N F_j(tx) x_j &= F_k(tx) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_j}{\partial x_k}(tx) t x_j \\ \text{(Voraussetzung)} &= F_k(tx) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(tx) t x_j \\ \text{(Produktregel)} &= \frac{d}{dt} (t F_k(tx)). \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_k} = \int_0^1 \frac{d}{dt} (t F_k(tx)) dt = t F_k(tx) \Big|_0^1 = F_k(x).$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung.

- Ist U nicht sternfoermig, so folgt aus $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$ fuer alle i, j im allgemeinen nicht, dass F ein Gradientenfeld ist (Uebung).
- Auch auf nichtsternfoermigen Mengen kann ein Vektorfeld ein Gradientenfeld sein. Z.B. ist das Gravitationsfeld $F(x) = x/|x|^3$ definiert auf $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ ein Gradientenfeld (Uebung).

Zur weiteren Untersuchung fuehren wir eine abgeschwaechte Version des Konzeptes des Gradientenfeldes ein.

DEFINITION (Lokales Gradientenfeld). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine stetig differenzierbare Funktion $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ heisst lokales Gradientenfeld, wenn zu jedem $x \in U$ ein $R > 0$ existiert, so dass die Einschraenkung $F|_{B_R(x)}$ von F auf $B_R(x)$ ein Gradientenfeld ist.

Da jede Kugel sternfoermig ist, folgt aus dem Lemma von Poincaré sofort folgende Folgerung.

FOLGERUNG. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar. Dann sind aequivalent:

- F ist ein lokales Gradientenfeld.
- Es gilt $\partial F_j/\partial x_i = \partial F_i/\partial x_j$ fuer alle i, j .

Wir untersuchen nun Invarianz des Kurvenintegrals fuer lokale Gradientenfelder. Die Grundidee ist dabei, dass Kurven, die stetig ineinander ueberfuehrt werden koennen, gleiche Kurvenintegrale haben und dass in Mengen 'ohne Loecher' Kurven gut ineinander ueberfuehrt werden koennen. Das wird schliesslich auf den Satz fuehren, dass in Mengen 'ohne Loecher' jedes lokale Gradientenfeld auch ein globales Gradientenfeld ist. In Mengen mit Loechern gilt diese Aussage nicht. *Zeichnung* Um das praezise auszufuehren brauchen wir den Begriff der Homotopie.

DEFINITION (Homotopie). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamen Endpunkt B heissen homotop in U , wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$$

gibt mit

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

fuer alle $t \in [a, b]$ sowie

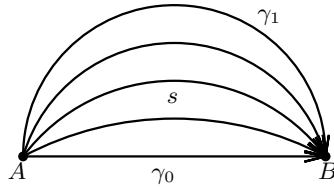
$$H(a, s) = A, \quad H(b, s) = B$$

fuer alle $s \in [0, 1]$.

Beispiel. Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow U$ Kurven mit gleichem Anfangspunkt und gleichem Endpunkt, so dass fuer jedes $t \in [a, b]$ die Verbindungsstrecke von $\gamma_0(t)$ nach $\gamma_1(t)$ ganz in U liegt, so sind γ_0 und γ_1 homotop mit

$$H(t, s) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t).$$

Das gilt zum Beispiel immer, wenn U konvex ist.



THEOREM (Homotopieinvarianz des Kurvenintegral - I). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ Kurven mit gemeinsamem Anfangspunkt A und gemeinsamen Endpunkt B . Sind γ_0 und γ_1 homotop in U , so gilt fuer jedes lokale Gradientenfeld F auf U

$$\int_{\gamma_0} F d\gamma_0 = \int_{\gamma_1} F d\gamma_1.$$

Beweis. Sei $H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$ eine Homotopie zwischen γ_0 und γ_1 in U . Sei $\mathcal{B} := \{B_i\}$ eine Ueberdeckung von U durch offenen Kugeln, so dass F auf jedem Element von \mathcal{B} ein Potential besitzt.

Behauptung. Es gibt Zerlegungen $Z : a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ und $Z' : 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_q = 1$, so dass jedes $H([t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}])$ ganz in einer Kugel aus \mathcal{B} enthalten ist.

Bew. Angenommen nein. Dann unterteilen wir fuer jedes $m \in \mathbb{N}$ sowohl $[a, b]$ also auch $[0, 1]$ in m gleichlange Intervalle und damit $[a, b] \times [0, 1]$ in m^2 Rechtecke. Nach Annahmen koennen wir dann ein Rechteck R_m finden, so dass $H(R_m)$ nicht in einer der Kugeln aus \mathcal{B} enthalten ist. Die Mittelpunkte x_m der R_m liegen alle in der kompakten Menge $[a, b] \times [0, 1]$. Sie haben also eine konvergente Teilfolge. Ohne Einschraenkung

$$x_m \rightarrow p.$$

Sei nun B_0 eine Kugel aus \mathcal{B} mit $H(p) \in B_0$. Aufgrund der Stetigkeit von H liegt dann $H(R_m)$ in B_0 fuer alle genuegend grossen m . *Zeichnung.*

Seien Z, Z' gemaess der Behauptung gewaehlt. Seien

$$P_{ij} := H(t_i, s_j)$$

$\Gamma_{ij} :=$ Strecke von P_{ij} nach $P_{i+1,j}$.

$\sigma_{ij} :=$ Strecke von P_{ij} nach $P_{i,j+1}$.

Zeichnung. y -Achse entspricht j - Achse, x -Achse entspricht i -Achse.

Es liegen nach Voraussetzung $P_{ij}, P_{i,j+1}, P_{i+1,j}, P_{i+1,j+1}$ alle in einer Kugel aus \mathcal{B} . Mit $I(\alpha) := \int F d\alpha$ und $I_j := \sum_{i=0}^{k-1} I(\Gamma_{ij})$ gilt dann (Zeichnung! Nullwege addieren!)

$$I_j = I_{j+1}$$

fuer alle $j = 0, \dots, q-1$. Also folgt $I_0 = I_q$. Nach Konstruktion gilt aber

$$\int F d\gamma_0 = I_0 = I_q = \int F d\gamma_1.$$

□

Bemerkung. H wird lediglich als stetig vorausgesetzt. Daher sind im allgemeinen fuer s die Abbildungen $t \mapsto H(s, t)$ keine stetig differenzierbaren Kurven. Aus diesem Grund muessen wir mit den Verbindungstrecken arbeiten.

Wir stellen nun noch eine Variante dieses Satzes fuer geschlossenen Kurven vor.

DEFINITION (Freie Homotopie). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Zwei geschlossene Kurven $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ heissen frei homotop in U , wenn es eine stetige Abbildung

$$H : [a, b] \times [0, 1] \rightarrow U$$

gibt mit

$$H(t, 0) = \gamma_0(t), \quad H(t, 1) = \gamma_1(t)$$

fuer alle $t \in [a, b]$ sowie

$$H(a, s) = H(b, s)$$

fuer alle $s \in [0, 1]$. Zeichnung. 'Rechteck' Abbildung H 'kreisringige Kurven'.

Ganz aehnlich wie oben, kann man dann folgenden Satz beweisen:

THEOREM (Homotopieinvarianz des Kurvenintegral - II). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Seien $\gamma_1, \gamma_0 : [a, b] \rightarrow U$ geschlossene Kurven. Sind γ_0 und γ_1 frei homotop in U so gilt fuer jedes lokale Gradientenfeld F auf U

$$\int F d\gamma_0 = \int F d\gamma_1.$$

Beweis. Der Beweis kann analog zum Beweis des vorigen Theorems gefuehrt werden. Wir geben nur eine Zeichnung. \square

DEFINITION. Eine Menge U in \mathbb{R}^N heisst einfach zusammenhaengend, wenn jede geschlossene Kurve frei homotop in U zu einer Kurve ist, die nur einen Punkt enthaelt.

Bemerkung. (a) Grob gesprochen bedeutet 'einfache zusammenhaengend', dass die Menge keine Loecher besitzt.

(b) Jede sternfoermige Menge ist einfach zusammenhaengend. (Jede geschlossene Kurve kann zum Zentrum zusammengezogen werden.) Es gibt aber einfach zusammenhaengende Mengen, die nicht sternfoermig sind (Beispiel: Zeichnung nichtkonvexe Deformation einer Kreisscheibe.)

(c) Es ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhaengend. (Es ist gar nicht so einfach, das zu beweisen. Wir werden es als Nebenprodukt aus dem folgenden Satz erhalten.)

Damit kommen wir nun zum ultimativen Satz ueber Gradientenfelder.

THEOREM (Charakterisierung Gradientenfelder). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und einfach zusammenhaengend. Dann ist ein stetig differenzierbare $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ genau dann ein Gradientenfeld, wenn gilt $\partial F_j / \partial x_k = \partial F_k / \partial x_j$ fuer alle $j, k = 1, \dots, N$.

Beweis. Gilt $\partial F_j / \partial x_k = \partial F_k / \partial x_j$ fuer alle $j, k = 1, \dots, N$, so ist nach dem Poincaréschen Lemma F ein lokales Gradientenfeld. Sei nun γ eine geschlossene Kurve. Dann ist γ nach Voraussetzung in U frei homotop zu einer Kurve ρ , die nur aus einem Punkt besteht. Aufgrund des vorigen Satzes gilt dann

$$\int F d\gamma = \int F d\rho.$$

Da ρ nur einen Punkt trifft, verschwindet die rechte Seite. Damit verschwinden also alle Kurvenintegrale ueber geschlossene Wege. Nach der abstrakten Charakterisierung ist also F ein Gradientenfeld.

Die umgekehrte Implikation folgt sofort (und hat nichts mit Einfachem Zusammenhang zu tun). \square

Bemerkung. (Uebung) Man kann auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ein Vektorfeld F und einen geschlossenen Weg angeben, so das F ein lokales Gradientenfeld ist aber das Kurvenintegral ueber diesen geschlossenen Weg nicht verschwindet. Damit ist dann nach dem vorangehenden Theorem $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhaengend.

FOLGERUNG. Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhaengend. Sei $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetig diffbares Vektorfeld. Dann ist F genau dann ein Gradientenfeld, wenn die Rotation von F

$$\text{rot}F : U \rightarrow \mathbb{R}^3, (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

identisch verschwindet.

Bemerkung. Die vorangehenden Betrachtungen liefern bemerkenswerte Zusammenhaenge zwischen topologischen Eigenschaften einer Teilmenge U von \mathbb{R}^N und Loesbarkeit von Differentialgleichungen auf dieser Menge:

- Die Dimension des Raumes der Loesungen von $\nabla\varphi = 0$ (auf U) ist gerade die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von U . Insbesondere ist der Raum der Loesungen eindimensional, wenn U zusammenhaengend ist.
- Ist $U \subset \mathbb{R}^3$ einfach zusammenhaengend, so ist die Gleichung $\nabla\varphi = F$ fuer alle F mit $\text{rot}F = 0$ loesbar.

Zum Abschluss des Abschnittes geben wir noch einen Hinweis wie man ein Potential auffinden kann.

Hinweis zum Auffinden des Potential.

Variante 1: Integrieren entlang 'schoener' Wege.

Variante 2: Anwenden des HDI auf einzelne Komponenten und anschliessen des Vergleichen (mit Probe!)

Beispiel. (a) $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$. Dann gilt $\partial F_1 / \partial x_2 = 0 = \partial F_2 / \partial x_1$. Daher besitzt F nach dem Theorem ein Potential Φ . Wir haben

$$\partial_1 \Phi = x_1 \rightarrow \Phi(x) = x_1^2 / 2 + C(x_2).$$

$$\partial_2 \Phi = x_2 \rightarrow \Phi(x) = x_2^2 / 2 + D(x_1).$$

Das fuehrt auf $\Phi = 1/2(x_1^2 + x_2^2) + C$. Probe zeigt, dass es sich tatsaechlich um ein Potential handelt.

(b) $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(x) = c$ (mit einem $c \in \mathbb{R}^N$). Dann gilt

$$0 = \partial F_j / \partial x_i$$

fuer alle i, j . Tatsaechlich ist in diesem Fall $\varphi(x) = \langle c, x \rangle = \sum_{j=1}^N c_j x_j$ ein Potential, wie eine Probe zeigt.

KAPITEL 2

Etwas Integrationstheorie

Das Riemann-Integral weist eine Reihe von Problemen auf. In diesem Abschnitt lernen wir eine allgemeine Theorie der Integration kennen, die diese Probleme (großtenteils) umgeht. Grundobjekte sind (Präe)Masse und Integrale von Elementarfunktionen. Diese werden dann durch einen Vervollständigungsprozess zu Massen und Integralen von (messbaren) Funktionen fortgesetzt.

Genauer ist die Idee ist folgende: Sei eine Menge X gegeben.

- Ordne (geeigneten) Teilmengen A von X ein Volumen / Mass $\mu(A)$ zu.
- Definiere Integral auf Elementarfunktionen $f = \sum c_i 1_{A_i}$ durch $\int f d\mu := \sum c_i \mu(A_i)$.
- Setze fort. (Hier ist Arbeit zu leisten!)

Probleme des Riemann-Integrals

Das Riemann-Integral weist eine Reihe von Problemen auf. Dazu gehören folgende:

- Viele 'schöne' Funktionen sind nicht Riemann-integrierbar.
Beispiel: $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 0$ für x irrational und $f(x) = 1$ für x rational. Dann ist f überall 0 bis auf eine abzählbare Menge.
- Das Riemann-Integral ist nicht gut verträglich mit Grenzwerten. Es ist - im wesentlichen - nur verträglich mit gleichmäßiger Konvergenz.
Beispiel: Sei $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Sei $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f_n(x) = 1$ für $x \in \{q_1, \dots, q_n\}$, $f_n(x) = 0$ sonst. Dann ist (f_n) gleichmäßig beschränkt, jedes f_n ist Riemann-integrierbar mit $\int f_n dx = 0$, es konvergiert (f_n) gegen f (aus dem vorigen Punkt) punktweise und f ist nicht Riemann-integrierbar.
- Die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen ist nicht abgeschlossen unter Substitutionen.
Beispiel: Sei $\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ und $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Sei $f = 1_{(-\pi/2, \pi/2)}$. Dann ist f Riemann-integrierbar auf \mathbb{R} , aber die aus der Substitution entstehende Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f \circ \arctan \cdot \frac{1}{1+x^2}$ ist nur uneigentlich Riemann-integrierbar.

Bemerkung. Diese Nachteile werden in einer Dimension durch den großen Vorteil des Riemann-Integral, die Gültigkeit des HDI, ausgeglichen. In höheren Dimensionen trifft das nicht mehr zu.

1. Prämaße

DEFINITION. Sei X eine Menge. Eine Familie \mathcal{R} von Teilmengen von X heisst Mengenring auf X , wenn gilt:

- (R1) Die leere Menge \emptyset gehoert zu \mathcal{R} .
- (R2) Mit A, B in \mathcal{R} gehoert auch $A \cup B$ zu \mathcal{R} .
- (R3) Mit A, B in \mathcal{R} gehoert auch $A \setminus B$ zu \mathcal{R} .

Dann schreibt man auch (X, \mathcal{R}) fuer den Mengenring ueber X .

FOLGERUNG. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und seien A, B in \mathcal{R} . Dann gehoert auch $A \cap B$ zu \mathcal{R} .

Beweis. Es gilt $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$. □

Beispiele.

- Sei X eine beliebige Menge. Dann bildet die Menge der endlichen Teilmengen von X einen Mengenring.
- Sei $X = \mathbb{R}$. Dann bilden die Figuren d.h. die Vereinigungen von endlich vielen beschaenkten Intervallen einen Mengenring.
- Sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann bilden die Figuren d.h. die Vereinigungen von endlich vielen achsenparallelen Quadern einen Mengenring. (Es ist Q ein achsenparalleler Quader, wenn gilt $Q = I_1 \times \dots \times I_n$ mit Intervallen I_j .)

DEFINITION. Sei \mathcal{R} ein Mengenring auf X . Eine Funktion $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ heisst Praemass auf (X, \mathcal{R}) , wenn gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad (\sigma\text{-Additivitaet})$$

fuer alle Folgen (A_n) in \mathcal{R} mit

- $A_n \cap A_m = \emptyset$ fuer alle $n \neq m$ (' A_n paarweise disjunkt')
- $\bigcup A_n \in \mathcal{R}$ (Nicht selbstverstaendlich)

FOLGERUNG. Sei μ Praemass auf (X, \mathcal{R}) . Dann gilt

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ fuer alle A, B aus \mathcal{R} mit $A \cap B = \emptyset$.

Beweis. Es gilt $\emptyset = \bigcup_n \emptyset$. Damit folgt aus der σ -Additivitaet

$$\mu(\emptyset) = \sum_n \mu(\emptyset).$$

Damit folgt $\mu(\emptyset) = 0$. Nun folgt die zweite Aussage leicht, indem man die Mengen A_j definiert durch

$$A_1 := A, A_2 := B, A_n := \emptyset, \quad n \geq 2$$

und aus der σ -Additivitaet schliesst

$$\mu(A \cup B) = \mu(\bigcup A_j) = \sum \mu(A_j) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + 0 = \mu(A) + \mu(B).$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. Sei μ Praemass auf (X, \mathcal{R}) . Dann gilt:

- Fuer $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subset B$ gilt $\mu(A) \leq \mu(B)$.

- Gehoeren A_n , $n \in \mathbb{N}$, und A zu \mathcal{R} und gilt $A \subset \cup A_n$ so folgt $\mu(A) \leq \sum \mu(A_n)$.

Beweis. Erster Punkt: Setze $A_1 := A$ und $A_2 := B \setminus A$. Dann gilt nach der vorangehenden Folgerung.

$$\mu(B) = \mu(A_1) + \mu(A_2) \geq \mu(A_1) = \mu(A).$$

Zweiter Punkt: Definiere

$$A'_1 := A_1 \cap A, \quad A'_n := (A_n \cap A) \setminus \cup_{k=1}^{n-1} A'_k.$$

Dann gehoeren die A'_n zu \mathcal{R} und sind paarweise disjunkt mit

$$A'_n \subset A_n \quad \text{und} \quad A = \cup (A_n \cap A) = \cup A'_n.$$

Damit folgt also

$$\mu(A) = \sum \mu(A'_n) \leq \sum \mu(A_n).$$

Das beendet den Beweis. \square

Beispiele.

- Sei X eine beliebige Menge und \mathcal{R} ein beliebiger Mengenring und $p \in X$ beliebig. Dann definiert $\delta_p : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit $\delta_p(A) := 1$ falls $p \in A$ und $\delta_p(A) = 0$ sonst, ein Praemass. Es heisst die *delta-Funktion* in p (auch wenn es gar keine Funktion, sondern ein Praemass ist).
- Sei X eine beliebige Menge und \mathcal{R} der Mengenring der endlichen Teilmengen von X . Dann ist

$$\mu : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}_0, \quad \mu(A) := \text{Anzahl der Elemente von } A$$

ein Praemass. Es heisst das Zaehlpraemass.

- Sei $X = \mathbb{R}$ und \mathcal{R} der Mengenring der Figuren (d.h. der Vereinigungen von endlich vielen beschraenkten Intervallen). Fuer ein beliebiges Intervall I mit $(a, b) \subset I \subset [a, b]$ definiert man die Intervalllaenge $|I|$ durch

$$|I| = b - a.$$

Es laesst sich nun jedes A aus dem Mengenring als disjunkte endliche Vereinigung $A = \cup_{j=1}^n A_j$ von beschraenkten Intervallen schreiben und durch

$$\lambda : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty), \quad \lambda(A) := \sum_{j=1}^n |A_j|$$

wird ein Praemass auf \mathcal{R} definiert. Dieses heisst das Lebesguepraemass auf \mathbb{R} .

(Bew: Mit Induktion sieht man leicht, dass man jede Figur als diskunkte Vereinigung von Intervallen schreiben kann. Die Wohldefiniertheit von λ (i.e. Unabhaengigkeit von der gewaehlten Zerlegung in disjunkte Intervalle) folgt einfach.

Wir zeigen nun die σ -Additivitaet. Diese wird in drei Schritten bewiesen:

Schritt 1: Es ist λ monoton und endlich additiv.

Bew. Das folgt leicht.

Schritt 2: Zu jeder Figur A und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Figur K und eine offene Figur U mit

$$K \subset A \subset U \text{ und } \lambda(U) - \varepsilon \leq \lambda(A) \leq \lambda(K) + \varepsilon.$$

Bew. Das ist klar fuer Intervalle. Da jede Figur eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, folgt es dann fuer Figuren.

Schritt 3: Ist $A \in \mathcal{R}$ die disjunkte Vereinigung von $A_n \in \mathcal{R}$, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n) = \lambda(A).$$

Bew. \leq : Fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $\cup_{n=1}^k A_n \subset A$. Damit folgt mit Additivitaet und Monotonie von λ dann

$$\sum_{n=1}^k \lambda(A_n) = \lambda(\cup_{n=1}^k A_n) \leq \lambda(A).$$

(Die letzte Abschaetzung folgt einfach.)

\geq : Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Waehle nach Schritt 2 eine kompakte Figur C mit

$$C \subset A \text{ und } \lambda(A) \leq \lambda(C) + \varepsilon \quad (*).$$

Waehle nach Schritt 2 zu jedem A_n eine offene Figur U_n mit

$$A_n \subset U_n \text{ und } \lambda(U_n) \leq \lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (**).$$

Dann bilden die U_n , $n \in \mathbb{N}$, eine offene Ueberdeckung von C (und sogar von A). Aufgrund der Kompaktheit von C gibt es dann eine endliche Teilueberdeckung d.h. ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$C \subset \bigcup_{n=1}^k U_n. \quad (***)$$

Damit folgt dann:

$$\begin{aligned} \lambda(A) &\stackrel{(*)}{\leq} \lambda(C) + \varepsilon \\ ((**), \text{ Monotonie}) &\leq \lambda \bigcup_{n=1}^k U_n + \varepsilon \\ (\text{Endliche Additivitaet}) &\leq \sum_{n=1}^k \lambda(U_n) + \varepsilon \\ &\stackrel{(**)}{\leq} \sum_{n=1}^k \left(\lambda(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) + \varepsilon \\ &\leq \sum_{n=1}^k \lambda(A_n) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die gewuenschte Ungleichung.

- Sei $X = \mathbb{R}^N$. Eine Teilmenge I von \mathbb{R}^N heisst Intervall (oder achsenparalleler Quader), wenn es beschränkte eindimensionale Intervalle I_1, \dots, I_N gibt mit $I = I_1 \times \dots \times I_N$. Sei \mathcal{R} der Mengenring der Figuren (d.h. der Vereinigungen von endlich vielen achsenparallelen Quadern). Für ein Intervall $I = I_1 \times \dots \times I_N$ sei

$$|I| := \prod_{j=1}^N |I_j|.$$

Es lässt sich nun jede Figur A in disjunkte Quader zerlegen $A = \cup_{j=1}^n I_j$ und durch

$$\lambda : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty), \lambda(A) = \sum_{j=1}^n |I_j|$$

wird ein Prämass auf \mathcal{R} definiert. Dieses heisst das Lebesgueprämass auf \mathbb{R}^N .

(Bew. Das folgt wie im eindimensionalen Fall.)

- Sei $X = \mathbb{R}$ und \mathcal{R} der Mengenring der Figuren (d.h. der Vereinigungen von endlich vielen beschränkten Intervallen). Sei $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nichtfallende, rechtssetige Funktion. Setze

$$\phi(x+) := \lim_{y \rightarrow x+} \phi(y) = \phi(x), \quad \phi(x-) := \lim_{y \rightarrow x-} \phi(y).$$

Definiere nun für ein Intervall I

$$\mu(]a, b[) = \phi(b-) - \phi(a)$$

$$\mu(]a, b]) = \phi(b) - \phi(a)$$

$$\mu([a, b[) = \phi(b-) - \phi(a-)$$

$$\mu([a, b]) = \phi(b) - \phi(a-).$$

(d.h. es wird [uebersetzt in - und] in +).

Es lässt sich nun jedes A aus dem Mengenring als disjunkte endliche Vereinigung $A = \cup_{j=1}^n A_j$ von beschränkten Intervallen schreiben und durch

$$\mu = \mu_\phi : \mathcal{R} \longrightarrow [0, \infty), \quad \mu(A) := \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$$

wird ein Prämass auf \mathcal{R} definiert. Es heisst das Stieltjes-Prämass zu ϕ .

Bemerkung: Setzt man $\phi = id$, so erhält man gerade das Lebesgueprämass.

(Bew. Die nötigen Bestandteile wurden mehr oder weniger schon beweisen. Wir skizzieren nur den Beweis der σ -Additivität. Dazu zeigt man zunächst wieder folgendes:

Schritt 1: Zu jeder Figur A und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine kompakte Figur K und eine offene Figur U mit

$$K \subset A \subset U \quad \text{und} \quad \mu(U) - \varepsilon \leq \mu(A) \leq \mu(K) + \varepsilon.$$

Bew. Das ist einfach für Intervalle. Da jede Figur eine endliche disjunkte Vereinigung von Intervallen ist, folgt es dann für Figuren.

Anschließend zeigt man dann in *Schritt 2* die σ -Additivitaet von μ wie bei im Falle des eindimensionalen Lebesgue Praemass.

Wir kommen nun noch zu einem wichtigen Konzept, das beschreibt, was wir vernachlaessigen duerfen.

DEFINITION (Nullmenge). *Sei μ ein Praemasß auf dem Mengenring (X, \mathcal{R}) . Eine Teilmenge $N \subset X$ heisst μ -Nullmenge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (A_n) in \mathcal{R} existiert mit*

$$N \subset \bigcup_n A_n \text{ und } \sum \mu(A_n) < \varepsilon.$$

Bemerkung. Nullmengen werden im allgemeinen nicht zu \mathcal{R} gehoeren.

Beispiel. Sei λ das Lebesguepraemass auf dem Mengenring der Figuren in \mathbb{R} . Dann ist $N := \mathbb{Q}$ eine Nullmenge. (Bew. Sei q_1, q_2, \dots, \dots eine Abzaehlung von \mathbb{Q} . Waehle $A_n := [q_n, q_n] \dots$)

Notation. Sei μ ein Praemasß auf dem Mengenring (X, \mathcal{R}) . Dann sagt man, dass eine Eigenschaft auf X μ -fast ueberall gilt, wenn es eine μ -Nullmenge gibt, so dass die Eigenschaft fuer alle $x \in X \setminus N$ gilt.

Beispiele.

- $f > g$ μ -f.u. (d.h. es existiert μ -Nullmengen N mit $f(x) > g(x)$ fuer alle $x \in X \setminus N$).
- $f = g$ μ f.u. (d.h. es existiert μ -Nullmengen N mit $f(x) = g(x)$ fuer alle $x \in X \setminus N$).
- $f_n \rightarrow g$ μ f.u. (d.h. es existiert μ -Nullmengen N mit $f_n(x) \rightarrow g(x)$ fuer alle $x \in X \setminus N$).

THEOREM. *Sei μ ein Praemasß auf dem Mengenring (X, \mathcal{R}) . Die Vereinigung von abzählbar vielen Nullmengen N_k , $k \in \mathbb{N}$, ist eine μ Nullmenge.*

Beweis. Fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert nach Voraussetzung an N_k eine Folge $A_n^{(k)}$ in \mathcal{R} mit

$$N_k \subset \bigcup_n A_n^{(k)} \text{ und } \sum_n \mu(A_n^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Damit folgt

$$N \subset \bigcup_k N_k \subset \bigcup_{n,k} A_n^{(k)}$$

mit

$$\sum_{n,k} \mu(A_n^{(k)}) = \sum_k \sum_n \mu(A_n^{(k)}) < \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} < \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Grundlegend fuer den gegebenen Zugang zur Integrationstheorie sind folgende Bestandteile:

- Ein Grenzwertsatz fuer Integrale in Form der σ -Additivitaet. (Uebung)
- Die Vernachlaessigung von Nullmengen.

2. Integrale von Elementarfunktionen

In diesem Abschnitt lernen wir Integrale von Elementarfunktionen kennen. Hier ist die *Idee*. Mit 1_B bezeichnen wir die charakteristische Funktion der Menge B (d.h. $1_B(x) = 1$ fuer $x \in B$ und $1_B(x) = 0$ sonst). Dann sollte natuerlich $\int_X 1_B d\mu = \mu(B)$ gelten. Lineare Fortsetzung fuhrt dann darauf das Integral fuer Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen zu definieren durch

$$\int_X \sum_{j=1}^n b_j 1_{B_j} d\mu := \sum_{j=1}^n b_j \mu(B_j).$$

Wir muessen aber etwas arbeiten, um die Wohldefiniiertheit zu zeigen. Anschliessend untersuchen wir dann einfache Eigenschaften des Integrals auf den Elementarfunktionen.

DEFINITION. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X . Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heisst *Elementarfunktion (Treppenfunktion)*, wenn ein $N \in \mathbb{N}$ und $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und B_1, \dots, B_N aus \mathcal{R} existieren mit

$$f = \sum_{j=1}^N c_j 1_{B_j}.$$

Der Vektorraum der Elementarfunktionen wird mit $E(X, \mathcal{R})$ bezeichnet.

Bemerkung. Es ist $E(X, \mathcal{R})$ gerade die Lineare Huelle der 1_B , $B \in \mathcal{R}$, im Vektorraum aller komplexwertigen Funktionen auf X .

Beispiel. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{R} = \text{Figuren}$. Dann handelt es sich bei den Elementarfunktionen gerade um die aus Analysis I bekannten Treppenfunktionen.

Fuer die weiteren Betrachtungen wird es nuetzlich sein eine (fast) kanonische Darstellung einer Elementarfunktion zur Verfuegung zu haben.

PROPOSITION. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann existiert zu jeder Elementarfunktion $f = \sum_{j=1}^N c_j 1_{B_j}$ (mit $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und B_1, \dots, B_N aus \mathcal{R}) Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und paarweise diskunkte A_i in \mathcal{R} , $j = 1, \dots, K$ mit

- $f = \sum \alpha_i 1_{A_i}$
- $\sum_j b_j \mu(B_j) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i)$.

Beweis. Das folgt leicht durch Induktion nach N . □

FOLGERUNG (Wohldefiniiertheit des Integrals). Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Gilt $f = \sum_{j=1}^N b_j 1_{B_j} = \sum_{k=1}^K b'_k 1_{B'_k}$ (mit $b_j, b'_k \in \mathbb{C}$ und B_j, B'_k aus dem Mengenring), so folgt

$$\sum_{j=1}^N b_j \mu(B_j) = \sum_{k=1}^K b'_k \mu(B'_k).$$

Beweis. Es reicht $f := \sum b_j 1_{B_j} = 0 \implies \sum b_j \mu(B_j) = 0$ zu zeigen.

Nach vorangehender Proposition existieren $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und paarweise disjunkte A_i in \mathcal{R} mit

$$0 = f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i} \quad \text{und} \quad \sum_j b_j \mu(B_j) = \sum_i \alpha_i \mu(A_i).$$

Aufgrund der paarweisen Disjunktheit der A_i muss dann gelten $\alpha_i = 0$ fuer alle i und die Behauptung folgt. \square

DEFINITION (Integral fuer Elementarfunktionen). Sei \mathcal{R} ein Mengerring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Ist $f = \sum_{j=1}^N c_j 1_{B_j}$ mit $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$ und B_1, \dots, B_N aus \mathcal{R} so definiert man

$$\int_X f d\mu := \int_X f(x) d\mu(x) := \sum_{j=1}^N b_j \mu(B_j).$$

(Das ist wohldefiniert nach voriger Proposition.)

PROPOSITION (Einfache Eigenschaften des Integrals). Sei \mathcal{R} ein Mengerring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann ist die Abbildung

$$\int : E(X, \mathcal{R}) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X f d\mu$$

linear und positiv d.h. es gilt

$$\int (\alpha f + g) d\mu = \alpha \int f d\mu + \int g d\mu \quad (\text{Linearitaet})$$

fuer alle $f, g \in E(X, \mathcal{R})$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ sowie

$$\int f d\mu \geq 0 \quad (\text{Positivitaet})$$

fuer $f \geq 0$.

Beweis. Linearitaet ist klar. Positivitaet folgt durch Betrachten von $f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$ mit paarweise disjunkten A_i aus dem Mengerring. \square

Bei gegebenem Praemass macht das Integral den Vektorraum der Elementarfunktionen zu einem (Halb)normierten Vektorraum. Das ist von fundamentaler Bedeutung fuer unseren Zugang. Wir werden naemlich effektiv den Raum der integrierbaren Funktionen als die 'Vervollstaendigung' des Raumes der Elementarfunktionen mit dieser Halbnorm definieren. Die entsprechende Halbnorm wird in der naechsten Proposition eingefuehrt.

Erinnerung - Halbnorm (Laengenmessung). Sei V ein Vektorraum ueber \mathbb{C} . Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \longrightarrow [0, \infty)$ hiesst Halbnorm, wenn sie mit den Vektorraumoperationen in folgender Weise vertraeglich ist:

- $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ (Dreiecksungleichung)
- $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$

fuer alle $f, g \in V$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Dann gilt offenbar $\|0\| = 0$. Hat $\|\cdot\|$ die zusaetzliche Eigenschaft $\|f\| = 0 \iff f = 0$, so heisst $\|\cdot\|$ eine Norm. Konzepte von Konvergenz bzw. Cauchy-Folgen lassen sich bzgl. Halbnormen wie fuer Normen definieren. Das werden wir im folgenden nutzen.

PROPOSITION. Sei \mathcal{R} ein Mengerring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Mit f ist auch $|f|$ eine Element von $E(X, \mathcal{R})$ und die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : E(X, \mathcal{R}) \longrightarrow [0, \infty), \|f\|_1 := \int_X |f| d\mu$$

ist eine Halbnorm auf $E(X, \mathcal{R})$ mit

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \|f\|_1.$$

Beweis. Sei $f = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$ mit paarweise disjunkten A_i aus dem Mengenring. Dann gehoert

$$|f| = \sum |\alpha_i| 1_{A_i}$$

ebenfalls zu den Elementarfunktionen und es gilt

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \sum \alpha_i \mu(A_i) \right| \leq \sum |\alpha_i| \mu(A_i) = \int_X |f| \, d\mu.$$

Es bleiben die Halbnormeigenschaften zu zeigen:

$\|f+g\|_1 \leq \|f\|_1 + \|g\|_1$. Mit $|f+g| \leq |f|+|g|$ folgt das sofort aus der Monotonie und Linearitaet des Integrals.

$\|\alpha f\|_1 = |\alpha| \|f\|_1$. Das folgt aus der Linearitaet des Integrals. \square

Bemerkung. Es ist $\|\cdot\|_1$ im allgemeine keine Norm. Betrachte dazu etwa $X = \mathbb{R}$ mit dem Mengenring der Figuren und dem Lebesguepraemass λ . Dann erfuellt jede Funktion f , die genau in einem Punkt nicht verschwindet natuerlich $\|f\|_1 = 0$.

DEFINITION. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Eine Folge (f_n) von Funktionen $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert μ -fast-gleichmaessig (μ -f.glm) gegen $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge (A_k^ε) , $k \in \mathbb{N}$, in \mathcal{R} existiert mit

- $\sum_k \mu(A_k^\varepsilon) < \varepsilon$
- $f_n \rightarrow f$ gleichmaessig auf $X \setminus \bigcup_k A_k^\varepsilon$.

PROPOSITION. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Konvergiert die Folge $(f_n)_n$ gegen f μ -fast-gleichmaessig, so konvergiert (f_n) gegen f μ -fast ueberall.

Beweis. Sei

$$N := \{x : f_n(x) \text{ konvergiert nicht gegen } f(x)\}.$$

Sind zu $\varepsilon > 0$ dann A_k^ε entsprechend der Definition von μ -fast gleichmaessiger Konvergenz gewaehlt, sogilt $N \subset \bigcup_k A_k^\varepsilon$ und $\sum \mu(A_k^\varepsilon) < \varepsilon$. Damit ist N eine Nullmenge. \square

Bemerkung. Sei $X = [0, 1]$ und \mathcal{R} der Mengenring der Figuren auf X und λ das Lebesguepraemass auf X . Sei $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1_{\{1\}}(x)$. Dann gilt

- Es konvergiert f_n punktweise gegen f .
- Es konvergiert f_n nicht gleichmaessig gegen f .
- Es konvergiert f_n λ -fast-gleichmaessig gegen f .

3. Cauchy Folgen von Elementarfunktionen

In diesem Abschnitt studieren wir Cauchy-Folgen in $E(X, \mathcal{R})$.

Erinnerung. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Eine Folge (f_n) in $E(X, \mathcal{R})$ heisst $\|\cdot\|_1$ -Cauchy Folge, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ existiert mit

$$\|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon$$

fuer alle $n, m \geq N_\varepsilon$.

THEOREM. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy Folge in $E(X, \mathcal{R})$. Dann gilt:

- Es gibt eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von (f_n) sodass f_{n_k} μ -fast-gleichmaessig gegen f konvergiert.
- Sind (g_k) und (h_k) zwei μ -fast-ueberall konvergente Teilfolgen von (f_n) , so gilt $g_k - h_k \rightarrow 0$ μ -fast ueberall.

Bemerkung. Der zweite Teil der Aussage besagt, dass die im ersten Teil gefundene Funktion (bis auf Werte auf einer Nullmenge) eindeutig ist.

Beweis. Wir zeigen zunaechst den ersten Punkt: Sei (f_{n_k}) so gewaehlt, dass

$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 \leq \frac{1}{3^{k+1}}$$

gilt fuer alle $k \in \mathbb{N}$. Sei

$$g_k := |f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|.$$

Dann gilt also

- $g_k \geq 0$
- $\|g_k\|_1 = \|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_1 \leq \frac{1}{3^{k+1}}$.

Idee. Da die Norm von g_k sehr klein ist, muessen auch die Funktionswerte fuer die meisten $x \in X$ ziemlich klein sein. Daher konvergiert $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j})$ fuer die meisten $x \in X$. Details dazu finden sich im folgenden.

Sei

$$M_k := \{x \in X : g_k(x) > \frac{1}{2^{k+1}}\}$$

und

$$N_k := \bigcup_{l \geq k} M_l.$$

Wir zeigen die folgenden beiden Aussagen:

- (1) Auf $X \setminus N_k$ konvergiert $(f_{n_m})_m$ gleichmaessig.
- (2) Es gilt $\sum_{l \geq k} \mu(M_l) \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

(Zusammengenommen zeigen diese beiden Aussagen dann den ersten Punkt.)

Zu (1): Auf $X \setminus N_k$ gilt

$$|f_{n_{l+1}}(x) - f_{n_l}(x)| = g_l(x) \leq \frac{1}{2^{l+1}}$$

fuer $l \geq k$. Wegen

$$f_{n_m} = f_{n_1} + \sum_{l=1}^{m-1} (f_{n_{l+1}} - f_{n_l})$$

ist dann (f_{n_m}) auf $X \setminus N_k$ gleichmaessig konvergent.

Zu (2): Es gilt $1_{M_l} \leq 2^{l+1} g_l$. Damit folgt aus der Monotonie des Integrals also

$$\mu(M_l) = \int_X 1_{M_l} d\mu \leq \int_X 2^{l+1} g_l d\mu \leq 2^{l+1} \|g_l\| = \left(\frac{2}{3}\right)^{l+1}.$$

Damit folgt

$$\sum_{l \geq k} \mu(M_l) \leq \sum_{l \geq k} \left(\frac{2}{3}\right)^{l+1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty.$$

Wir kommen nun zum zweiten Punkt des Theorem: Es gebe Funktionen g und h auf X sowie Nullmengen N_g und N_h mit $g_k \rightarrow g$ auf $X \setminus N_g$ und $h_n \rightarrow h$ auf $X \setminus N_h$. Zu zeigen $g = h$ μ -fast ueberall. Da (g_k) und (h_k) Teilfolgen der Cauchy-Folge (f_n) sind, ist auch (p_n) mit

$$g_1, h_1, g_2, h_2, \dots$$

eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge. Nun koennen wir wie im Beweis des ersten Punktes also eine Teilfolge (p_{n_k}) waehlen mit

- p_{n_k} konvergiert μ -fast ueberall d.h. auf $X \setminus N_p$ mit N_p Nullmenge, gegen ein f .
- $p_{n_{2k}}$ stammt aus (g_k) .
- $p_{n_{2k+1}}$ stammt aus (h_k) .

Dann ist $N := N_g \cup N_h \cup N_p$ eine Nullmenge und es gilt fuer $x \in X \setminus N$

$$g(x) = \lim g_n(x) = \lim p_{n_{2k}}(x) = f(x) = \lim p_{n_{2k+1}}(x) = \lim h_n(x) = h(x).$$

□

Bemerkung. Der Uebergang zu einer Teilfolge ist im allgemeinen noetig, wie man sich leicht an Beispielen klarmacht. **Zeichnung.**

Unser naechstes Ziel ist es fuer $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folgen zu zeigen:

$$\|f_n\| \rightarrow 0 \iff f_n \rightarrow 0 \mu \text{ fast ueberall.}$$

Dazu schraenken wir uns im folgenden Lemma zunaechst auf den Fall monoton fallender Funktionen ein.

LEMMA. *Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Ist (f_n) eine Folge in $E(X, \mathcal{R})$ mit $0 \leq f_{n+1} \leq f_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \rightarrow 0$ μ -fast ueberall, so gilt $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$.*

Beweis. Aufgrund der Monotonie des Integrals und der Voraussetzung an die (f_n) ist die Folge

$$\left(\int_X f_n d\mu \right)_n$$

monoton fallend und nichtnegativ. Damit handelt es sich um eine Cauchy-Folge. Wegen

$$\|f_n - f_m\| = \int f_n - f_m d\mu = \int f_n d\mu - \int f_m d\mu$$

(fuer $n \geq m$) ist dann also (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy Folge. Damit existiert nach dem vorigen Satz also eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ und eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n) mit

$$f_{n_k} \rightarrow f \mu\text{-fast gleichmaessig.}$$

Da f_n μ fast ueberall gegen 0 konvergieren gilt dann $f = 0$ und damit

$$f_{n_k} \rightarrow 0 \mu\text{-fast gleichmaessig.}$$

Wegen $f_1 \geq f_{n_k} \geq 0$ folgt damit (! s.u) dann

$$\|f_{n_k}\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

und, da (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge ist, ergibt sich dann $\|f_n\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$.

Zu !: Sei $\delta > 0$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f_{n_k}\| &= \int_X |f_{n_k}| d\mu \\ &= \int_X f_{n_k} 1_{\{x: f_{n_k}(x) > \delta\}} d\mu + \int_X f_{n_k} 1_{\{x: 0 \leq f_{n_k}(x) \leq \delta\}} d\mu \\ &\leq \|f_1\|_\infty \mu(\{x : f_{n_k}(x) > \delta\}) + \delta \mu(\{x : f_1(x) \neq 0\}). \end{aligned}$$

Hier wird der zweite Term klein, nach Wahl eines kleinen $\delta > 0$ (das ja beliebig war) und der erste Term wird (bei festem $\delta > 0$) fuer $k \rightarrow \infty$ beliebig klein aufgrund der μ fast gleichmaessigen Konvergenz gegen 0 der f_{n_k} . \square

THEOREM. Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$, die μ fast ueberall konvergiert. Dieser punktweise Grenzwert heisse f . Dann gilt

$$f = 0 \iff \|f_n\|_1 \rightarrow 0.$$

Beweis. \Leftarrow : Betrachte die Folge (p_n) gegeben durch

$$f_1, 0, f_2, 0, f_3, 0, \dots$$

Dann ist (p_n) eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge (da $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$). Es sind (f_n) und (0) fast ueberall konvergente Teilfolgen gegen 0 bzw. f . Damit folgt aus dem vorigen Satz also $0 = f$ fast ueberall.

\Rightarrow : Wir werden den Beweis mithilfe des vorigen Lemmas fuehren. Daher wird es darum gehen eine monoton fallende Folge zu konstruieren. Wir zeigen: Konvergiert $\|f_n\|_1$ nicht gegen 0, so ist $f_n(x) \rightarrow 0$ μ -fast ueberall falsch.

Ohne Einschraenkung $f_n \geq 0$ (sonst betrachte man $|f_n|$ statt f_n).

Ohne Einschraenkung existiert $C > 0$ mit $\|f_n\| \rightarrow C$ (sonst Teilfolge waehlen).

Ohne Einschraenkung

$$(*) \quad \|f_n\| \geq \frac{2}{3}C \quad \text{und} \quad \|f_n - f_{n+1}\|_1 \leq \frac{C}{3} \frac{1}{2^n}$$

(sonst Teilfolge waehlen).

Wir betrachten nun die Folge (\tilde{f}_j) mit

$$\tilde{f}_j(x) := \min\{f_1(x), \dots, f_j(x)\}.$$

Dann gilt

$$(**) \quad 0 \leq \tilde{f}_{j+1} \leq \tilde{f}_j$$

fuer alle $j \in \mathbb{N}$. Ausserdem gilt

$$(***) \quad \tilde{f}_j \geq f_1 - \sum_{k=1}^{j-1} |f_{k+1} - f_k|.$$

(Allgemeiner gilt fuer beliebige reelle a_k

$$\max\{a_1, \dots, a_j\} \leq \min\{a_1, \dots, a_j\} + \sum_{k=1}^{j-1} |a_{k+1} - a_k|$$

wie man sich leicht ueberlegt. **Zeichnung** der a_j auf der Achse.) Durch Integration folgt aus der vorangehenden Abschaetzung sofort

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}_j\|_1 &= \int_X |\tilde{f}_j| d\mu \\ (**) &= \int_X \tilde{f}_j d\mu \\ (\text{Integration } (**)) &\geq \|f_1\|_1 - \sum_{j=1}^{j-1} \|f_{k+1} - f_k\|_1 \\ (*) &\geq \frac{2}{3}C - \frac{1}{3}C \\ &= \frac{1}{3}C. \end{aligned}$$

Mit dieser Abschaetzung und (**) folgt, dass die Folge (\tilde{f}_j) also monoton faellt und $\|\tilde{f}_j\|_1$ nicht gegen 0 konvergiert. Damit folgt aus dem vorigen Lemma, dass $\tilde{f}_j(x)$ nicht fast ueberall gegen 0 konvergiert. Wegen $f_j \geq \tilde{f}_j$ kann dann auch (f_j) nicht fast ueberall gegen 0 konvergieren. Das beendet den Beweis. \square

Das vorangehende Theorem hat folgende Konsequenz, die die Wohldefiniertheit des Integrals liefern wird.

FOLGERUNG. (*Wohldefiniertheit des Integrals*) Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben und sind (h_n) und (g_n) $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folgen in $E(X, \mathcal{R})$ mit $h_n \rightarrow f$ und $g_n \rightarrow f$ μ -fast ueberall, so existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu$$

und stimmen ueberein.

Beweis. Wir zeigen zunaechst die Existenz der Grenzwerte: Es ist (g_n) eine Cauchy-Folge in bzgl. $\|\cdot\|_1$. Damit ist also

$$\left(\int_X g_n d\mu \right)$$

eine Cauchy-Folge in \mathbb{C} (da $|\int g_n d\mu - \int g_m d\mu| \leq \|g_n - g_m\|_1$). Damit existiert dann aufgrund der Vollstaendigkeit von \mathbb{C} der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Analoge Betrachtungen ergeben die Existenz des entsprechenden Grenzwertes fuer (h_n) .

Wir zeigen nun die Eindeutigkeit: Sei $q_n := g_n - h_n$. Dann gilt:

- $q_n \rightarrow 0$ μ -fast ueberall (da g_n und h_n μ -fast ueberall gegen f konvergieren).
- (q_n) ist eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge (da $|q_n - q_m| \leq \dots \leq |g_n - g_m| + |h_n - h_m| \dots$)

Nach dem vorangehenden Theorem gilt dann aber

$$\int |q_n| d\mu \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_X g_n d\mu - \int_X h_n d\mu \right| &= \left| \int_X (g_n - h_n) d\mu \right| \\ &\leq \int_X |g_n - h_n| d\mu \\ &= \int_X |q_n| d\mu \\ &\rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Damit stimmen die beiden Grenzwerte ueberein. \square

4. Integrierbare Funktionen und Integrale

In diesem Abschnitt fuehren wir die integrierbaren Funktionen ein und studieren einige Eigenschaften. Die integrierbaren Funktionen werden dabei diejenigen sein, die sich 'gut' als Grenzwert von Elementarfunktionen darstellen lassen koennen.

DEFINITION (Integrierbare Funktionen und $\mathcal{L}^1(X, \mu)$). Sei \mathcal{R} ein Mengerring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heisst integrierbar (bzgl. (\mathcal{R}, μ)), wenn es eine Folge (f_n) in $E(X, \mathcal{R})$ gibt, so dass gilt:

- (f_n) ist eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge.
- $f_n \rightarrow f$ μ -fast ueberall.

Dann definiert man

$$\int_X f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Die Menge der integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ oder $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ bezeichnet.

Beachte. Es folgen Existenz des Grenzwertes und Wohldefiniertheit des Integrals aus der letzten Folgerung des vorangehenden Abschnittes.

Notation. Sei \mathcal{R} ein Mengerring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion (h_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folgen in $E(X, \mathcal{R})$ mit $h_n \rightarrow f$ μ -fast ueberall, so nennen wir (h_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge zu f in $E(X, \mathcal{R})$.

Notation. Im folgenden werden wir manchmal ein Tripel (X, \mathcal{R}, μ) bestehend aus einer Menge X , einem Mengerring \mathcal{R} auf X und einem Mass μ auf \mathcal{R} als Praemass-Raum bezeichnen.

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ unter einer ganzen Reihe von Operationen abgeschlossen ist.

PROPOSITION. Sei \mathcal{R} ein Mengerring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann ist $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ ein Vektorraum (d.h. mit $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gehoert auch $f + \alpha g$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$). Mit $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ gehoeren auch $|f|$, $\Re f$ und $\Im f$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Weiterhin gehoeren zu reellwertigen $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ auch $\min\{f, g\}$ und $\max\{f, g\}$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$.

Beweis. Die Beweise aller dieser Aussagen folgen einfach nach dem gleichen Schema. Wir f"uhren dies nur fuer die Vektorraumeigenschaft vor. Seien also $Mf, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Zu zeigen: Es gehoert auch $f + \alpha g$ zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$.

Waehle dazu $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folgen (f_n) und (g_n) zu f bzw. g in $E(X, \mathcal{R})$. Dann ist $f_n + \alpha g_n, n \in \mathbb{N}$, eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu $f + \alpha g$. Also gehoert $f + \alpha g$ auch zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. \square

Grundlegende Eigenschaften des Integrals 'vererben' sich von $E(X, \mathcal{R})$ auch auf $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$, wie folgende Proposition zeigt.

PROPOSITION (Integral ist linear und positiv). *Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann ist die Abbildung*

$$\int : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X f d\mu,$$

linear und positiv.

Beweis. Linearitaet. Das folgt leicht aus der Linearitaet des Integrals auf $E(X, \mathcal{R})$: Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben. Seien $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folgen (f_n) und (g_n) zu f bzw. g in $E(X, \mathcal{R})$. Dann ist $f_n + \alpha g_n$ eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu $f + \alpha g$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \int_X (f + \alpha g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (f_n + \alpha g_n) d\mu \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu + \alpha \int_X g_n d\mu \\ &= \int_X f d\mu + \alpha \int_X g d\mu. \end{aligned}$$

Positivitaet: Das folgt leicht aus der Positivitaet des Integrals auf $E(X, \mathcal{R})$: Seien $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ gegeben mit $f \geq 0$ und (f_n) eine zugehoerige $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$. Dann ist $(|f_n|)$ eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu $|f| = f \geq 0$. Damit gilt also

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \geq 0.$$

Das beendet den Beweis. \square

PROPOSITION ($\|\cdot\|_1$ ist Halbnorm auf \mathcal{L}^1). *Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann ist die Abbildung*

$$\|\cdot\|_1 : \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto \int_X |f| d\mu,$$

eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \|f\|_1.$$

Es gilt $\|f\|_1 = 0$ genau dann, wenn $f = 0$ μ -fast ueberall gilt.

Beweis. Die Halbnormeigenschaften folgen leicht aus den entsprechenden Eigenschaften von $\|\cdot\|_1$ auf $E(X, \mathcal{R})$ durch Grenzüebergang.

Zur Ungleichung. Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ zu f . Dann ist $(|f_n|)$ eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ zu $|f|$. Damit gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_X f d\mu \right| &= \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_X f_n d\mu \right| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu \\ &= \int_X |f| d\mu \\ &= \|f\|_1. \end{aligned}$$

Zur letzten Aussage: Es gelte $\|f\|_1 = 0$. Sei eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge (f_n) in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit $f_n \rightarrow f$ μ -fast ueberall gewaehlt. Dann gilt

$$\|f_n\|_1 = \int_X |f_n| d\mu \rightarrow \int_X |f| d\mu = \|f\|_1 = 0.$$

Damit ist also (f_n) eine fast ueberall konvergente Folge mit $\|f_n\|_1 \rightarrow 0$. Damit folgt aus einem Theorem des vorigen Abschnittes also $f_n \rightarrow 0$ μ -fast ueberall. Weiterhin gilt aber $f_n \rightarrow f$ μ -fast ueberall. Damit folgt $f = 0$ μ -fast ueberall.

Ist umgekehrt $f = 0$ μ -fast ueberall, so ist $f_n = 0$ eine μ -fast ueberall gegen f konvergente Cauchy Folge und es folgt

$$\|f\|_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n| d\mu = 0.$$

Das beendet den Beweis. □

Wir koennen jetzt zeigen, dass eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu f tatsaechlich gegen f konvergiert.

PROPOSITION. *Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu f . Dann gilt*

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Beweis. Waehle $n \in \mathbb{N}$ beliebig (aber fest). Setze $g_m := f_n - f_m$, $m \in \mathbb{N}$. Dann ist g_m eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge zu $f_n - f$. Daher ist $|g_m|$ eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge zu $|f_n - f|$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \int_X |f_n - f| d\mu &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X |f_n - f_m| d\mu \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \|f_n - f_m\|_1 \\ &\rightarrow 0, n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM ('Vollstaendigkeit' von $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$). *Sei \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ (d.h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gebe es $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\|f_n - f_m\|_1 \leq \varepsilon$ fuer alle $n, m \geq N_\varepsilon$). Dann gibt es ein (bis auf Werte auf einer Nullmenge) eindeutig bestimmtes $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit*

$$\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Insbesondere gilt dann also

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Die Folge (f_n) hat eine Teilfolge, die μ -fast gleichmaessig gegen f konvergiert und jede μ -fast ueberall konvergente Teilfolge von (f_n) konvergiert μ -fast ueberall gegen f .

Beweis. Zu jedem f_n gibt es nach der vorherigen Proposition ein $g_n \in E(X, \mathcal{R})$ mit

$$(*) \quad \|g_n - f_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Da (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge ist, ist dann auch (g_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge. Damit gibt es also nach einem Resultat des vorherigen Abschnittes eine Teilfolge von (g_n) und ein $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, so dass die Teilfolge μ -fast ueberall gegen f konvergiert. Ohne Einschraenkung sei die Folge (g_n) selber μ -fast ueberall gegen f konvergent. Damit ist dann also insgesamt (g_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ zu f . Damit folgt $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und (nach voriger Proposition)

$$(**) \quad \|g_n - f\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Mit $(*)$ und $(**)$ folgt sofort

$$\|f_n - f\|_1 \leq \|f_n - g_n\|_1 + \|g_n - f\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Damit folgt, dass (f_n) gegen f konvergiert. Ist f' eine zweite Funktion gegen die (f_n) konvergiert, so gilt wegen

$$\|f - f'\|_1 \leq \|f - f_n\|_1 + \|f_n - f'\|_1 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

also $\|f - f'\|_1 = 0$. Damit folgt (vgl. Proposition zur Halbnormeigenschaft von $\|\cdot\|_1$) $f = f'$ μ -fast ueberall. Die uebrigen Aussagen werden als Uebung ueberlassen. (Sie koennen entweder so bewiesen werden, wie die entsprechenden Aussagen fuer Cauchy-Folgen aus $E(X, \mathcal{R})$, oder indem man die obigen (g_n) auch punktweise (bis auf kleine Ausnahmемengen) nahe an f_n waehlt). \square

Bemerkung(Halbnorm auf \mathcal{L}^1 versus Norm auf L^1). Auf dem Raum $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ ist $\|\cdot\|_1$ nur eine Halbnorm. Entsprechend greift dort unser Konzept eines vollstaendigen Raumes nicht. Das laesst sich durch Herausfaktorieren der fast ueberall verschwindenden Funktionen beheben: Sei \mathcal{R} ein Mengering ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann ist $\mathcal{N} := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_1 = 0\}$ ein Unterraum von $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Auf dem Quotienten

$$L^1(X, \mathcal{R}, \mu) := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) / \mathcal{N}$$

ist die Abbildung

$$\|\cdot\|_1 : L^1(X, \mathcal{R}, \mu) \rightarrow [0, \infty), [f] \mapsto \|f\|_1$$

wohldefiniert und macht $L^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ in einem vollstaendigen normierten Vektorraum. Die Elemente von $L^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ sind nicht mehr Funktionen sondern Klassen von Funktionen, die fast ueberall uebereinstimmen. Da die Funktionene einer Klasse fast ueberall uebereinstimmen, spielt es fuer Integrationstheorie keine Rolle mit welchem Representanten wir rechnen.

Beispiel. $\ell^1(\mathbb{N})$. Sei $X = \mathbb{N}$ und \mathcal{R} der Mengerring der endlichen Teilmengen von X und μ das Zählprämaß. Wie man sich leicht klarmacht, gilt dann

$$E(X, \mathcal{R}) = \{a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} : a(k) = 0 \text{ fuer alle bis auf endliche viele } k \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\int a d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} a(k),$$

(wobei die Summe nur endlich viele nichtverschwindende Terme hat). Fuer eine Folge (a_n) in $E(X, \mathcal{R})$ und $a : X \rightarrow \mathbb{C}$ gilt dann $a_n \rightarrow a$ μ -fast ueberall genau dann, wenn fuer jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt $a_n(k) \rightarrow a(k)$, $n \rightarrow \infty$. Ist nun (a_n) in $E(X, \mathcal{R})$ eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge und $a : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $a_n(k) \rightarrow a(k)$, $n \rightarrow \infty$, gegeben, so gilt fuer jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^N |a(k)| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N |a_n(k)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|a_n\|_1 \leq \sup\{\|a_n\|_1 : n \in \mathbb{N}\} < \infty.$$

Da $N \in \mathbb{N}$ beliebig war, folgt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a(k)| < \infty.$$

Insgesamt sehen wir so

$$\mathcal{L}^1(X, \mu) \subset \{a : X \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |a(k)| < \infty\}.$$

Umgekehrt sieht man leicht, dass fuer jedes $a : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} |a(k)| < \infty$ offenbar $a_n := 1_{[1, n]} a$ eine Cauchy-Folge in $E(X, \mathcal{R})$ ist, die punktweise gegen a konvergiert. Damit folgt dann

$$\mathcal{L}^1(X, \mu) = \{a : X \rightarrow \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |a(k)| < \infty\}.$$

Man schreibt

$$\ell^1(\mathbb{N}) := \mathcal{L}^1(X, \mu)$$

und nennt diesen Raum den 'klein ℓ -Eins' Raum über \mathbb{N} .

Bemerkung. Die Struktur von \mathbb{N} spielt in den vorangehenden Betrachtungen keine Rolle. Man kann vöilige analog einen Raum $\ell^1(X)$ fuer jede beliebige Menge X definieren.

Beispiel - Lebesgueintegral auf \mathbb{R}^N . Sei $X = \mathbb{R}^N$ und \mathcal{R} der Mengerring der Figuren (auf X) und λ das Lebesgue Praemass auf \mathcal{R} . Dann heissen die Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^N, \lambda)$ *Lebesgue-integrierbar* und fuer eine solche Funktion f heisst

$$\int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda$$

das *Lebesgueintegral* von f .

Notation. Oft schreibt man auch $\int_{\mathbb{R}^N} f dx$ statt $\int_{\mathbb{R}^N} f d\lambda(x)$.

Sei weiterhin die Menge der stetigen Funktionen auf \mathbb{R}^N mit kompaktem Traeger gegeben durch

$$C_c(\mathbb{R}^N) := \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C} \text{ stetig} : \text{es gibt kompaktes } K \text{ mit } f = 0 \text{ in } \mathbb{R}^N \setminus K\}.$$

Behauptung. Es gilt $C_c(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Weiterhin gilt im Falle $N = 1$ fuer $f \in C_c(\mathbb{R})$ mit $f = 0$ ausserhalb von $[a, b]$

$$\int f d\lambda = \int_a^b f dx,$$

(wobei auf der rechten Seite das Riemann-Integral von f gebildet wird).

Beweis: Wir zeigen zunaechst $C_c(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{L}^1(X, \mu)$. Um Schreibarbeit zu sparen, betrachten wir nur den Fall $N = 1$. Sei $C > 0$ gewaehlt, so dass $f = 0$ auf $\mathbb{R} \setminus [-C, C]$. Da f stetig ist, ist es auf dem kompakten $[-C, C]$ gleichmaessig stetig. Daher koennen wir zu jedem $\varepsilon > 0$ also paarweise disjunkte Intervalle $I_j^{(\varepsilon)}$, $j = 1, \dots, n_\varepsilon$, finden, so dass gilt

- $\bigcup_{j=1}^{n_\varepsilon} I_j^{(\varepsilon)} = [-C, C]$.
- $\sup_{x, y \in I_j^{(\varepsilon)}} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ fuer alle $j = 1, \dots, n_\varepsilon$.

Waehle nun $x_j^\varepsilon \in I_j^{(\varepsilon)}$ fuer $j = 1, \dots, n_\varepsilon$ und definiere

$$f_\varepsilon := \sum_{j=1}^{n_\varepsilon} f(x_j^\varepsilon) 1_{I_j^{(\varepsilon)}}.$$

Dann ist f_ε eine Elementarfunktion mit

$$\|f_\varepsilon - f\|_\infty < \varepsilon.$$

Damit folgt dann

$$\|f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}\|_\infty \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

und damit

$$\int_X |f_{\varepsilon_1} - f_{\varepsilon_2}| d\lambda \leq 2C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Damit sieht man leicht, dass (g_n) mit $g_n := f_{1/n}$ eine $\|\cdot\|_1$ Cauchy-Folge ist mit $g_n \rightarrow f$ punktweise (und sogar gleichmaessig). Das zeigt $f \in \mathcal{L}^1(X, \lambda)$.

Wir kommen nun noch zur Aussage ueber das Uebereinstimmen von Riemann-Integral und Lebesgueintegral: Fuer Treppenfunktionen stimmen offenbar Riemann-Integral und Lebesgueintegral ueberein. Damit sind die zu $f \in C_c(\mathbb{R})$ eben konstruierten g_n alle Riemann-integrierbar und konvergieren (wie eben gesehen) gleichmaessig gegen f . Damit ist nach Saetzen aus der Vorlesung auch f Riemannintegrierbar und es gilt

$$\int_a^b f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n \lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$$

5. Die berühmten Integralsätze

In diesem Abschnitt lernen wir die wichtigsten Saetze zur Konvergenz von Integralen kennen. Die Voraussetzungen sind jeweils punktweise Konvergenz der Funktionen zusammen mit einer (schwachen) Gleichmaessigkeit der Kontrolle. Die Folgerung ist Konvergenz der Integrale. Ebenso lernen wir das Lemma von Fatou kennen.

Wir machen uns zunaechst anhand eines **Beispiels** klar, dass punktweise Konvergenz nicht ausreicht fuer Konvergenz der Integrale. Betrachte dazu $X = \mathbb{R}$ mit dem Mengenring der Figuren und dem Lebesgue-Praemass λ . Sei $f_n := n 1_{(0, 1/n)}$. Dann gilt $f_n(x) \rightarrow 0$ in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$. Aber es gilt

$\int f_n d\lambda = 1$. Alternativ koennte man auch $g_n := 1_{[n, n+1]}$ betrachten. Dann gilt wieder $g_n \rightarrow 0$ punktweise ueberall, aber $\int g_n d\lambda = 1$. Voellig analoge Beispiele lassen sich auch auf $\ell^1(\mathbb{N})$ konstruieren.

THEOREM (Satz von Beppo Levi; Monotoner Konvergenz Satz). *Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

- $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ fuer alle $x \in X$ und $n \in \mathbb{N}$.
- Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\int_X f_n d\mu \leq C$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \mu - f.ue. \quad \text{und} \quad \int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Die entsprechende Aussage gilt, falls alle \leq durch \geq ersetzt werden.

Bemerkung. In der Situation des Theorem gilt $f_n \rightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$ wie man aus

$$\|f - f_n\|_1 = \int |f - f_n| d\mu = \int f d\mu - \int f_n d\mu$$

leicht folgert.

Beweis. Aufgrund der Voraussetzung gilt

$$\int_X f_n d\mu \leq \int_X f_{n+1} d\mu \leq C$$

fuer alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist also

$$\left(\int_X f_n d\mu \right)$$

eine beschraenkte monotone Folge, also eine Cauchy-Folge. Wegen

$$\int_X |f_n - f_m| d\mu = \int_X (f_n - f_m) d\mu = \int_X f_n d\mu - \int_X f_m d\mu$$

fuer $n \geq m$ ist also (f_n) eine $\|\cdot\|_1$ -Cauchy-Folge. Damit gibt es aufgrund der 'Vollstaendigkeitssatzes' zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ also ein $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ also insbesondere

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Weiterhin hat die Folge (f_n) nach dem schon erwaehnten Vollstaendigkeitssatz eine Teilfolge (f_{n_k}) , die μ -fast ueberall gegen f konvergiert. Aufgrund der Monotonie konvergiert dann aber (f_n) μ -fast ueberall gegen f . \square

FOLGERUNG (Variante). *Sei (X, \mathcal{R}, μ) wie im Satz. Ist $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:*

- $f_n \nearrow f$ μ -fast ueberall.
- Es gibt ein $C \geq 0$ mit $\int f_n d\mu \leq C$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gehoert f zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und es gilt

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Beweis. Das ist klar: Der vorige Satz liefert, dass die (f_n) in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und μ -f.ue. gegen ein f' konvergieren. Die Voraussetzung zeigt $f = f'$ und die Behauptung folgt. \square

Bemerkung. Die Aussage des Satzes (und seiner Variante) folgt auch, wenn fuer jedes $n \in \mathbb{N}$ nur fuer μ -fast alle $x \in X$ gilt $f_{n+1}(x) \leq f(x)$ (da man nach Abänderung der Funktionen auf einer geeignet gewählten Nullmenge wieder in der Situation des Satzes ist).

THEOREM. (*Satz von Lebesgue - Dominiertes Konvergenztheorem*) Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemaß auf \mathcal{R} . Ist $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben und (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit folgenden beiden Eigenschaften:

- Es konvergiert $f_n \rightarrow f$ μ -fast ueberall.
- Es gibt ein $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit $|f_n| \leq g$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gehoert f zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und es gilt

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Bemerkung. In der Situation des Theorem gilt $f_n \rightarrow f$ bzgl. $\|\cdot\|_1$. (Bew. Wende das Theorem an auf $h_n := |f - f_n|$ mit $|h_n| \leq 2g$.)

Beweis. Ohne Einschraenkung seien die f_n alle reellwertig (andernfalls koennen wir Real- und Imaginaerteil betrachten).

Sei

$$g_{n,k} := \max\{f_n, \dots, f_{n+k}\}$$

und

$$g_n := \lim_{k \rightarrow \infty} g_{n,k} = \sup\{f_n, f_{n+1}, \dots\} \leq g.$$

(Dabei existiert das Supremum wegen $|f_n| \leq g$.) Dann gilt:

- $g_{n,k}(x) \nearrow g_n(x)$, $k \rightarrow \infty$, fuer alle $x \in X$.
- $g_{n,k} \leq g_{n,k+1}$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$.
- $\int_X g_{n,k} d\mu \leq \int_X g d\mu =: C$ (wegen $g_{n,k} \leq g$).

Damit folgt nach dem Satz von Beppo Levi also $g_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Nun gilt aber

- $g_n(x) \searrow f(x)$ μ -fast ueberall.
- $g_{n+1} \leq g_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.
- $\int_X g_n d\mu \geq \int (-g) d\mu$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ (da $g_n \geq -g$).

Damit folgt aus dem Satz von Beppo Levi also $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ sowie

$$(*) \quad \int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n d\mu.$$

Voellig analog (vgl. auch den Beweis des folgenden Theorems) folgt mit

$$h_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}$$

die Aussage

$$(**) \quad \int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu.$$

Wegen $h_n \leq f_n \leq g_n$ und der Monotonie des Integrals gilt

$$\int_X h_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu \leq \int_X g_n d\mu.$$

Damit folgt aus (*) und (***) also

$$\int_X f_n d\mu \rightarrow \int_X f d\mu.$$

Das beendet den Beweis. \square

THEOREM (Lemma von Fatou). *Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei $f : X \rightarrow [0, \infty)$ gegeben und (f_n) eine Folge in $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ mit $f_n(x) \rightarrow f(x)$ μ -fast ueberall. Weiterhin gelte mit einem $C \geq 0$ noch*

- $0 \leq f_n$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$
- $\int_X f_n d\mu \leq C$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann gehoert f zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und es gilt

$$\int_X f d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

Beweis. Sei

$$h_{n,k} := \min\{f_n, \dots, f_{n+k}\}, \quad h_n := \inf\{f_n, f_{n+1}, \dots\}.$$

Dann gilt

$$h_{n,k} \searrow h_n, \quad \int_X h_{n,k} d\mu \geq \int_X 0 d\mu = 0.$$

Damit folgt nach dem Satz von Beppo Levi also

$$h_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu).$$

Nun gilt $h_n \leq f_{n+k}$ fuer alle $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$, also

$$\int_X h_n d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_{n+k} d\mu = \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu$$

sowie

$$h_n \nearrow f \quad \mu \text{ fast ueberall.}$$

Damit folgt aus dem Satz von Beppo Levi also

$$f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$$

sowie

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung. Im allgemeinen gilt in der Situation des Theorem nur $<$, wie man an folgendem Beispiel sieht: $X = \mathbb{R}$, $\mu = \text{Lebesguepraemass}$, $f_n = 1_{[n, n+1]}$. Dann gilt $f_n \rightarrow f = 0$ aber

$$\int_X f_n d\mu = 1 \neq 0 = \int_X 0 d\mu.$$

6. σ -Algebren, Messbarkeit und Masse

In diesem Abschnitt setzen wir ein Praemass auf einem Mengenring zu einem Mass auf einer σ -Algebra fort. Anschliessend diskutieren wir das Konzept der Messbarkeit. In der Literatur wird oft Integrationstheorie entwickelt, indem von Massen und σ -Algebren ausgegangen wird (statt von Praemassen auf Mengenringen). Dann muss aber die Konstruktion von Massen aus äusseren Masse noch untersucht werden, um das Lebesguemass einzufuehren. Der von uns gewaehlte Zugang liefert Integrationstheorie und Konstruktion von Massen in einem.

DEFINITION (σ -Algebra und meßbare Mengen). *Sei X eine Menge. Eine Familie \mathcal{A} von Teilmengen von X heisst σ -Algebra auf X , wenn gilt:*

- $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A}, n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Ist \mathcal{A} eine σ -Algebra auf X , so heisst (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum und die Elemente von \mathcal{A} heissen messbare Mengen.

Bemerkung. Jede σ -Algebra ist ein Mengenring (wie man sich leicht klar-macht).

PROPOSITION. *Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann ist*

$$\mathcal{A}(\mathcal{R}) := \{A \subset X : 1_{B \cap A} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu) \text{ fuer alle } B \in \mathcal{R}\}$$

eine σ -Algebra mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$.

Beweis. *Vertraeglichkeit mit Komplementbildung.* Es gelte $A \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Dann folgt fuer jedes $B \in \mathcal{R}$ also

$$1_{B \cap A^c} = 1_B - 1_{A \cap B} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$$

und damit $A^c \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$.

$\emptyset, X \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Das ist klar fuer X und folgt durch Komplementbildung fuer \emptyset .

$A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu), n \in \mathbb{N} \implies \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$. Setze $A_N := \bigcup_{n=1}^N A_n$ und $A_\infty := \bigcup_n A_n$. Dann gilt fuer jedes $B \in \mathcal{R}$ natuerlich

$$1_{B \cap A_N} = \min\{1_B, \sum_{n=1}^N 1_{A_n \cap B}\} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu).$$

Weiterhin gilt natuerlich

$$1_{B \cap A_N} \nearrow 1_{B \cap A_\infty} \leq 1_B.$$

Damit folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz (oder dem Satz von der majorisierten Konvergenz) dann

$$1_{B \cap A_\infty} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu).$$

Das beendet den Beweis. □

DEFINITION (Maß). Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Dann heisst eine Abbildung

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$$

ein Mass, wenn folgende beiden Eigenschaften gelten:

- Für jede Folge (A_n) paarweise disjunkter Mengen aus \mathcal{A} gilt $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.
- $\mu(\emptyset) = 0$.

Ist μ ein Mass auf (X, \mathcal{A}) , so heisst (X, \mathcal{A}, μ) ein Massraum.

Bemerkung. Der Wert ∞ ist zugelassen.

PROPOSITION. Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Dann definiert die Abbildung

$$\tilde{\mu} : \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu) \longrightarrow [0, \infty]$$

mit $\tilde{\mu}(A) = \int_A 1_X d\mu$ falls $1_A \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\tilde{\mu}(A) = \infty$ sonst, ein Mass auf $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Es gilt $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ fuer $A \in \mathcal{R}$. Es gilt $\tilde{\mu}(N) = 0$ genau dann, wenn N eine μ -Nullmenge ist.

Beweis. Sei (A_n) eine Folge paarweise disjunkter Mengen in $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$. Sei

$$A_N := \cup_{n=1}^N A_n, \quad A_\infty = \cup_{n=1}^\infty A_n.$$

Dann gilt $1_{A_N} \nearrow 1_{A_\infty}$. Wir unterscheiden nun zwei Faelle:

Es gilt $1_{A_\infty} \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Damit folgt aus dem Satz von der dominierten Konvergenz oder dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \tilde{\mu}(A_n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \tilde{\mu}(A_n) \\ (\text{paarw. disjunkt}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X 1_{A_N} d\mu \\ &= \int_X 1_{A_\infty} d\mu \\ &= \tilde{\mu}(A_\infty). \end{aligned}$$

Es gilt $1_{A_\infty} \notin \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$. Dann gilt also $\tilde{\mu}(A_\infty) = \infty$. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz muss dann aber auch gelten $\sum_{n=1}^\infty \tilde{\mu}(A_n) = \infty$. Denn andernfalls wuerde die Rechnung aus dem ersten Fall einen Widerspruch liefern.

Zur letzten Aussage: (Uebung). Es ist N eine $\tilde{\mu}$ Nullmenge genau dann, wenn $\tilde{\mu}(N) = 0$ d.h. wenn 1_N zu $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ gehoert mit $\int 1_N d\mu = 0$. Das bedeutet aber gerade (s.o.), dass 1_N bis auf eine Nullmenge verschwindet. Damit ist N eine Nullmenge. \square

Beispiel. Sei $X = \mathbb{N}$ und μ das Zaehlpraemass auf dem Mengenring \mathcal{R} der englischen Mengen. Dann ist $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ die σ -Algebra aller Teilmengen von \mathbb{N} und $\tilde{\mu}$ ist das sogenannte Zaehlmass.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}^N$ und $\lambda = \mu$ das Lebesgue Praemass auf dem Mengering der Figuren an. Dann heisst \mathcal{A} die Lebesgue- σ -Algebra auf \mathbb{R}^N und $\tilde{\lambda}$ heisst das *Lebesguemass*.

Bemerkung. Es ist das Lebesguemass translationsinvariant und normiert und das einzige Maß auf \mathbb{R}^N mit diesen Eigenschaften (evtl. Details).

Notation. Wir schreiben meist μ statt $\tilde{\mu}$.

DEFINITION (Messbare Funktionen). Sei (X, \mathcal{A}) ein messbarer Raum. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ heisst messbar, wenn die Urbilder von offenen Mengen der Form (c, ∞) zu \mathcal{A} gehoeren. Eine Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ heisst meßbar, wenn $\Re f$ und $\Im f$ meßbar sind.

Bemerkung. Man kann zeigen, dass eine Funktion genau dann messbar ist, wenn sie ueberall ein Grenzwert von Elementarfunktionen d.h. Funktionen der Form $\sum_{j=1}^N c_j 1_{A_j}$ mit $A_j \in \mathcal{A}$ ist. Damit sieht man leicht, dass Linearkombinationen, Produkte, punktweise Grenzwerte von messbaren Funktionen wieder messbar sind.

PROPOSITION. Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Fuer $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ sind aequivalent:

- (i) Fuer jedes $A \in \mathcal{R}$ ist $f 1_A$ μ -fast ueberall Grenzwert von Funktionen aus $E(X, \mathcal{R})$.
- (ii) Es ist f messbar bzgl. $\mathcal{A}(\mathcal{R})$.

Ist $X = \cup X_n$ mit $X_n \in \mathcal{R}$, so ist dies aequivalent zu

- (iii) Es ist f μ -fast ueberall Grenzwert von Funktionen aus $E(X, \mathcal{R})$.

Beweis. Die Aequivalenz von (i) und (iii) (unter der angegebenen Zusatzvoraussetzung) ist klar.

(i) \implies (ii): Das folgt leicht aus den folgenden beiden Aussagen, deren Beweis als Uebung gelassen wird:

- Der punktweise Grenzwert von messbaren Funktionen ist messbar.
- Abaendern einer Funktion auf einer Nullmenge aendert die Messbarkeit (bzgl. $\mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$) nicht (da jede Teilmengen einer Nullmenge wieder eine Nullmenge ist).

(ii) \implies (i) Der Beweis folgt aus den folgenden beiden Aussagen, deren Beweis als Uebung gelassen wird:

- Jede messbare Funktion ist punktweiser Grenzwert von Funktionen der Form $\sum_{i=1}^N c_i 1_{A_i}$ mit $A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ mit $\mu(A_i) < \infty$.
- Jede Funktion 1_{A_i} mit $A_i \in \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu)$ mit $\mu(A_i) < \infty$ ist μ -fast gleichmaessiger Grenzwert von Elementarfunktionen (da sie integrierbar ist). \square

Wir geben zwei Anwendungen der Proposition.

Beispiel. Sei $X = \mathbb{R}^N$ und $\lambda = \mu$ das Lebesgue Praemass auf dem Mengering der Figuren an. Dann ist jede stetige Funktion $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass fuer jede natuerliche Zahl N die Funktion $f_N := 1_{[-N, N]} f$ punktweiser Grenzwert von Elementarfunktionen ist. Es ist aber die Einschraenkung von f auf $[-N, N]$ gleichmaessig stetig (als stetige Funktion auf einem Kompaktum) und damit sogar gleichmaessig durch Elementarfunktionen (die ausserhalb von $[-N, N]$ verschwinden) approximierbar. Das liefert die gewuenschte Approximation.

Wir notieren auch noch eine nuetzliche Folgerung der vorangehenden Proposition.

FOLGERUNG. Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ gegeben mit $g \geq 0$. Ist nun $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ meßbar mit $0 \leq |f| \leq g$, so gehoert auch f zu $\mathcal{L}^1(X, \mu)$ und es gilt $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$.

Beweis. Sei (g_n) eine Folge von Elementarfunktionen mit

- $g_n \rightarrow g$ μ -fast ueberall,
- (g_n) ist Cauchy-Folge bzgl. $\|\cdot\|_1$.

(Dann konvergiert also insbesondere (g_n) gegen g in $\mathcal{L}^1(X, \mu)$.)

Sei

$$X' := \bigcup A \subset X,$$

die Vereinigung von allen $A \in \mathcal{R}$ die in den Funktionen g_n auftreten. Dann ist also X' ein abzählbare Vereinigung und g verschwindet ausserhalb von X' . Damit verschwindet dann auch f ausserhalb von X' . Fuer uns ist also lediglich, dass Verhalten von f und g auf X' relevant. Daher koennen wir ohne Einschraenkung annehmen, dass X selber eine abzählbare Vereinigung von Mengen aus \mathcal{R} ist.

Dann koennen wir aber auch ohne Einschraenkung annehmen, dass X selber zu \mathcal{R} gehoert (sonst entsprechendes Zusammensetzen...).

Weiterhin koennen wir ohne Einschraenkung $f \geq 0$ annehmen (sonst Zerlegen von f ...).

Da f meßbar ist (und X zu \mathcal{R} gehoert) gibt es nach der vorangehenden Proposition eine Folge (f_n) von Elementarfunktionen, die μ -fast ueberall gegen f konvergieren. Ohne Einschraenkung gelte $f_n \geq 0$ fuer alle n . Definiere nun

$$h_n := \min\{f_n, g_n\}.$$

Dann sind die h_n Elementarfunktionen mit

- h_n to $f = \min\{f, g\}$ punktweise μ -fast ueberall,
- $0 \leq h_n \leq g_n$ fuer alle n , also insbesondere

$$\limsup_n \int_X h_n d\mu \leq \limsup_n \int_X g_n = \|g\|_1.$$

Damit folgt aus dem Lemma von Fatou dann $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$ und $\|f\|_1 \leq \|g\|_1$. \square

Zum Abschluss des Abschnittes diskutieren wir noch Integrale ueber messbare Teilmengen. Sei X eine Menge, \mathcal{R} ein Mengenring ueber X und μ ein Praemass auf \mathcal{R} . Sei $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ die zugehoerigen σ -Algebra und

$$\tilde{\mu} : \mathcal{A}(\mathcal{R}, \mu) \rightarrow [0, \infty]$$

mit $\tilde{\mu}(A) = \int_A 1_X d\mu$ falls $1_A \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{R}, \mu)$ und $\tilde{\mu}(A) = \infty$ sonst, das zugehoerige Maß. Dann definiert man fuer eine meßbare Menge $V \subset X$ und eine meßbare Funktion f auf X

$$\int_V f d\mu := \int 1_V f d\mu.$$

Ist f eine Funktion auf V , so daß die durch 0 auf $X \setminus V$ fortgesetzte Funktion \tilde{f} meßbar ist, so definiert man

$$\int_V f d\mu := \int_V \tilde{f} d\mu = \int 1_V \tilde{f} d\mu.$$

7. Der Satz von Fubini-Tonelli

In diesem Abschnitt lernen wir einen Satz kennen, der beim Ausrechnen von Integralen sehr nuetzlich ist.

Seien X und Y Mengen und \mathcal{R}_X ein Mengenring auf X und \mathcal{R}_Y ein Mengenring auf Y . Dann erzeugen die Mengen der Form $A \times B$ mit $A \in \mathcal{R}_X$ und $B \in \mathcal{R}_Y$ einen Mengenring auf $X \times Y$, den wir als den Produktmengenring $\mathcal{R}_X \times \mathcal{R}_Y$ bezeichnen. Sind weiterhin μ_X und μ_Y Praemasse auf \mathcal{R}_X bzw. \mathcal{R}_Y , so wird durch

$$\mu(\cup_{j=1}^n (A_j \times B_j)) = \sum_{j=1}^n \mu_X(A_j) \mu_Y(B_j)$$

fuer $A_j \in \mathcal{R}_X$ und $B_j \in \mathcal{R}_Y$, $j = 1, \dots, n$ mit $(A_j \times B_j) \cap (A_k \times B_k) = \emptyset$ fuer $j \neq k$ ein Praemass μ auf $X \times Y$ definiert. Das von diesem Praemass erzeugte Mass heisst das Produktmass.

THEOREM. *Seien $X, Y, \mathcal{R}_X, \mathcal{R}_Y$ und μ_X und μ_Y wie oben. Sei $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben. Dann sind aequivalent:*

- (i) *Es gehoert f zu $\mathcal{L}^1(X \times Y, \mu)$.*
- (ii) *Es ist f μ -messbar und $|f(x, \cdot)|$ gehoert fuer μ_X fast alle $x \in X$ zu $\mathcal{L}^1(Y, \mu_Y)$ und die Funktion $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F(x) = \int_Y |f(x, y)| d\mu(y)$, falls $|f(x, \cdot)| \in \mathcal{L}^1(Y, \mu_Y)$, und $F(x) = 0$ sonst, gehoert zu $\mathcal{L}^1(X, \mu_X)$.*

In diesem Fall gilt

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d\mu(x, y) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\mu_Y(y) \right) d\mu_X(x).$$

Bemerkung.

- Natuerlich gilt entsprechendes, wenn die Rollen von X und Y vertauscht werden.
- Ist $f \geq 0$ messbar, so liefert der Satz, dass auf jeden Fall gilt

$$\int f(x, y) d\mu(x, y) = \int_X \int_Y f(x, y) d\mu_Y(x) d\mu_X(x),$$

wobei allerdings beide Seiten ∞ sein koennen.

Der *Beweis* kann mit den zur Verfügung stehenden Methoden geführt werden, wuerde aber recht viel Zeit kosten (ohne aber über die Aussage hinausgehenden wesentlichen Erkenntnisgewinn zu liefern). Daher geben wir ihn hier nicht. Wir bemerken stattdessen, dass (i) \implies (ii) als Satz von Fubini bekannt ist und (ii) \implies (i) als Satz von Tonelli.

KAPITEL 3

Determinanten und Volumina

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Zusammenhang zwischen Determinanten und Volumina. Die Ergebnisse sind wesentlich fuer das Verstaendnis der Faktoren, die bei Oberflaechenintegralen auftreten.

Erinnerung - Determinante auf $V = \mathbb{R}^N$. Es gibt genau eine lineare, alternierende normierte N -Form σ auf V . Hierbei bedeutet:

- *Alternierend:* $\sigma(\dots, v, \dots, w, \dots) = -\sigma(\dots, w, \dots, v, \dots)$
- *Normiert:* $\sigma(e_1, \dots, e_n) = 1$
- *Multilinear:* $\sigma(\dots, \lambda u + v, \dots) = \lambda \sigma(\dots, u, \dots) + \sigma(\dots, w, \dots)$

Diese ist gegeben durch die Determinanten \det . Es gilt

$$\det(v_1, \dots, v_N) = \sum_{\pi \in S_N} (-1)^{\text{sgn}\pi} (v_1)_{\pi(1)} \cdots (v_N)_{\pi(N)}.$$

THEOREM. Sei $A = (v_1, \dots, v_N)$ eine $N \times N$ -Matrix und $I := [0, 1]^N$. Sei

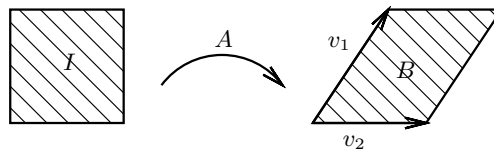
$$B := B(v_1, \dots, v_N) := \{t_1 v_1 + \dots + t_N v_N : 0 \leq t_i \leq 1, i = 1, \dots, N\}.$$

Dann gilt $B = AI = \{Ax : x \in I\}$ und

$$|B| = |\det A| = (\det A^T A)^{1/2}.$$

Hierbei bezeichnet $|B|$ das Lebesguemass (Volumen) von B .

Notation. Die Menge $B = AI$ aus dem Satz heisst der von v_1, \dots, v_N aufgespannte *Spat*, *Block*, oder *Parallelepiped*.



Bemerkung.

- Der Satz besagt, dass das Volumen eines Spats durch den Betrag der Determinante gegeben ist. Der Betrag ist noetig, da Volumina positiv sein muessen und invariant unter Vertauschung von Spalten sind.
- Das Volumen eines Spates kann man als Riemannsches oder Lebesguesches Volumen auffassen (da diese beiden uebereinstimmen fuer Mengen, denen eine Riemannsches Volumen zugeordnet werden kann).

Beweis. Wir benutzen die Charakterisierung der Determinante und zeigen, dass die Funktion

$$\delta : \mathbb{R}^{N \times N} \longrightarrow \mathbb{R}, \delta(v_1, \dots, v_N) := \begin{cases} |B| & : \det(v_1, \dots, v_N) > 0 \\ -|B| & : \text{sonst.} \end{cases}$$

N -linear, alternierend und normiert ist.

Dazu verwenden wir im wesentlichen folgende Eigenschaften des Volumens:

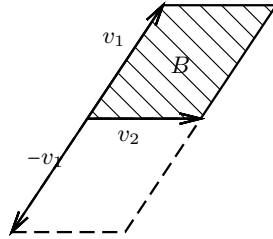
- Translationinvarianz ($|B| = |x + B|$).
- Nullmangeneigenschaft von Hyperebenen. (Jede Kompakte Teilmenge eines $N - 1$ -dimensionalen Teilraumes hat verschwindendes Volumen.)
- Gilt $B \subset B'$ so folgt $|B| \leq |B'|$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten gefuehrt:

Schritt 0. (Alternierend) Es gilt $\delta(-v_1, v_2, \dots, v_N) = -\delta(v_1, \dots, v_N)$ und $\delta(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\delta(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots)$.

Bew. 1. Formel: $B(-v_1, \dots, v_N) = -v_1 + B(v_1, \dots, v_N)$ (Zeichnung.) Mit Translationsinvarianz folgt:

$$|B(-v_1, \dots, v_N)| = |B(v_1, \dots, v_N)|.$$



Ausserdem

$$\det(-v_1, v_2, \dots, v_N) = -\det(v_1, \dots, v_N).$$

Mit diesen beiden Formeln folgt die Aussage.

2. Formel: Offenbar gilt $B(\dots v_i \dots v_j \dots) = B(\dots v_j \dots v_i \dots)$. Damit folgt

$$|B(\dots v_i \dots v_j \dots)| = |B(\dots v_j \dots v_i \dots)|.$$

Ausserdem

$$\det(\dots v_i \dots v_j \dots) = -\det(\dots v_j \dots v_i \dots).$$

Mit diesen beiden Formeln folgt die zweite Formel.

Schritt 1. Fuer $m \in \mathbb{N}$ und $i \in \{1, \dots, N\}$ ist

$$\delta(v_1, \dots, mv_i, \dots, v_N) = m\delta(v_1, \dots, v_N).$$

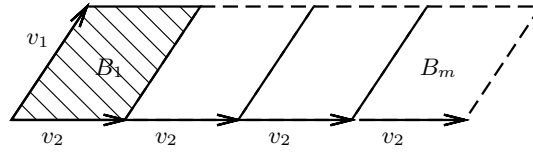
Bew. Das folgt aus der Translationsinvarianz.

Sei

$$B_1 := (v_1, \dots, v_N)I, B_m := (v_1, \dots, mv_i, \dots, v_N)I.$$

Dann gilt

$$B_m = \cup_{k=0}^{m-1} [B(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N) + kv_i] = \cup_{k=0}^{m-1} (kv_i + B_1).$$



Daher gilt $|B_m| = m|B_1|$.

Schritt 2. Fuer $q \in \mathbb{Q}_+$ ist $\delta(v_1 \dots qv_i \dots v_N) = q\delta(v_1 \dots v_N)$.

Bew. Sei $q = \frac{m}{l}$ mit $m, l \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Schritt 1 $l\delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, v_N) = \delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N)$. Also

$$(*) \delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, v_N) = \frac{1}{l}\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N).$$

Damit folgt

$$\delta(v_1, \dots, \frac{m}{l}v_i, \dots, v_N) \stackrel{\text{Schritt 1}}{=} m\delta(v_1, \dots, \frac{1}{l}v_i, \dots, v_N) \stackrel{(*)}{=} \frac{m}{l}\delta(v_1, \dots, v_i, \dots, v_N).$$

Schritt 3. (Erster Teil der Linearitaet) Fuer $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\delta(v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_N) = \lambda\delta(v_1, \dots, v_N)$.

Bew. Ohne Einschraenkung $\lambda > 0$ (sonst: $\lambda \mapsto -\lambda$ und Schritt 0). Sei $B_s := B(v_1, \dots, sv_i, \dots, v_N)$. Seien $q, q' \in \mathbb{Q}_+$ gegeben mit $q \leq \lambda \leq q'$. Dann gilt $B_q \subset B_\lambda \subset B_{q'}$ und damit

$$q|B_1| \stackrel{\text{Schritt 2}}{=} |B_q| \leq |B_\lambda| \leq |B_{q'}| \stackrel{\text{Schritt 2}}{=} q'|B_1|.$$

Da q, q' mit $q \leq \lambda \leq q'$ beliebig war folgt

$$|B_\lambda| = \lambda|B_1|.$$

Schritt 4. Falls v_1, \dots, v_N linear abhaengig sind, so gilt $\delta(v_1, \dots, v_N) = 0$.

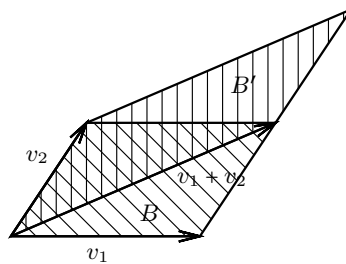
Bew. Es ist dann B eine kompakte Teilmenge eines $N - 1$ -dimensionalen Teilraumes.

Schritt 5. Es gilt $\delta(v_1 + v_2, v_2, \dots, v_N) = \delta(v_1, \dots, v_N)$.

Bew. Seien B' und B die beiden Spate. Dann gilt

$$B' \setminus B = B \setminus B' + v_2$$

(bis auf Raender).



Damit folgt die Behauptung aus Translationsinvarianz.

Schritt 6. (Zweiter Teil der Linearitaet) $\delta(v+w, v_2, \dots, v_N) = \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(w, v_2, \dots, v_N)$.

Bew. Wir zeigen zunaechst

$$(\#) \delta(x + cv_i, v_2, \dots, v_N) = \delta(x, v_2, \dots, v_N).$$

fuer $i = 2, 3, \dots, N$. Dazu $i = 2$: Es gilt

$$\begin{aligned} \delta(x + cv_2, v_2, \dots, v_N) &\stackrel{\text{Schritt3}}{=} \frac{1}{c} \delta(x + cv_2, cv_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\text{Schritt5}}{=} \frac{1}{c} \delta(x, cv_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\text{Schritt3}}{=} \delta(x, v_2, \dots, v_N). \end{aligned}$$

$i \geq 3$. Nach Schritt 0 gilt $\delta(x + cv_i, v_2, \dots, v_N) \stackrel{\text{Schritt0}}{=} -\delta(x + cv_i, v_i, \dots, v_2, \dots, v_N)$. Nun kann man weiter wie im Fall von $i = 2$ argumentieren und erhaelt

$$\delta(x + cv_i, v_2, \dots, v_N) = -\delta(x, v_i, \dots, v_2, \dots, v_N) \stackrel{\text{Schritt0}}{=} \delta(x, v_2, \dots, v_N).$$

Nun nehmen wir ohne Einschraenkung an, dass $\{v, v_2, \dots, v_N\}$ linear unabhängig also eine Basis sind (Wenn weder $\{v, v_2, \dots, v_N\}$ noch $\{w, v_2, \dots, v_N\}$ linear unabhängig sind, ist auch $\{v + w, v_2, \dots, v_N\}$ linear unabhängig und alle Terme sind 0 nach Schritt 4.) Damit gilt dann also

$$w = cv + \sum_{j=2}^N \lambda_j v_j$$

und damit

$$\begin{aligned} \delta(v + w, v_2, \dots, v_N) &= \delta(v + cv + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_N v_N, v_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\#}{=} \delta((1+c)v + \sum_{j=2}^{n-2} \lambda_j v_j + \lambda_{N-1} v_{N-1}, v_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\#}{=} \dots \\ &= \delta((1+c)v, v_2, \dots, v_N) \\ \text{Schritt3, } v + cv = (1+c)v &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + c\delta(v, v_2, \dots, v_N) \\ \text{Schritt3,} &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(cv, v_2, \dots, v_N) \\ (\# \text{ im zweiten Term}) &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(cv + \lambda_2 v_2, v_2, \dots, v_N) \\ &\stackrel{\#}{=} \dots \\ &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(cv + \sum_{j=2}^{n-1} \lambda_j v_j + \lambda_N v_N, v_2, \dots, v_N) \\ &= \delta(v, v_2, \dots, v_N) + \delta(w, v_2, \dots, v_N). \end{aligned}$$

Schritt 7. Es gilt $\delta(e_1, \dots, e_N) = 1$.

Bew. Das ist klar, da dann $A = \text{Identitaet}$ also $AI = I$.

Damit haben wir gezeigt, dass δ alternierend (Schritt 0), linear (Schritt 3 und Schritt 6, plus alternierend) und normiert (Schritt 7) ist. Als folgt $\delta = \det$

aus der abstrakten Charakterisierung der Determinanten. Damit folgt die Aussage des Theorems. \square

Die folgende Aussage liegt dem Beweis der Transformationsformel (den wir spaeter nicht geben ;-)) zugrunde.

FOLGERUNG (Verzerrung von Volumina unter linearen Abbildungen). *Sei J ein Spat eines Spates im \mathbb{R}^N und A eine $N \times N$ Matrix. Dann gilt $|AJ| = |\det A||J|$. Insbesondere gilt diese Formel, falls Q ein Intervall (d.h. achsenparalleler Spat) ist.*

Beweis. Es gilt $J = x + BI$ mit geeigneter linearer Abbildung B und Vektor x . Damit folgt $AJ = A(x + BI) = Ax + ABI$ also (unter Nutzen der Translationsinvarianz des Lebeguemasses)

$$|AJ| = |Ax + ABI| = |ABI| = |\det(AB)| = |\det A||\det B| = |\det A||x + BI|.$$

Das beendet den Beweis. \square

Wir untersuchen nun, wie man Volumina in Unterraumen messen kann. Das liegt den Betrachtung von Oberflaechenintegralen, die wir spaeter geben werden, zugrunde. Dazu betrachten wir folgende Situation. Seien a_1, \dots, a_k linear unabhängige Vektoren im \mathbb{R}^N (also insbesondere $N \geq k$). Sei b_1, \dots, b_k eine ONB von $V := \text{Lin}\{a_i : i = 1 \dots k\}$. Mittels dieser Orthonormalbasis kann V mit \mathbb{R}^k identifiziert werden durch

$$\Phi : \mathbb{R}^k \longrightarrow V, x \mapsto \sum_{j=1}^k x_j b_j.$$

Sei

$$S := \left\{ \sum_{i=1}^k t_i a_i : 0 \leq t_i \leq 1 \right\} \subset V$$

und sei $|S|$ das Volumen des Spates S in V bzgl. der durch Φ gegebenen ONB.

THEOREM. *Sei oben geschilderte Situation gegeben. Sei die $N \times k$ Matrix A definiert durch $A = (a_1 \dots a_k)$ und die $k \times k$ Matrix C durch $C := (\langle b_i, a_j \rangle)_{i,j=1,\dots,k}$. Dann gilt*

$$A^t A = (\langle a_i, a_j \rangle) = C^t C$$

und

$$\det A^t A = \det(\langle a_i, a_j \rangle) = \det C^t C = (\det C)^2.$$

Weiterhin gilt $S = CI$ mit $I = [0, 1]^k$ und

$$|S| := \sqrt{\det(\langle a_i, a_j \rangle)}.$$

Insbesondere ist also $|S|$ unabhängig von der Wahl der Orthonormalbasis.

Beweis. Es ist $A^t A = (\langle a_i, a_j \rangle)$ nach Definition der Matrixmultiplikation. Entwickeln von $a_i = \sum_l \langle a_i, b_l \rangle b_l$ liefert dann einfach $(\langle a_i, a_j \rangle) = C^t C$.

Nun zur Berechnung von $|S|$: Es gilt

$$\sum_{i=1}^k t_i a_i = \sum_{i=1}^k t_i \sum_{l=1}^k \langle a_i, b_l \rangle b_l = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{i=1}^k \langle a_i, b_l \rangle t_i \right) b_l = \sum_l C(t_1, \dots, t_k)^t(l) b_l.$$

Damit wird also S in den neuen Koordinaten (bzgl. Φ) gerade durch CI beschrieben mit $I = [0, 1]^k$. Die Aussage ueber $|S|$ folgt nun aus dem

Satz ueber Volumina und dem bisher Bewiesenen. Wegen $|S|^2 = \det A^t A$ ist $|S|$ unabhaengig von der ONB b_1, \dots, b_k , da A unabhaengig von dieser ONB ist. \square

Transformationsformel und Koordinatensysteme im \mathbb{R}^N

In diesem Abschnitt geht es um das Lebesguemass im \mathbb{R}^N und das hoehere dimensionale Analogon zur Substitutionsregel.

THEOREM (Transformationsformel). *Seien U und V offene Mengen im \mathbb{R}^N , deren Ränder Lebesguenullmengen sind. Sei $\phi : U \rightarrow V$ stetig diffbar und es gebe abgeschlossene Nullmengen $N_1 \subset U$ und $N_2 \subset V$, so dass $\phi : U \setminus N_1 \rightarrow V \setminus N_2$ bijektiv mit stetig differenzierbarer Inverser ist. Dann ist fuer jede integrierbare $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ auch $f \circ \phi : U \rightarrow \mathbb{C}$ integrierbar und es gilt*

$$\int_U f \circ \phi(x) |\det D\phi(x)| d\lambda(x) = \int_V f(y) d\lambda(y).$$

Bemerkung. Im eindimensionalen Fall (und fuer stetiges f) handelt es sich im wesentlichen um die schon bekannte Substitutionsregel. Dem Vertauschen der Reihenfolge der Grenzen entspricht das Bilden des Betrages der Ableitung.

Idee der Beweisidee: Ist $U = V = \mathbb{R}^N$ und f die charakteristische Funktion eines Quaders und ϕ eine lineare Abbildung, so ergibt sich die Aussage direkt aus einer Folgerung im vorigen Abschnitt. Im allgemeinen Fall braucht man grob gesprochen zwei Approximationen:

- Man kann f gut approximieren durch endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen von Quadern. (Definition von \mathcal{L}^1).
- Man kann ϕ gut durch seine lineare Approximation $D\phi$ approximieren. (Definition von Differenzierbarkeit).

Wir geben keine weiteren Details.

Die vielleicht wichtigste Anwendung der Transformationsformel liegt in der Benutzung von neuen (dem Problem besser angepassten) Koordinatensystemen. Wir studieren nun noch einige gängige Koordinatensysteme.

Polarkoordinaten in der Ebene Sei

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \geq 0\}$$

bijektiv und stetig differenzierbar mit

$$D\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Fuer die Funktionaldeterminante gilt

$$\det D\Phi(x, y) = \cos \varphi r \cos \varphi + r \sin \varphi \sin \varphi = r.$$

Damit ergibt sich also (mit dem Satz von Fubini/Tonelli)

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda(x, y) = \int_{[0, \infty)} r \left(\int_{[0, 2\pi]} f(r \cos \phi, r \sin \phi) d\lambda(\phi) \right) d\lambda(r).$$

Ist f radialsymmetrisch d.h. $f(x, y) = \tilde{f}(|(x, y)|)$, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda(x, y) = 2\pi \int_{[0, \infty)} r \tilde{f}(r) d\lambda(r).$$

Entsprechend folgt mit der abgeschlossenen Kugel B_R mit Radius R um den Ursprung also

$$\int_{B_R} f(x, y) d\lambda(x, y) = 2\pi \int_{[0, R]} r \tilde{f}(r) d\lambda(r).$$

Damit erhaelt man insbesondere fuer die Flaechen $F(R)$ der Kugel mit Radius R (d.h. $\tilde{f} = 1_{[0, R]}$) also

$$F(R) = \int_{B_R} 1 d\lambda(x, y) = 2\pi \int_{[0, R]} r \cdot 1 d\lambda(r) = \pi R^2.$$

Polar-/Kugelkoordinaten in \mathbb{R}^3 Sei

$$\Phi : [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\Phi : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : z \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$$

bijektiv und stetig differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$D\Phi(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & -r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

und der Funktionaldeterminante

$$\det D\Phi(r, \varphi, \theta) = -r^2 \sin \theta$$

Damit ergibt sich also (mit dem Satz von Fubini/Tonelli)

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d\lambda(x, y, z) \\ &= \int_{[0, \infty)} r^2 \left(\int_{[0, 2\pi]} \left(\int_{[0, \pi]} \sin \theta f(r \cos \phi \sin \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \theta) d\lambda(\theta) \right) d\lambda(\phi) \right) d\lambda(r). \end{aligned}$$

Ist f radialsymmetrisch d.h. $f(x, y, z) = \tilde{f}(|(x, y, z)|)$, so folgt

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) d\lambda(x, y, z) = 4\pi \int_{[0, \infty)} r \tilde{f}(r) d\lambda(r).$$

Entsprechend folgt mit der abgeschlossenen Kugel B_R im \mathbb{R}^3 mit Radius R um den Ursprung also

$$\int_{B_R} f(x, y, z) d\lambda(x, y, z) = 4\pi \int_{[0, R]} r^2 \tilde{f}(r) d\lambda(r).$$

Damit erhaelt man insbesondere fuer das Volumen $V(R)$ der Kugel mit Radius R (d.h. $\tilde{f} = 1_{[0, R]}$) also

$$V(R) = \int_{B_R} 1 d\lambda(x, y, z) = 4\pi \int_{[0, R]} r^2 \cdot 1 d\lambda(r) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Beispiel $\int e^{-t^2} dt$. Berechnen von $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda(t)$.

Setze

$$I := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2} d\lambda \text{ und } J := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-|(x,y)|^2} d\lambda(x, y).$$

Dann gilt nach dem Satz von Fubini/Tonelli aber $I^2 = J$. Mittels Polarkoordinaten in der Ebene, des Satzes von Fubini/Tonelli und der Tatsache, dass fuer stetige Funktion das Lebesgue Integral und das Riemann Integral uebereinstimmen, koennen wir weiterhin J ausrechnen zu

$$\begin{aligned} J &= \int_{(0, \infty) \times [0, 2\pi]} r e^{-r^2} d\lambda(\phi, r) \\ \text{(Fubini/Tonelli)} &= 2\pi \int_{(0, \infty)} r e^{-r^2} d\lambda(r) \\ \text{(Monotone Konv.)} &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{(0, R)} r e^{-r^2} d\lambda(r) \\ &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_r^R r e^{-r^2} dr \\ \text{(Riemanint. = Lebesgueint.)} &= 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^R\right) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Damit folgt $I = \sqrt{\pi}$.

Untermannigfaltigkeiten und Oberflächenintegrale

In diesem Abschnitt führen wir Integrale ueber parametrisierte Gebilde im Raum ein. Das erlaubt es insbesondere ueber Untermannigfaltigkeiten zu integrieren. Untermannigfaltigkeiten sind die glatten Gebilde im Raum. Sie sind lokal Nullstellenmengen von glatten Funktionen oder aequivalent lokale Graphen.

Wir beginnen mit etwas Notation.

Notation.

- Die Nullstellenmenge einer Funktion g bezeichnen wir mit $N(g)$, d.h. zu $g : W \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definieren wir

$$N(g) := \{z \in W : g(z) = 0\} = \cap_{j=1}^k N(g_j).$$

- Den Graphen einer Funktion f bezeichnen wir mit $G(f)$ d.h. zu $f : U \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ definieren wir

$$G(f) := \{(x, f(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M.$$

- Eine stetig diffbare Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ heisst regular in x , wenn $Df(x)$ maximalen Rang hat. (Also $\text{Rang} Df(x) = M$ falls $M \leq N$ und $\text{Rang} Df(x) = N$ falls $N \leq M$.) Ist die Funktion in jedem $x \in U$ regular, so heisst sie regulaer.

Beispiel. Ist $g : W \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist g genau dann regular in $x \in W$, wenn $\nabla g(x) \neq 0$ gilt.

Beispiel. $U \subset \mathbb{R}^N$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^M$ stetig diffbar. Dann ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, $F(x) = (x, f(x))$ regular. (Denn $DF(x) = (1, Df(x))^t$.)

DEFINITION (Parameterdarstellung / Parametrisierung). Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ geben. Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen $k \leq N$, und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Gilt $M = \varphi(U)$, so heisst (U, φ) eine Parameterdarstellung von M . Dann heisst k die Dimension der Parameterdarstellung. Die Funktion

$$G_\varphi : U \rightarrow [0, \infty), G_\varphi(x) := \sqrt{\det(D\varphi(x)^T D\varphi(x))} = \sqrt{\det(\langle \partial_i \varphi, \partial_j \varphi \rangle)}$$

heisst Gramsche Determinante der Parameterdarstellung.

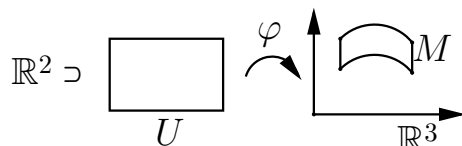
Die Parameterdarstellung heisst regulaer, wenn $D\varphi$ ueberall Rang k hat. In diesem Fall bezeichnet man M als k -dimensional.

Bemerkung.

- Statt von Parameterdarstellung spricht man auch manchmal von Parametrisierung. Die Gramsche Determinante ist auch als Flaechelement bekannt.

- (Uebung) Die Parameterdarstellung ist genau dann regulär, wenn G_φ nirgends verschwindet. (Entwickle $D\varphi(x)$ nach ONB...).

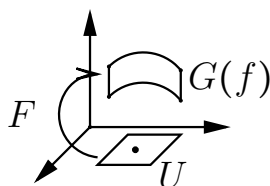
Beispiel. Allgemeine Parameterdarstellung:



Beispiel. (Graphen sind reguläre Parameterdarstellungen) Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist

$$\text{Bild} F = G(f)$$

und (U, F) ist eine reguläre Parameterdarstellung. Für die Gramsche Determinante gilt $G_F(x)^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)$.



Bew. Aus dem oben Diskutierten folgt, dass (U, F) eine reguläre Parameterdarstellung ist. Es bleibt, die Aussage zur Gramschen Determinante zu zeigen. Das kann man (mit etwas Mühe) direkt nachrechnen. Wir lernen zum Ende dieses Abschnittes einen strukturellen Zugang kennen

Beispiel. (Kurven als Parameterdarstellungen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist γ eine Parameterdarstellung. Sie ist regulär, wenn γ' nirgends verschwindet. Es ist $G_\gamma(t) = |\gamma'(t)|$.

Bew. Die Aussagen zur Parameterdarstellung sind klar. Es bleibt, die Aussage zur Gramschen Determinante zu zeigen: Es gilt $D\gamma = \gamma'(t)$. Damit folgt

$$D\gamma^t D\gamma = \gamma'^t \gamma' = \langle \gamma', \gamma' \rangle = |\gamma'|^2.$$

Beispiel. (Kreis) Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi: (0, 2\pi) \rightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus \{(1, 0)\}$. Dann gilt $D\varphi(t) = R(-\sin t, \cos t)$ und für die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t)^2 = R^2.$$

Bew. Es handelt sich um eine Kurve.

Beispiel. (Sphäre) Sei $S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi: (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow S_R, \psi(\varphi, \vartheta) = R(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus N$ mit $N = \{(x, y, z) \in S_R : x \geq 0, y = 0\}$ (vgl. Globus: Laengengrade und Breitengrade). Es gilt (Uebung)

$$D\psi(\varphi, \vartheta) = \dots$$

Damit folgt

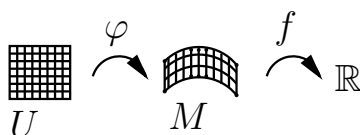
$$D\psi^T D\psi = R^2 \operatorname{diag}(1, \sin^2 \vartheta)$$

und

$$G_\varphi^2 = R^4 \sin^2 \vartheta.$$

Auf Gebilden, die durch (reguläre) Parameterdarstellungen gegeben sind, koennen wir Funktionen integrieren (vgl. Kurvenintegral). Darum geht es als naechstes:

Idee. $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei (U, φ) eine Parameterdarstellung von M . Dann koennen wir U in sehr kleine disjunkte Wuerfel Q_j zerlegen. In jedem Wuerfel koennen wir nun einen Punkt p_j waelen. *Zeichnung.* $p_j, Q_j, \varphi(Q_j), D\varphi(Q_j)$.



Dann sollte das gesuchte Integral im wesentlichen durch seine Riemannsumme

$$\sum_j \operatorname{vol}(\varphi(Q_j)) f(\varphi(p_j))$$

gegeben sein (und der Fehler umso kleiner, je kleiner die Q_j sind). Da φ stetig diffbar ist, ist fuer kleine Wuerfel Q_j aber $\varphi(Q_j) \sim \varphi(p_j) + D\varphi(p_j)Q_j$. Entsprechend folgt

$$\begin{aligned} \int f d\sigma &\simeq \sum_j \operatorname{vol}(\varphi(Q_j)) f(\varphi(p_j)) \\ &\simeq \sum_j \operatorname{vol}(D\varphi(p_j)Q_j) f(\varphi(p_j)) \\ &= \sum_j \sqrt{\det(D\varphi^T(p_j)D\varphi(p_j))} |Q_j| f(\varphi(p_j)) \\ &\simeq \int_U f(\varphi(p)) \sqrt{\det(D\varphi^T D\varphi(p))} d\lambda(p). \\ &= \int_U f(\varphi(p)) G_\varphi(p) d\lambda(p). \end{aligned}$$

(Hier: Erste Gleichung: Riemann summe; zweite Gleichung : linear Approximation; dritte Gleichung: Betrachtungen zu Volumina und Determinanten im vorigen Kapitel; vierte Gleichung: Riemann Summe.)

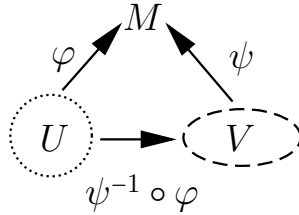
Wir wollen also definieren

$$\int_M f d\sigma := \int_U f(\varphi(p)) \sqrt{\det(D\varphi^t D\varphi)(p)} dp = \int_U f(\varphi(p)) G_\varphi(p) dp.$$

Das so definiert Integral haengt nicht von der Parameterdarstellung ab (und damit handelt es sich wirklich um eine sinnvolle Definition).

PROPOSITION (Unabhängigkeit des Integrals von der Parameterdarstellung). Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ mit einer regulären injektiven Parameterdarstellung (V, ψ) gegeben. Dann gilt für jede weitere injektive Parameterdarstellung (U, φ) von M , dass

$$\int_V f(\psi(x))G_\psi(x)dx = \int_U f(\varphi(y))G_\varphi(y)dy.$$



Bemerkung. Um die Unabhängigkeit des Integrals von allen injektiven Parameterdarstellungen zu erhalten, reicht Existenz einer einzigen injektiven regulären Parameterdarstellung.

Beweis. Sei $T := \psi^{-1} \circ \varphi : U \rightarrow V$. Dann ist T bijektiv (klar, da φ, ψ bijektiv sind) und stetig diffbar (! hier nutzt man Regularität von ψ s.u.), und es gilt $\varphi = \psi \circ T$. Entsprechend folgt

$$D\varphi = D\psi \circ DT$$

und damit

$$D\varphi^t D\varphi = DT^t (D\psi^t \circ D\psi) DT$$

also nach Bilden der Determinante

$$G_\varphi^2 = |\det DT|^2 G_\psi^2.$$

Zieht man die Wurzel erhält man

$$G_\varphi = |\det DT| G_\psi$$

und die gewünschte Aussage folgt aus der Substitutionsregel.

(! Noch zu zeigen: T stetig diffbar: Sei $V \subset \mathbb{R}^k$. Da ψ regulär, also $\text{Rang } D\psi = k$ gilt, können wir ohne Einschränkung voraussetzen, dass die letzten k Zeilen von $D\psi$ linear unabhängig sind. Dann ist

$$G : V \times \mathbb{R}^{N-k} \rightarrow \mathbb{R}^N, \quad G(x, y) := \psi(x) + (y, 0)$$

stetig diffbar und lokal invertierbar. (Denn: $DG(x, y) = \dots$, Zeichnung: Parametrisiere durch ψ und 'Verschiebung'). Es gilt $G(x, 0) = \psi(x) \in M$, also folgt für

$$z = \psi(x) = G(x, 0) \in M$$

$$\psi^{-1}(z) = x = 1\text{-Komponente von } G^{-1}(z)$$

für $z \in M$. Damit ist

$$T(u) = \psi^{-1} \circ \varphi(u) = 1\text{-Komponente von } G^{-1}(\varphi(u))$$

als Verknüpfung stetig diffbarer Funktionen, ebenfalls stetig diffbar.) \square

DEFINITION (Oberflächenintegral einer Parameterdarstellung). Ist $M \subset \mathbb{R}^N$ gegeben, so dass M das Bild einer regulären injektiven Parameterdarstellung ist, und ist $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit kompaktem Träger, so definiert man

$$\int_M f(p) d\sigma(p) := \int_M f d\sigma := \int_U f(\varphi(x)) G_\varphi(x) dx$$

wobei (U, φ) eine beliebige injektive Parameterdarstellung von M ist.

DEFINITION (Volumen). Sei M wie in vorangehender Definition. Dann ist das Volumen von M definiert als

$$\int_M 1 d\sigma(x) = \int_U G_\varphi(x) dx,$$

wobei (U, φ) eine beliebige injektive Parameterdarstellung von M ist.

Bemerkung.

- Das Volumen einer eindimensionalen Parameterdarstellung heisst auch Länge.
- Das Volumen einer zweidimensionalen Parameterdarstellung heisst auch Fläche.
- Das Volumen einer dreidimensionalen Parameterdarstellung heisst auch Volumen.

Wir betrachten nun das Oberflächenintegral für die von oben schon bekannten Beispiele. Dabei verwenden wir die von oben bekannte Notation und auch die dort berechneten Gramschen Determinanten.

Beispiel. (Kurve) Sei $I \subset \mathbb{R}$ offen und $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann ist (s.o.) $G_\gamma(t)^2 = |\gamma'(t)|^2$. Entsprechend gilt für die Länge der Kurve

$$\text{Vol}(\gamma) = \int_I 1 dS = \int_I |\gamma'(t)| dt,$$

wie wir es ja schon hatten.

Beispiel. (Kreis) Sei $S_R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\varphi : (0, 2\pi) \rightarrow S, \varphi(t) = R(\cos t, \sin t)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus \{(1, 0)\}$. Für die Gramsche Determinante gilt

$$G_\varphi(t)^2 = R^2.$$

Damit gilt für das Oberflächenintegral einer Funktion $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p) d\sigma(p) = \int_0^{2\pi} R f(R \cos t, R \sin t) dt.$$

Insbesondere folgt für das Volumen der Kreislinie (Länge der Kreislinie) also

$$\text{Länge} = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R.$$

Beispiel. (Graph einer Funktion). Sei $U \subset \mathbb{R}^k$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^{k+1}$, $F(x) = (x, f(x))$. Dann ist (U, F) eine reguläre

Parameterdarstellung. Für die Gramsdeterminante gilt $G_F(x)^2 = (1 + |\nabla f(x)|^2)$. Damit folgt für das Oberflächenintegral also

$$\int_M g(p) d\sigma(p) = \int_U g(F(u)) G_F(u) du.$$

Beispiel. (Sphäre) Sei $S_R := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Dann ist

$$\psi : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \longrightarrow S_R, \psi(\varphi, \vartheta) = R(\cos \varphi \sin \vartheta, \sin \varphi \sin \vartheta, \cos \vartheta)$$

eine injektive Parameterdarstellung von $S_R \setminus N$ (s.o.). Es gilt

$$G_\psi^2 = R^4 \sin^2 \vartheta.$$

Damit gilt für das Oberflächenintegral einer Funktion $f : S_R \longrightarrow \mathbb{R}$ also

$$\int_{S_R} f(p) d\sigma(p) = \int_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} f(\psi(\varphi, \vartheta)) R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta.$$

Insbesondere folgt für das Volumen der Sphäre (Oberfläche der Kugel)

$$\text{Oberfläche} = \int_{(0, 2\pi) \times (0, \pi)} 1 R^2 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta = 4\pi R^2.$$

Besonders wichtig sind Oberflächenintegrale über Gebilde der Dimension $N - 1$ im \mathbb{R}^N . (Solche Gebilde werden wir später unter dem Namen Hyperflächen kennenlernen). Dazu gehören insbesondere die Gebilde, die durch Graphen gegeben werden. In diesem Fall können wir die Gramschen Determinanten und die Normalenräume leicht ausrechnen. Dazu ist die folgende Definition sehr nützlich.

DEFINITION. Seien a_1, \dots, a_{N-1} Vektoren in \mathbb{R}^N . Sei $A^{(k)}$ die $(N - 1) \times (N - 1)$ -Matrix, die aus $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ durch Streichen der k -ten Zeile entsteht ($k = 1, \dots, N$). Dann heisst

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1} := (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$$

mit $\alpha_k := (-1)^{k-1} \det A^{(k)}$ das äussere Produkt von a_1, \dots, a_{N-1} .

Bemerkung. Für jede natürliche Zahl k gilt $(-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$.

LEMMA. Seien a_1, \dots, a_{N-1} Vektoren in \mathbb{R}^N , $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ und $\nu := a_1 \wedge \dots \wedge a_{N-1}$. Dann gilt $\nu \neq 0$ genau dann, wenn a_1, \dots, a_{N-1} linear unabhängig sind. Weiterhin gilt:

- (a) $\langle b, \nu \rangle = \det(b, a_1, \dots, a_{N-1})$ für alle $b \in \mathbb{R}^N$.
- (b) (1) $\nu \perp a_j$, $j = 1, \dots, N - 1$. (Richtung modulo Vorzeichen)
- (2) $\|\nu\|^2 = \det(a_1, \dots, a_{N-1})^T (a_1, \dots, a_{N-1})$. (Länge)
- (3) $\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) \geq 0$. (Vorzeichen)

Sowohl durch (a) als auch durch (b) ist ν eindeutig bestimmt.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Charakterisierung von $\nu \neq 0$: Sind die Vektoren a_1, \dots, a_{N-1} linear unabhängig, so hat $A = (a_1, \dots, a_{N-1})$ genau $N - 1$ linear unabhängige Spalten und damit auch $(N - 1)$ linear unabhängige Zeilen. Damit gibt es also ein k , so dass $A^{(k)}$ invertierbar ist. Dann verschwindet dann die k -te Komponente von ν nicht. Ist umgekehrt $\nu \neq 0$, so gibt es ein k so dass $A^{(k)}$ invertierbar ist und damit hat A (mindestens) den Rang $(N - 1)$ und damit sind die Spalten linear unabhängig.

Wir zeigen nun die letzte Aussage: Die letzte Aussage ist klar.

(a) Das folgt durch Entwickeln von $\det(b, a_1, \dots, a_{N-1})$ nach der ersten Spalte.

(b) Es folgen (1) aus (a) (wegen $\langle a_j, \nu \rangle = \det(a_j, a_1, \dots, a_{N-1}) = 0$). Es folgt (3) aus (a) (wegen $\det(\nu, a_1, \dots, a_N) = \langle \nu, \nu \rangle$).

Zu 2. Ist $\nu = 0$ so sind (vgl. Beginn des Beweises) die Vektoren a_1, \dots, a_{N-1} linear abhaengig und darum gilt (vgl. Uebung) $\det A^T A = 0$, und es folgt (2). Es reicht also den Fall $\nu \neq 0$ zu betrachten: Es gilt (unter Nutzen von (1)):

$$(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) = \text{Blockmatrix}(\nu^T \nu, A^T A).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})|^2 &= \det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})^T (\nu, a_1, \dots, a_{N-1}) \\ &= \det \text{Blockmatrix}(\nu^T \nu, A^T A) \\ &= \|\nu\|^2 \det A^T A. \end{aligned}$$

Mit (a) ergibt sich

$$(\|\nu\|^2)^2 \stackrel{(a)}{=} |\det(\nu, a_1, \dots, a_{N-1})|^2 = \|\nu\|^2 \det A^T A.$$

Das liefert nach Division durch $\|\nu\| \neq 0$ dann

$$\|\nu\| = \sqrt{\det A^T A}.$$

□

Wir koennen das nun auf Parameterdarstellung von Hyperflaechen anwenden.

DEFINITION. Ist (φ, U) eine Parameterdarstellung von $M = \varphi(U)$, so bezeichnen wir das Bild von $D\varphi(x)$ als den Tangentialraum von M in x bzgl. φ . Das orthogonale Komplement von des Tangentialraumes bezeichnen wir als den Normalenraum. *Zeichnung.*

FOLGERUNG (Normale einer Hyperflaeche). Sei $\varphi : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine (regulaere) Parametrisierung von $\varphi(U)$. Sei $\nu := \partial_1 \varphi \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} \varphi$. Dann gilt:

- $\nu \perp \partial_j \varphi$ d.h. ν ist normal zu der Flaeche. (vgl. (b), 1. des vorigen Lemma).
- $\|\nu\| = G_\varphi$ d.h. Laenge von ν ist Flaechenelement. (vgl. (b), 2. des vorigen Lemma.)

Bemerkung. In Worten besagt die Folgerung: Der Vektor ν ist senkrecht auf der Flaeche und seine Laenge ist gerade das Flaechenelement.

Damit koennen wir die Gramschen Determinanten und zusaetzlich noch die Normalenvektoren fuer die beiden wichtigsten Darstellungen von Hyperflaechen (naemlich als Graphen bzw. als Nullstellenmengen) explizit bestimmen. (Die Berechnung der Normalenvektoren ist fuer spaeter nuetzlich. In diesem Abschnitt interessieren uns hauptsaechlich die Gramschen Determinanten.)

Beispiel - Graphen. Sei $f : U \subset \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar und $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(u) = (u, f(u))$ die zugehörige Parameterdarstellung. Dann gilt fuer $\nu := \partial_1 F(u) \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F$ die Formel

$$\nu = (-1)^N (\partial_1 f(u), \dots, \partial_{N-1} f(u), -1).$$

Insbesondere ist also

$$G_F(u) = \sqrt{1 + \|\nabla f(u)\|^2}.$$

Bew. Das 'Insbesondere' ist klar nach der vorangehenden Folgerung.

Es reicht also die erste Aussage zu beweisen. Es gilt $DF(x) = (1, \nabla f(x))^t$.

Nun gilt nach Definition

$$\nu_j := j\text{-te Komponente von } \partial_1 F(u) \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F = (-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)}.$$

Es ist $(DF)^{(j)} = \dots$. Damit folgt (fuer $j = 1, \dots, N-1$) durch Entwickeln nach der j -ten Spalte

$$\nu_j = \det(-1)^{j+1} \det(DF)^{(j)} = (-1)^{j+1} (-1)^{j+N-1} \partial_j f = (-1)^N \partial_j f$$

und

$$\nu_N = (-1)^{N+1} \det 1 = (-1)^N (-1).$$

Das liefert die Behauptung.

Beispiel - Nullstellenmenge. Sei $g : V \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit $\partial_N g(x) \neq 0$ fuer alle $x \in V$ gegeben. Sei

$$M := \text{Nullstellenmenge von } g$$

als Graph einer Funktion f gegeben. (Zumindest lokal ist das immer der Fall.) Es gibt also $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit $M = \text{Graph}(f)$ also $g(u, f(u)) \equiv 0$. Fuer die zugehörige Parameterdarstellung (F, U) mit $F(u) = (u, f(u))$ gilt dann

$$\nu := \partial_1 F \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} F = (-1)^{N+1} (\partial_N g(F(u)))^{-1} \nabla g(F(u)).$$

Insbesondere ist also

$$G_F = \frac{1}{|\partial_N g|} \|\nabla g\|.$$

Bew. Das 'Insbesondere' ist klar nach der vorigen Folgerung. Es reicht also die erste Aussage zu beweisen.

Wir schreiben u fuer (x_1, \dots, x_{N-1}) . Die implizit definierte stetig diffbare Funktion f erfuehlt

$$g(u, f(u)) \equiv 0.$$

Damit gilt also nach Kettenregel

$$0 = \nabla_u g + \partial_N g \nabla_u f.$$

Daraus folgt

$$\nabla f = -(\partial_N g)^{-1} \nabla_u g.$$

Damit gilt fuer das zugehörige $F(u) = (u, f(u))$ also nach dem vorigen Beispiel

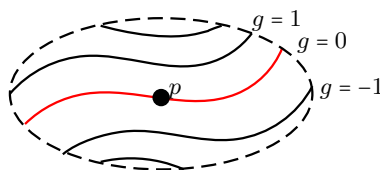
$$\nu = (-1)^N ((-\partial_N g)^{-1} \nabla_u g, -1) = (-1)^{N+1} (\partial_N g)^{-1} \nabla g.$$

Es folgt die Behauptung.

Bisher haben wir Mengen betrachtet, die global (d.h. als Ganze) durch eine Parametrisierung gegeben sind. Wir betrachten nun Mengen, die lediglich lokal durch Parametrisierungen gegeben sind.

LEMMA. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$, $p \in M$ und $k \leq N$. Äquivalent:

- (i) Es existiert eine offene Umgebung W von p in \mathbb{R}^N und reguläres $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ mit $M \cap W = N(g)$. (M ist lokal eine Nullstellenmenge.)



- (ii) Es existiert eine offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$, und eine Permutation $P : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit

$$M \cap W = PG(f).$$

(M ist lokal Graph.)

- (iii) Es existiert eine offene Umgebung W von $p \in \mathbb{R}^N$ und eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^k$ und ein bijektives stetig differenzierbares reguläres $\varphi : U \rightarrow W \cap M$, dessen Inverse wieder stetig ist.

Beweis. Die Richtung (i) \implies (ii) folgt aus dem Satz über implizite Funktionen. Die andere Implikation (ii) \implies (i) folgt (für ohne Einschränkung $P = Id$) einfach durch Betrachten von $g(x, y) = y - f(x)$. (Hier $x \in \mathbb{R}^k$, $y \in \mathbb{R}^{N-k}$.)

Die Implikation (ii) \implies (iii) ist klar (da man für φ gerade die Abbildung $P \circ F$ wählen kann, wobei $F(u) = (u, f(u))$ ist.

Der Beweis der Implikation (iii) \implies (ii) wird nur skizziert. \square

DEFINITION (Untermannigfaltigkeit). Eine Teilmenge M von \mathbb{R}^N heißt Untermannigfaltigkeit (des \mathbb{R}^N) der Dimension k , wenn sie in jedem Punkt $p \in M$ eine der Bedingungen des Lemma erfüllt.

Bemerkung.

- Der Fall $k = N$ kann auch zugelassen werden. Dann erhält man offene Teilmengen des \mathbb{R}^N . Insbesondere ist \mathbb{R}^N selber eine (Unter)mannigfaltigkeit. Das erklärt die Bezeichnung.
- Eine Untermannigfaltigkeit ist also lokal durch reguläre, injektive Parameterdarstellungen mit stetiger Inverser gegeben.
- Untermannigfaltigkeiten der Dimension $N - 1$ heißen auch *Hyperflächen*. Sie sind also (lokal) Nullstellengebilde von reellwertigen Funktionen.
- Beliebige Untermannigfaltigkeiten sind lokal Schnitte von Hyperflächen (da $N(g) = \cap_i^{N-k} N(g_i)$).

- Die von uns hier betrachteten Mannigfaltigkeiten sind alle Teilmengen der Mannigfaltigkeit \mathbb{R}^N . Das erklärt die Bezeichnung *Untermannigfaltigkeit*. Es gibt auch ein 'absolutes' Konzept von Mannigfaltigkeiten. Allerdings erweisen sich diese Mannigfaltigkeiten dann doch wieder als in einen geeignet hoch dimensionalen Euklidischen Raum einbettbar.

Beispiel. (Affiner) Unterraum.

Beispiel. Einheitskreislinie.

Beispiel. Die Sphaere $S^{N-1} := \{x \in \mathbb{R}^N : |x|^2 - 1 = 0\}$ ist eine Hyperflaeche.

Beispiel. Torus

Beispiel. (Uebung) $SL(n)$, $Gl(n)$.

Wir geben nun den schon aufgetretenen Verallgemeinerungen von Parametrisierung durch Graphen einen Namen.

DEFINITION. *Ist U eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^k und $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar, regulaer und injektiv mit stetiger Inversen, so heisst φ eine Einbettung.*

Bemerkung. Aus Regularitaet und Injektivitaet folgt nicht die Stetigkeit der Inversen, wie man an Beispielen sieht.

Damit erhaelt man aus dem obigen Lemma sofort die Folgerung.

FOLGERUNG. *Es ist $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit genau dann, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge W existiert sowie eine Einbettung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $p \in W$ und $\varphi(U) = M \cap W$.*

Bemerkung. Die Inversen der in der Folgerung auftretenden Abbildungen φ heissen 'Karten' (da sie die Situation einer Landkarte als Parametrisierung eines Stueckes der Erdoberflaeche verallgemeinern).

Wir erinnern nun an Tangentialflaechen und Normalen von Untermannigfaltigkeiten (vgl. vorangehendes Semester). *Zeichnung.*

DEFINITION (Tangentialraum und Normalraum). *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine Untermannigfaltigkeit und $p \in M$. Dann heisst*

$T_p M := \{\gamma'(0) : \gamma : (-\delta_\gamma, \delta_\gamma) \rightarrow \mathbb{R}^N \text{ stetig diffbar, } \gamma(0) = p, \gamma((-\delta_\gamma, \delta_\gamma)) \subset M\}$
der Tangentialraum von M in p . Der Normalraum $N_p M$ ist definiert als

$$N_p M := T_p M^\perp.$$

THEOREM (Beschreibung Tangentialraum und Normalraum). *Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ UMK gegeben. Sei $p \in M$ und $W \subset \mathbb{R}^N$ offen mit*

$$p \in M \cap W = N(g) = G(f) = \text{Bild}(F),$$

wobei $U \subset \mathbb{R}^k$, offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ stetig diffbar, $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, $F(x) = (x, f(x))$, $g : W \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$, stetig diffbar und regulaer (d.h. $\text{Rang} Dg = N - k$). Dann gilt

$$T_p M = \text{Ker} Dg(p) = \text{Bild} DF(p_0)$$

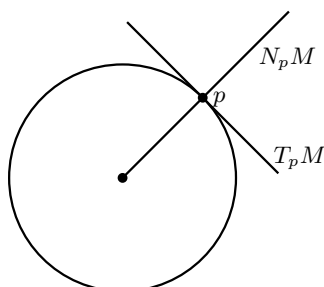
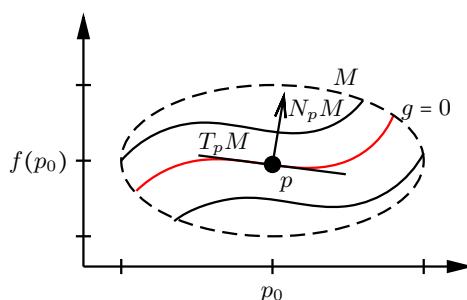


ABBILDUNG 1. Tangential- und Normalraum einer zweidimensionalen Sphäre in p

für $p = F(p_0)$. Insbesondere gilt

$$T_p M = \bigcap_{j=1}^{N-k} \{\nabla g_i(p)\}^\perp, \quad N_p M = \text{Lin}\{\nabla g_i(p) : i = 1, \dots, N-k\}$$

sowie $\dim T_p M = k$, $\dim N_p M = N - k$.



Bemerkung.

- Linearisierte Version von $M = \text{Ker}(g) = \text{Bild}F$ liefert $T_p M = \text{Ker}Dg = \text{Bild}DF$.
- Der Satz zeigt, dass $T_p M$ in der Tat ein Vektorraum ist.
- In Richtung ∇g_i stärkstes Wachstum von g_i . In Richtung $T_p M$ kein Wachstum der g_i (da Nullstellenmenge). *Zeichnung.*
- Eine entsprechende Darstellung des Tangentialraumes gibt es auch, wenn die Mannigfaltigkeit durch eine Funktion φ dargestellt ist.

Beispiel - $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. In diesem Fall ist $M = U$ eine Untermannigfaltigkeit und der Tangentialraum ist in jedem Punkt $p \in M$ durch \mathbb{R}^N gegeben. (Betrachte die Kurven $\gamma(t) = p + tv$ für beliebiges $v \in \mathbb{R}^N$...)

Beispiel - Sphäre in \mathbb{R}^2 . Sei $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Dann gilt in jedem $p \in S$

$$T_p S = \{p\}^\perp \quad \text{und} \quad N_p M = \text{Lin}\{p\}.$$

Bew. Eine Kurve γ durch p in M erfüllt $\langle \gamma, \gamma \rangle \equiv 1$. Nun ableiten....

Beispiel - Sphäre in \mathbb{R}^N . Sei $S^N := \{x \in \mathbb{R}^N : \langle x, x \rangle = 1\}$. Dann gilt in jedem $p \in S^N$

$$T_p S^N = \{p\}^\perp \quad \text{und} \quad N_p M = \text{Lin}\{p\}.$$

Bew. Eine Kurve γ durch p in M erfüllt $\langle \gamma, \gamma \rangle \equiv 1$. Nun ableiten....

Beispiel - $GL(n)$. (Uebung). Es ist $GL(n) :=$ Invertierbare $n \times n$ Matrizen $= n \times n$ Matrizen mit nichtverschwindender Determinante eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} . Fuer den Tangentialraum in I gilt $T_I GL(n) = n \times n$ Matrizen.

Beispiel - $Sl(n)$. (Uebung). Es ist $Sl(n) := n \times n$ Matrizen mit Determinante 1 eine Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{n^2} . Fuer den Tangentialraum in I gilt $T_I Sl(n) = n \times n$ Matrizen mit verschwindender Spur.

Um Integrale ueber Untermannigfaltigkeiten sauber einzufuehren, brauchen wir noch ein weiteres Hilfsmittel: die Partition der Eins. Dazu erinnern wir zunaechst an zwei Konzepte.

Erinnerung - Kompaktheit: Es gibt verschiedene aequivalente Definitionen von Kompaktheit. Hier diskutieren wir die drei gaengigsten Varianten (vgl. vergangenes Semester).

THEOREM. Sei (K, d) ein metrischer Raum. Dann sind aequivalent:

- (i) Jede Folge in K hat eine in K konvergente Teilfolge. 'K ist folgenkompakt'.
- (ii) Jede offenen Ueberdeckung von K hat eine endliche Teilueberdeckung (d.h. Zu allen $U_\alpha, \alpha \in A$, offen mit $K \subset \cup U_\alpha$ existiert $N \in \mathbb{N}$ und $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ mit $K \subset \cup_{j=1}^N U_{\alpha_j}$.) 'K ist ueberdeckungskompakt'.
- (iii) Es ist K vollstaendig und total beschaenkt. 'Nicht zu klein und nicht zu gross.'

Erinnerung - C_c^∞ . Der Traeger der Funktion $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert als

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}.$$

Damit ist dann $\text{supp}(f)$ eine abgeschlossene Teilmenge von \mathbb{R}^N und es verschwindet f auf dem Komplement von $\text{supp}(f)$. Tatsaechlich (Uebung) ist $\text{supp}(f)^c$ die größte offene Teilmenge von \mathbb{R}^N auf der f verschwindet. Man definiert

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^N) := \{f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist beliebig oft diffbar und hat kompakten Traeger}\}.$$

Nach diesen Erinnerungen koennen wir nun die Partition der Eins einfuehren.

THEOREM (Untergeordnete Partition der Eins). Sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und O_1, \dots, O_n eine offene Ueberdeckung von K . Dann gibt es Funktionen $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

$$\sum_{j=1}^n \varphi_j(x) = 1 \text{ fuer } x \in K$$

und $\text{supp } \varphi_j \subset O_j$ fuer jedes $j = 1, \dots, n$. Diese Funktionen werden eine der Ueberdeckung O_j untergeordnete Partition der Eins genannt.

Beweis. Wir geben hier keine Details. □

Damit koennen wir nun zur *Integration von Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten* kommen: Wir fuehren Oberflaechenintegrale ueber stetige Funktionen mit kompaktem Traeger auf Untermannigfaltigkeiten ein. Sei M eine

Untermannigfaltigkeit. Wähle zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Menge V_p in \mathbb{R}^N , so dass $V_p \cap M$ gerade das Bild einer regulären Parameterdarstellung (U_p, ϱ_p) ist. Den kompakten Träger von f können wir mit endlich vielen dieser V 's überdecken. Diese seien mit V_1, \dots, V_n bezeichnet. Seien (U_j, ϱ_j) , $j = 1, \dots, n$ die zugehörigen Parameterdarstellungen. Sei φ_j , $j = 1, \dots, n$ eine der Überdeckung (V_j) untergeordnete Partition der Eins. Dann definieren wir

$$\int_M f d\sigma := \sum_{j=1}^n \int_{V_j \cap M} (f \varphi_j) d\sigma = \sum_{j=1}^n \int_{U_j} (f \varphi_j)(\varrho_j(u)) \sqrt{G_{\varrho_j}}(u) du.$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition weder von der gewählten Überdeckung noch von der gewählten Partition der Eins abhängt:

Seien φ_j , $j = 1, \dots, n$ zu V_i , $i = 1, \dots, n$ und ψ_i , $i = 1, \dots, m$ zu W_i , $i = 1, \dots, m$ untergeordnete Partitionen der Eins. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_j \int_{V_j \cap M} f \varphi_j d\sigma &= \sum_j \int_{V_j \cap M} f \varphi_j (\sum_i \psi_i) d\sigma \\ &= \sum_{i,j} \int_{V_j \cap M} f \varphi_j \psi_i d\sigma \\ (\text{supp } \psi_i \subset W_i) &= \sum_{i,j} \int_{V_j \cap W_i \cap M} f \varphi_j \psi_i d\sigma \\ (\text{supp } \varphi_j \subset V_j) &= \sum_{i,j} \int_{W_i \cap M} f \varphi_j \psi_i d\sigma \\ &= \sum_i \int_{W_i \cap M} f \psi_i \sum_j \varphi_j d\sigma \\ (\text{Part.d.Eins}) &= \sum_i \int_{W_i \cap M} f \psi_i d\sigma. \end{aligned}$$

Beispiel - Kreislinie. Sei $S_R := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = R^2\}$. Wir wählen eine Überdeckung bestehend aus einer Umgebung V_1 von $(1, 0)$ mit

$$V_1 \cap S_R = \{R(\cos(s), \sin(s)) : -\varepsilon < s < \varepsilon\}$$

für ein $\varepsilon > 0$ und $V_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1, 0)\}$ und den dazu passenden Parametrisierungen

$$\varrho_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S_R, \varrho_1(s) = R(\cos(s), \sin(s))$$

und

$$\varrho_2 : (0, 2\pi) \longrightarrow S_R, \varrho_2(t) = R(\cos(t), \sin(t)).$$

Sei φ_1, φ_2 eine untergeordnete Partition der Eins. Dann gilt für stetiges $f : S_R \rightarrow \mathbb{R}$ also

$$\begin{aligned} \int f d\sigma &= \int f \varphi_1 d\sigma + \int f \varphi_2 d\sigma \\ &= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f \circ \varrho_1(s) \varphi_1 R ds + \int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) \varphi_2(t) R dt. \end{aligned}$$

(Hier nutzen wir die uns schon bekannte Tatsache, dass die entsprechende Gramsche Determinante gerade konstant gleich R ist.) Wir untersuchen nun den Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$. Offensichtlich hängt die linke Seite nicht von ε ab.

Für die beiden Terme auf der rechten Seite gilt: Da f beschränkt ist, konvergiert der erste Term gegen 0 für $\varepsilon \rightarrow 0$. Wegen $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$ und $\text{supp}(\varphi_1) \subset \{R(\cos(s), \sin(s)) : -\varepsilon < s < \varepsilon\}$ gilt $\varphi_2 = 1$ auf $(\varepsilon, 2\pi - \varepsilon)$. Damit sieht man leicht, dass der zweite Term gegen

$$\int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) \varphi_2(t) R dt$$

konvergiert. Insgesamt folgt also

$$\int f d\sigma = \int_0^{2\pi} f \circ \varrho_2(t) R dt.$$

Damit kommt man also in diesem Beispiel effektiv mit einer Parametrisierung aus.

Ähnlich kann man sehen, dass auch für die Kugel in drei Dimensionen oder den Torus effektiv eine Parametrisierung ausreicht.

DEFINITION (Normale einer Untermannigfaltigkeit). *Sei M eine Untermannigfaltigkeit. Eine stetige Funktion $\nu : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $\nu(x) \in N_x M \setminus \{0\}$ für alle $x \in M$ heißt Normale.*

Bemerkung. Oft ist man an normierten Normalen interessiert. Ist ν eine Normale so ist $\mu := \frac{\nu}{\|\nu\|}$ eine normierte Normale.

KAPITEL 6

Der Satz von Stokes

In diesem Abschnitt lernen wir einen der grossen Sätze der Analysis kennen: Den Satz von Stokes. Dieser Satz kann als eine Verallgemeinerung des HDI auf höhere Dimensionen verstanden werden. Tatsächlich ist der HDI auch ein wesentliches Hilfsmittel beim Beweis, der unten gegeben wird. Es gibt verschiedene allgemeine Versionen des Satzes von Stokes. Wir präsentieren eine mittelallgemeine Version. Zur Einstimmung formulieren wir den HDI noch einmal um:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

können wir mit $I = (a, b)$, also $\partial I = \{a, b\}$ und $f' = \partial f$ und der 'Normalen' $n : \{a, b\} \rightarrow \{-1, 1\}$, $n(a) = -1$, $n(b) = 1$ auch schreiben als

$$\int_I \partial f dt = \int_{\partial I} f n.$$

Das Integral der Ableitung wird zu einem Integral über den Rand der Funktion.

Wir brauchen also Mengen mit gutem Rand.

Es geht um offene Teilmengen des \mathbb{R}^N deren Rand 'schoen' ist und ein 'klares Auesseres' erlaubt.

DEFINITION (Glatter Rand). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Dann hat U einen glatten Rand, wenn der Rand ∂U von U eine Untermannigfaltigkeit ist, und es ein 'Aussen' gibt, d.h. eine stetige Funktion

$$\mu : \partial U \rightarrow \mathbb{R}^N$$

mit

- $\mu(x) \in N_x U$
- $\|\mu(x)\| \equiv 1$
- $x + s\mu(x) \notin U$ fuer alle kleinen $s > 0$ und $x + s\mu(x) \in U$ fuer alle grossen $s < 0$,

fuer alle $x \in \partial U$. Die Funktion μ ist dann eindeutig bestimmt und heisst die aussere Normale von U .

Bemerkung. Da der Rand eine Untermannigfaltigkeit ist, kann er als Nullstellenmenge einer reellen Funktion dargestellt werden. Daher hat der Normalenraum $N_x M$ die Dimension 1. Die Funktion μ ist also durch die ersten beiden Bedingungen bis auf ein Vorzeichen eindeutig bestimmt. Das Vorzeichen wird durch die letzte Bedingung festgelegt.

Beispiel. (Offene Menge ohne aussere Normale.)

Beispiel. (Offene Menge mit ausserer Normale)

Beispiel. Generisches Beispiel. Zeichnung.

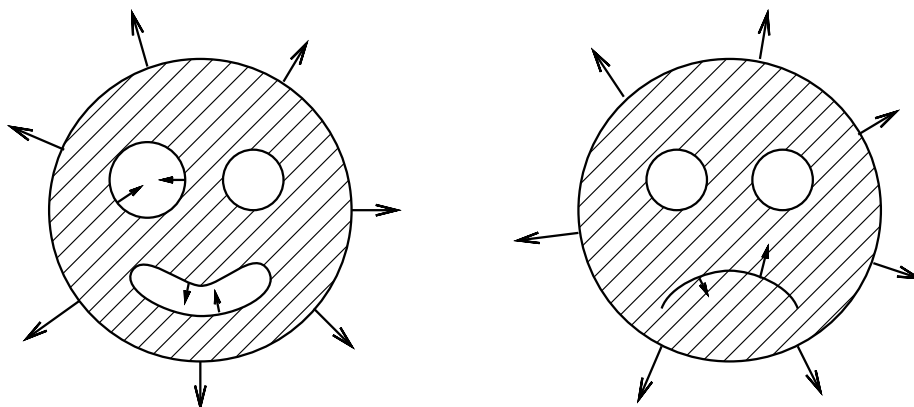


ABBILDUNG 1. Teilmengen mit und ohne „klares“ Äußeres

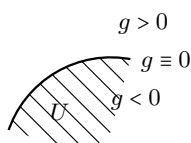
Liegt der Rand als Nullstellenmenge vor, so ist die Berechnung der äusseren Normalen nicht schwer.

PROPOSITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und $p \in \partial U$. Es gelte in einer Umgebung W von p , dass

$$W \cap U = \{x : g(x) < 0\}, \quad W \cap \partial U = \{x : g(x) = 0\}$$

für ein stetig differenzierbares und reguläres $g : W \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist lokal die äußere Normale gegeben durch

$$\mu(x) := \frac{1}{\|\nabla g(x)\|} \nabla g(x).$$



Beweis. Nach Konstruktion ist $\partial U \cap W = N(g)$. Damit gilt also (s.o.) $\nabla g(x) \in N_x \partial U$ für alle $x \in \partial U$. Insbesondere ist also $\mu(x) \in N_x \partial U$. Nach Konstruktion ist μ normiert. Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor

$$g(x + s\mu(x)) = g(x) + s\langle \nabla g(x), \mu(x) \rangle + \text{kleiner Fehler} \sim s\|\nabla g(x)\|.$$

Damit folgt die dritte Eigenschaft der äusseren Normalen. \square

Wir beginnen nun mit einer Vorversion des Satzes von Stokes.

LEMMA (Kleiner Stokes). Sei $Q = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_N, b_N) \subset \mathbb{R}^N$ offen und nichtleer. Sei $Q' := (a_1, b_1) \times \dots \times (a_{n-1}, b_{n-1})$ und $h : Q' \rightarrow (a_N, b_N)$ stetig diffbar und

$$\Omega := \{x', x_N \in Q' \times (a_N, b_N) = Q : x_N > h(x')\},$$

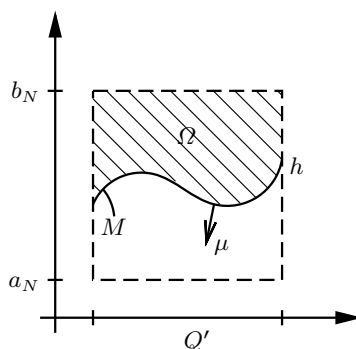
$M :=$ Graph von h und μ die aussere Normale an M d.h.

$$\mu(x) := \frac{1}{\|(\nabla h(x'), -1)\|} (\nabla h(x'), -1).$$

Sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig diffbar mit kompaktem Traeger in Q . Dann gilt fuer jedes $j = 1, \dots, N$

$$\int_{\Omega} \partial_j f(x) d\lambda(x) = \int_M f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).$$

Geometrische Situation:



- $g = h - x_N = 0$ auf M , < 0 auf Ω , > 0 auf Ω^c . Entsprechend der vorigen Proposition ist $\nabla g = (\nabla h, -1)$ die aussere Normale.
- Die Funktion f : f mit Traeger in Q .

Beweis. Wir unterscheiden zwei Faelle fuer den Wert von j . Wir schreiben im Beweis oft dx statt $d\lambda(x)$, wenn nach dem Lebesguemass in \mathbb{R}^N integriert wird.

Es ist $j = N$. Wir rechnen unter Nutzen des Satzes von Fubini im ersten Schritt:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_N f(x) dx &= \int_{Q'} \int_{h(x')}^{b_N} (\partial_N f)(x', x_N) dx_N d\lambda(x') \\ (HDI) &= \int_{Q'} (f(x', b_N) - f(x', h(x')))) dx' \\ (f \text{ kpt Traeger}) &= - \int_{Q'} f(x', h(x')) dx' \\ &= \int_{Q'} f(x', h(x')) \frac{-1}{\sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2}} \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx' \\ (\text{Definition } \mu) &= \int_{Q'} f(x', h(x')) \mu_N(x) \sqrt{1 + |\nabla h(x')|^2} dx' \\ (\text{Definition Oberflaechenintegral}) &= \int_M f(x) \mu_N(x) d\sigma(x). \end{aligned}$$

Das zeigt die Aussage in diesem Fall.

Es ist $j < N$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \partial_j f(x) dx &= \int_{Q'} \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y, t) dt dy \\
 (!) &= \int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt \right) dy + \int_{Q'} (\partial_j h)(y) f(y, h(y)) dy \\
 (\text{Erster Term verschwindet !!}) &= \int_{Q'} (\partial_j h)(y) f(y, h(y)) dy \\
 &= \int_{Q'} f(y, h(y)) \frac{\partial_j h(y)}{\sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2}} \sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2} dy \\
 (\text{Definition } \mu) &= \int_{Q'} f(y, h(y)) \mu_j(y) \sqrt{1 + |\nabla h(y)|^2} dy \\
 (\text{Definition Oberflaechenintegral}) &= \int_M f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).
 \end{aligned}$$

Es bleibt (!) und (!!) zu zeigen.

Zu (!): Fuer Funktionen F auf Teilmengen von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{N-1}$ gilt nach Kettenregel

$$\partial_{y_j}(y \mapsto F(h(y), y)) = (\partial_1 F)(h(y), y) \partial_j h(y) + (\partial_j F)(h(y), y).$$

Betrachtet man nun die Funktion $(s, y) \mapsto F(s, y) := \int_s^{b_N} f(y, t) dt$ also

$$F(h(y), y) = \int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt,$$

so gilt

$$(\partial_1 F)(h(y), y) = -f(y, h(y))$$

und

$$(\partial_j F)(h(y), y) = \int_{h(y)}^{b_N} \partial_j f(y, t) dt.$$

Damit folgt (!). (Hier bezeichnen wir die Ableitung von F nach der j -ten Koordinate mit ∂_j und die 'totale' Ableitung nach y_j mit ∂_{y_j} .)

Zu (!!): Es gilt

$$\begin{aligned}
 \int_{Q'} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y, t) dt \right) dy &= \int_{Q''} \int_{a_j}^{b_j} \partial_j \left(\int_{h(y)}^{b_N} f(y'', y_j, t) dt \right) dy_j dy'' \\
 (HDI) &= \int_{Q''} \left(\int_{h(y'', b_j)}^{b_N} f(y'', b_j, t) dt - \int_{h(y'', a_j)}^{b_N} f(y'', a_j, t) dt \right) dy'' \\
 (f \text{ kpt Traeger}) &= 0.
 \end{aligned}$$

(Der letzte Schritt folgt, da f kompakten Traeger hat, also $f(\cdot, a_j, \cdot) = f(\cdot, b_j, \cdot) = 0$ gilt.) \square

Notation. Eine Funktion $f : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}^k$ heisst *stetig differenzierbar*, wenn es eine offene Umgebung W von $U \cup \partial U$ und eine stetig differenzierbare Fortsetzung von f auf W gibt.

THEOREM (Allgemeiner Satz von Stokes). *Sei U eine beschränkte offene Teilmenge von \mathbb{R}^N mit glattem Rand M und äusserer Normale μ . Sei $f : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt fuer $j = 1, \dots, N$*

$$\int_U \partial_j f(x) d\lambda(x) = \int_{\partial U} f(x) \mu_j(x) d\sigma(x).$$

Bemerkung. Der Sonderfall $N = 1$ liefert gerade den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (siehe Diskussion am Anfang des Kapitels).

Beweis. Es ist \bar{U} abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Fuer jedes $x \in \bar{U}$ wahlen wir nun einen offenen achsenparallelen Quader Q_x mit (Zeichnung)

- $Q_x \cap M$ ist als Graph darstellbar, falls $x \in M$.
- $Q_x \cap M = \emptyset$, falls $x \notin M$.

Dann ist $Q_x, x \in \bar{U}$, eine offene Ueberdeckung des kompakten \bar{U} . Daher gibt es $x_1, \dots, x_n \in \bar{U}$ mit

$$\bar{U} \subset \bigcup_{k=1}^n Q_{x_k}.$$

Setze $Q_k := Q_{x_k}$ und waele eine dazu untergeordnete Partition der Eins $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ (also insbesondere $\text{supp } \varphi_k \subset Q_k$).

Dann gilt, wobei wir im folgenden wieder dx statt $d\lambda(x)$ schreiben, wenn nach dem Lebesguemass in \mathbb{R}^N integriert wird:

$$\begin{aligned} \int_U \partial_j f dx &= \int_U \partial_j \left(\sum_{k=1}^n \varphi_k f \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_U \partial_j (\varphi_k f) dx \\ (\text{supp } \varphi_k \subset Q_k) &= \sum_{k=1}^n \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx. \end{aligned}$$

Wir untersuchen nun die einzelnen Summanden und zeigen

$$(*) \quad \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx = \int_M \mu_j(x) (\varphi_k f) d\sigma(x)$$

fuer alle k . Dazu unterscheiden wir zwei Faelle.

Fall 1: $Q_k \cap M = \emptyset$, d.h. $Q_k \subset U$. Da $Q_k \subset U$, also $Q_k \cap U = Q_k$ und da der Traeger von $\varphi_k f$ eine kompakte Teilmenge von Q_k ist, gilt:

$$\begin{aligned} \int_{U \cap Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx &= \int_{Q_k} \partial_j (\varphi_k f) dx \\ (HDI) &= 0. \end{aligned}$$

Da φ_k in Q_k getragen ist und Q_k leeren Schnitt mit M hat, folgt weiterhin $\varphi_k = 0$ auf M . Das liefert

$$\int_M (\varphi_k f) d\sigma(x) = 0.$$

Das zeigt (*) in diesem Fall.

(Bemerkung: Den ersten Fall kann man so zusammenfassen, dass alle 'inneren Integrale' verschwinden).

Fall 2: $Q_k \cap M \neq \emptyset$ d.h. $Q_k \cap M$ als Graph darstellbar. Dann folgt aus dem 'kleinen Stokes' und $\text{supp } \varphi_k \subset Q_k$ also

$$\int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx = \int_{M \cap Q_k} \mu_j(x)(\varphi_k f) d\sigma(x) = \int_M \mu_j(x)(f \varphi_k)(x) d\sigma(x).$$

Das zeigt (*) auch in diesem Fall.

Aus (*) und der obigen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_U \partial_j f dx &= \sum_{k=1}^n \int_{U \cap Q_k} \partial_j(\varphi_k f) dx \\ (*) &= \sum_{k=1}^n \int_M \mu_j(x)(\varphi_k f) d\sigma(x) \\ (\text{Partition der Eins}) &= \int_M \mu_j(x) f d\sigma(x). \end{aligned}$$

Das beweist den Satz. □

Bemerkung. Auch wenn die Menge U keinen glatten Rand hat, kann man unter Umständen den Satz von Stokes noch anwenden unter Zuhilfenahme von geeigneten Approximationen. *Zeichnung.* Glätten eines Quadrates durch Abrunden der Ecken. Die Eckpunkte sind eine 'Nullmenge'.

Die klassischen Integralsaetze

Hier lernen wir eine Reihe von Folgerungen aus dem allgemeinen Satz von Stokes des letzten Abschnittes kennen.

1. Grundlegende Groessen der Vektoranalysis

Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen. Wir kennen schon den Gradienten $\text{grad}f : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ einer (stetig) differenzierbaren Funktion $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $F : U \rightarrow \mathbb{R}^N$ ein (stetig) differenzierbares Vektorfeld, so wird die Funktion

$$U \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{j=1}^N \partial_j F_j(x)$$

die *Divergenz des Vektorfeldes* F genannt und mit $\text{div}F$ bezeichnet. Fuer ein zweimal stetig diffbares reelles $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir den Laplace von f als die Funktion $\Delta f : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\Delta f(x) := \sum_{j=1}^N \partial_j^2 f(x).$$

Es gilt (wie man leicht nachrechnet)

$$\Delta f = \text{div}(\text{grad}f).$$

Fuer $N = 2$ oder $N = 3$ so fuehren wir noch die *Rotation des Vektorfeldes* F ein durch

$$\text{rot}F : U \rightarrow \mathbb{R}, \text{rot}F(x) = \partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)$$

falls ($N = 2$) und

$$\text{rot}F : U \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{rot}F(x) = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)$$

(falls $N = 3$). (Es handelt sich um zyklische Vertauschungen von 1, 2, 3 beginnend mit der 'Koordinate'.)

Notation. Man schreibt auch ∇f statt $\text{grad}f$, $\nabla \cdot F$ statt $\text{div}F$ und $\nabla \times F$ statt $\text{rot}F$.

Ist $N = 3$, so gilt fuer alle zweimal stetig diffbaren Funktionen $f : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{rot grad } f \equiv 0$$

sowie fuer alle zweimal stetig diffbaren Vektorfelder $F : U \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\text{div rot } F \equiv 0.$$

(Uebung)

Schliesslich erweist sich noch der Begriff des Flusses als nuetzlich.

DEFINITION (Fluss). Sei M eine Hyperflaeche und $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ eine normierte stetige Normale. Ist F eine Vektorfeld auf einer offenen Umgebung von M , so nennt man

$$\int_M \langle F, \mu \rangle d\sigma(x)$$

den Fluss von F durch M (in Richtung von μ).

2. Die Saetze von Gauss und Green

In diesem Abschnitt lernen wir zwei wichtige Saetze der Analysis kennen, die einfache Folgerungen aus dem Satz von Stokes sind.

THEOREM (Satz von Gauss). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschaenkt mit glattem Rand. Sei μ die aeussere Normale. Sei $F : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_U \operatorname{div} F dx = \int_{\partial U} \langle F(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x).$$

Beweis. Das folgt sofort aus dem Satz von Stokes durch Summieren:

$$\int_U \operatorname{div} F dx = \int_U \sum_{j=1}^N \partial_j F_j dx = \int_{\partial U} \sum_{j=1}^N F_j \mu_j d\sigma.$$

Das beendet den Beweis. □

Bemerkung. Der Satz von Gauss erscheint hier als direkte Folge des allgemeinen Satzes von Stokes. Man kann auch die umgekehrte Implikation einfach zeigen, indem man fuer ein festes $j \in \{1, \dots, N\}$ das Vektorfeld $F = (0, \dots, 0, f, 0 \dots)$ mit f an der j -ten Komponenten betrachtet. Die entsprechende einfache Rechnung bleibt zur Uebung ueberlassen.

Bemerkung - Rechenhilfe.

Ist ∂U durch die Funktion $\psi : V \rightarrow \partial U$ parametrisiert, so gilt nach einer oben diskutierten Folgerung zur Normalen einer Flaeche mit $\nu := \partial_1 \psi \wedge \dots \wedge \partial_{N-1} \psi$ also $\mu = \frac{1}{|\nu|} \nu$ und $|\nu| = G_\psi$. Damit folgt

$$\int_{\partial U} \langle F(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x) = \int_{\partial U} \langle F(x), \frac{1}{|\nu|} \nu \rangle d\sigma(x) = \int_V \langle F(x), \nu(x) \rangle dv$$

(bis auf evtl. ein Vorzeichen). Fuer das Ausrechnen derart gegebener Oberflaechenintegrale muss also nicht die Gramsche Determinanten berechnet werden, sondern es reicht ν zu berechnen.

Wir geben nun zwei Deutungen des Satzes von Gauss bzw. der Divergenz.

Deutung - statische inkompressible Situation. (Quellen, aber keine Verdichtung moeglich)

Betrachte einen zeitunabhaengigen Fluss $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit einer Quelldichte $q : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt im inkompressiblen Fall

$$\text{Nettofluss aus } U = \text{Nettoerzeugnis in } U.$$

Wir rechnen beide Seiten aus

$$\text{Nettofluss} = \int_{\partial U} \langle F, \mu \rangle d\sigma \stackrel{\text{(Gauss)}}{=} \int_U \nabla \cdot F dx$$

und

$$\text{Nettorerzeugnis} = \int_U q(x) dx.$$

Gleichsetzen ergibt (da U beliebig, Uebung) also

$$q = \text{div} F.$$

Die Divergenz ist also eine Quellendichte.

Besonders relevant ist der Fall, dass F selber ein Gradientenfeld ist $F = \nabla \varphi$. Dann ist also die Quellendichte gegeben durch $q = \text{div} F = \text{div grad} \varphi = \Delta \varphi$.

Deutung - dynamische Situation mit Substanzerhaltung (Keine Quellen, aber Verdichtung moeglich)

Es flieÙe eine Substanz im \mathbb{R}^N beschrieben durch den Strom $j = j(x, t)$ und die Dichte $\varrho(x, t)$. Dann ist die Masse m in einer Menge $U \subset \mathbb{R}^N$ also

$$m = m_U = \int_U \varrho dx.$$

Fuer die zeitliche Aenderung der Masse gilt bei Substanzerhaltung also

$$\text{Fluss aus } U = \text{Zeitliche Aenderung der Masse in } U.$$

Es gilt

$$\text{Aenderung der Masse} = \partial_t m = \int_U \partial_t \varrho dx$$

sowie nach Gausschem Satz

$$\text{Fluss aus } U = \int_{\partial U} \langle j, \mu \rangle d\sigma(x) = \int_U \text{div} j dx.$$

Gleichsetzen ergibt (da U beliebig) also

$$\partial_t \varrho = \text{div} j.$$

Das ist als *Kontinuitaetsgleichung* bekannt.

THEOREM (Greensche Formel). Sei $U \subset \mathbb{R}^N$ offen mit glattem Rand. Sei μ die aussere Normale. Seien $f, g : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_U (f(x) \Delta g(x) - g(x) \Delta f(x)) dx = \int_{\partial U} f(x) \langle \nabla g(x), \mu(x) \rangle - g(x) \langle \nabla f(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x).$$

Bemerkung. Es ist $\langle \nabla f(x), \mu(x) \rangle$ gerade die Richtungsableitung von f in Richtung der ausseren Normale. Diese wird oft auch als Normalenableitung von f bezeichnet und als $\partial_\mu f$ geschrieben. Damit lautet dann der Satz

$$\int_U (f \Delta g - \Delta f g) dx = \int_{\partial U} f \partial_\mu g - g \partial_\mu f dS(x).$$

Beweis. Direkte Rechnung (Produktregel) zeigt

$$\nabla \cdot (f(x) \nabla g(x)) = \langle \nabla f(x), \nabla g(x) \rangle + f(x) \Delta g(x)$$

und entsprechend

$$\nabla \cdot (g(x) \nabla f(x)) = \langle \nabla g(x), \nabla f(x) \rangle + g(x) \Delta f(x).$$

Bilden der Differenz und Anwenden des Gausschen Satzes liefert die Behauptung. \square

FOLGERUNG. Situation wie im vorigen Satz. $\varphi : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig diffbar. Dann gilt

$$\int_U \Delta \varphi(x) dx = \int_{\partial U} \langle \nabla \varphi(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x).$$

Beweis. Setze $f \equiv 1$ und $g = \varphi$ im vorigen Satz. □

Bemerkung - Interpretation. Sei φ Potential des Kraftfeldes $\nabla \varphi$. Dann ist

$$\int_{\partial U} \langle \nabla \varphi(x), \mu(x) \rangle d\sigma(x)$$

der Fluss des Feldes durch den Rand (nach Aussen). Mit dem Satz von Gauss erhaelt man dann die Gleichheit dieses Flusses mit $\int_U \Delta \varphi dx$. Damit kann man dann Δu als Quellendichte interpretieren.

3. Der Satz von Stokes in der Ebene

Wir betrachten eine Menge, die durch eine Kurve berandet ist. Zeichnung.

THEOREM. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhaengend mit glattem Rand M , der eine regulaere injektive Parametrisierung durch eine geschlossene (d.h. $\gamma(a) = \gamma(b)$) stetig diffbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt (so dass U 'links' von γ liegt). Ist $F : U \cup M \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig diffbares Vektorfeld, so gilt

$$\int_U \text{rot} F dx = \int_{\gamma} F d\gamma.$$

Beweis. Wir beginnen mit einer kleinen Vorueberlegung: Ist (μ_1, μ_2) die aeuessere Normale an M , so ist $(-\mu_2, \mu_1)$ also ein normierter Tangentialvektor, der durch Drehung um 90° entgegen dem Uhrzeigersinn entsteht. Da das Gebiet U links von γ liegt, ist dann $(-\mu_2, \mu_1)$ der normalisierte Tangentialvektor in Richtung der Kurve γ . (Zeichnung) Es gilt also

$$\frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) = (-\mu_2, \mu_1).$$

Nun zum eigentlichen Schluss: Mit dem Satz von Stokes (oder dem Satz von Gauss) und der Parametrisierung γ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_U \text{rot} F dx &= \int_U (\partial_1 F_2(x) - \partial_2 F_1(x)) dx \\ (\text{Gauss}) &= \int_M (F_2(x) \mu_1(x) - F_1(x) \mu_2(x)) d\sigma(x) \\ &= \int_M \langle (F_1, F_2), (-\mu_2, \mu_1) \rangle d\sigma(x) \\ (\text{Parametrierung}) &= \int_a^b \langle (F_1, F_2), (-\mu_2, \mu_1) \rangle (\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt \\ (\text{Vorueberlegung}) &= \int_a^b \langle (F_1, F_2)(\gamma(t)), \frac{1}{|\gamma'(t)|} (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t)) \rangle |\gamma'(t)| dt \\ &= \int_a^b \langle f \circ \gamma, \gamma' \rangle dt. \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

FOLGERUNG. Seien U und γ wie im Satz. Dann ist die Flaeche $F(U)$ von U gleich der Haelfte des Kurvenintegrals ueber das Vektorfeld $k(x, y) = (-y, x)$ ueber γ d.h. es gilt

$$F(U) = \frac{1}{2} \int_{\gamma} k(x, y) d\gamma = \frac{1}{2} \int_a^b \langle (-\gamma_2, \gamma_1), \gamma'(t) \rangle dt.$$

Beweis. Uebung. □

Bemerkung. Die Formel kann man (zeichnerisch) interpretieren. Dabei nutzt man, dass $\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos(\alpha)$ gilt: Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle (-\gamma_2, \gamma_1), \gamma'(t) \rangle dt &= \frac{1}{2} |(-\gamma_2, \gamma_1)(t)| |\gamma'(t)| dt \cos(\text{eingeschlossener Winkel } ((-\gamma_2, \gamma_1), \gamma')) \\ &= |\gamma(t)| |\gamma'(t)| \sin(\text{eingeschlossener Winkel } (\gamma(t), \gamma'(t))) \\ &= \frac{1}{2} |a| |b| \sin(\text{Winkel}(a, b)) \\ &= \text{Flaeche des infinitesimalen Dreiecks mit Seiten } a = \gamma \text{ und } b = \gamma' dt \end{aligned}$$

4. Der Satz von Stokes im \mathbb{R}^3 .

Wir betrachten folgende Situation: Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhaengend mit glattem Rand M , der eine regulaere injektive Parametrisierung durch eine stetig diffbare Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt (so dass U 'links' von γ liegt). Sei $\varphi : U \cup M \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine stetig diffbare regulaere Parametrisierung. Das Bild von φ (die 'Haube') werde mit H bezeichnet. Dann gilt mit $\varrho := \varphi \circ \gamma$ und $\mu := \frac{1}{|\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi|} (\partial_1 \varphi \wedge \partial_2 \varphi)$

$$\int_H \langle \text{rot} F, \mu \rangle d\sigma(x) = \int_{\varrho} F d\varrho$$

fuer jedes stetig diffbare Vektorfeld $F : H \rightarrow \mathbb{R}^3$.

Diese Aussage kann man mittels einer etwas laenglichen Rechnung auf die zweidimensionale Version des Satz von Stokes zurueckfuehren. Wir verzichten an dieser Stelle auf die Details.

Etwas Fourieranalysis

In diesem Abschnitt lernen wir ein wichtiges Hilfsmittel fuer viele Bereiche der Mathematik und Physik kennen: Die Fouriertransformation.

1. Die Fouriertransformation auf \mathbb{R}^N

Wir geben kurz einen Ueberblick der kommenden Attraktionen: Fuer geeignete Funktionen f auf \mathbb{R}^N ist die Fouriertransformation Ff definiert durch

$$Ff : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, Ff(x) = (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy.$$

Das kann man als eine (verallgemeinerte) Linearkombination von Wellen $x \mapsto e^{-ixy}$ gemäß einer Dichte f ansehen. Entsprechend spielt Fouriertransformation bei allen Arten von Untersuchungen von Wellen eine Rolle. Die Fouriertransformation ist dann invertierbar mit Inverser gegeben durch

$$F^{-1}g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} g(y) dy.$$

Man kann also aus der Ueberlagerung von Wellen wieder die Dichte zurueckgewinnen und umgekehrt.

Hier steht natuerlich xy fuer

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^N x_j y_j,$$

d.h. es ist

$$e^{ixy} = e^{i \sum_{j=1}^N x_j y_j}, e^{-ixy} = e^{-i \sum_{j=1}^N x_j y_j}.$$

Die Fouriertransformation vertauscht Differentiation mit Multiplikation mit den Koordinatenfunktionen und daher ruehrt ihre Bedeutung in der Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen.

Wir werden die eben skizzierten Ideen nun praezise fassen.

Dazu *erinnern* wir zunaechst an die Multiindexnotation. Ein Multiindex der Dimension N ist ein $(\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{N}_0^N$. Fuer einen solchen Multiindex definiert man

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^N \alpha_j \text{ Betrag oder Laenge des Multiindex}$$

und die Funktion

$$\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto x^\alpha := \prod_{j=1}^N x_j^{\alpha_j} \text{ fuer } x \in \mathbb{R}^N.$$

Diese Funktionen bilden eine Basis des Vektorraumes der Polynome. Weiterhin assoziiert man zu einem Multiindex α den Operator M_α der Multiplikation mit x^α , d.h.

$$M_\alpha f = x^\alpha f$$

für $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ und den Operator D^α der α -Ableitung

$$D^\alpha := \prod_{j=1}^N \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j} \right)^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^N D_j^{\alpha_j} = (-i)^{|\alpha|} \prod_{j=1}^N \frac{\partial^{\alpha_j}}{\partial x_j^{\alpha_j}}$$

mit $D_j := \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial_j}$. Dieser Operator wirkt auf ein beliebig oft differenzierbares $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ in der schon aus dem zweiten Semester bekannten (induktiv definierten) Weise durch

$$D^0 f = f \quad D^{\alpha+e_j} := D_j(D^\alpha f)$$

(für die standard Orthonormalbasis e_j , $j = 1, \dots, N$, in \mathbb{R}^N). (Hier heisst eine Funktion $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ beliebig oft differenzierbar, wenn sowohl Realteil als auch Imaginärteil von f beliebig oft differenzierbar sind.)

Der *Schwartzsche Raum* (nach Laurent Schwartz) $\mathcal{S} := \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ der schnell fallenden Funktionen auf \mathbb{R}^N ist der Vektorraum aller beliebig oft differenzierbaren $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass zu jedem $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein $C = C_{\alpha,\beta}(f)$ existiert mit

$$|x^\beta| |D^\alpha f(x)| \leq C$$

für alle $x \in \mathbb{R}^N$. Eine äquivalente Charakterisierung definiert den Schwartzraum als diejenigen beliebig oft differenzierbaren Funktionen auf \mathbb{R}^N , für die gilt

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} (1 + |x|)^p |D^\alpha f(x)| < \infty$$

für alle $p \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Es ist nicht schwer zu sehen (Übung), dass der Raum \mathcal{S} invariant ist unter Anwendung von D^α und M_α (d.h. für jedes $f \in \mathcal{S}$ gehören auch $D^\alpha f$ und $M_\alpha f$ zu \mathcal{S} für jeden Multiindex α).

Für Funktionen aus \mathcal{S} können wir die Fouriertransformation definieren.

PROPOSITION. *Für $f \in \mathcal{S}$ existiert*

$$g(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^N$ und die Funktion $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto g(x)$, ist stetig und beschränkt.

Beweis. Sei (für festes $x \in \mathbb{R}^N$) die Funktion h definiert durch $h(y) := e^{-ixy} f(y)$. Dann ist h stetig und es gilt

$$|h(y)| = |f(y)| (1 + |y|)^{N+1} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} \leq \frac{C}{(1 + |y|)^{N+1}}$$

(da $f \in \mathcal{S}$). Daher existiert g als Lebesgueintegral, und es gilt

$$|g(x)| \leq C \int \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy < \infty$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$. Es ist also g beschraenkt. Weiterhin gilt mit einer aehnlichen Argumentation

$$\begin{aligned} |g(x) - g(x')| &\leq (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| |f(y)| dy \\ &\leq (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| |f(y)| (1 + |y|)^{N+1} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy \\ &\rightarrow 0, \quad x \rightarrow x'. \end{aligned}$$

(Zum letzten Schritt: Zerlege \mathbb{R}^N in B_R und $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ mit R so gross, dass

$$C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \frac{1}{(1 + |y|)^{N+1}} dy < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nutze nun die gleichmaessige Konvergenz von $|e^{-ixy} - e^{-ix'y}| \rightarrow 0$ auf B_R , um (auf B_R den Grenzwert mit der Integration zu vertauschen.) \square

DEFINITION. Fuer $f \in \mathcal{S}$ definieren wir die Fouriertransformation Ff von f durch $Ff(x) := (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) dy$.

Notation. Man schreibt auch \widehat{f} statt Ff .

LEMMA (Grundlegende Eigenschaften von F). Es gilt $F\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ und

$$D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} F M_\alpha f \quad \text{und} \quad M_\alpha Ff = F D^\alpha f$$

fuer alle $f \in \mathcal{S}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

Beweis. Sei M_j die Multiplikation mit x_j und e_j der j -te Einheitsvektor in \mathbb{R}^N . Mit f gehoert auch $M_j f$ zu \mathcal{S} (klar!). Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} Ff(x + he_j) - Ff(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} (e^{-ihy_j} - 1) f(y) dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} f(y) \left(\int_0^h (-iy_j) e^{-ity_j} dt \right) dy \\ \text{(Fubini)} &= -i(2\pi)^{-N/2} \int_0^h \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x+te_j)y} y_j f(y) dy \right) dt \\ &= -i \int_0^h (FM_j f)(x + te_j) dt. \end{aligned}$$

Damit folgt nach dem HDI (da die Fouriertransformation nach der schon bewiesenen Proposition stetig ist)

$$\partial_j Ff(x) = -i(FM_j f)(x)$$

also

$$D_j Ff = -FM_j f.$$

Es ist also $D_j Ff$ wieder das Fourierbild einer Funktion aus \mathcal{S} naemlich $M_j f$ und wir koennen das Verfahren iterieren. Induktiv erhaelt man dann

$$D^\alpha Ff = (-1)^{|\alpha|} (FM_\alpha f).$$

Damit ergibt eine kleine Rechnung

$$\begin{aligned}
 (M_\beta D^\alpha Ff)(x) &= x^\beta (2\pi)^{-N/2} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} y^\alpha f(y) dy \\
 (D_y^\beta e^{-ixy} = (-1)^{|\beta|} x^\beta e^{-ixy}) &= (2\pi)^{-N/2} (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \int (D_y^\beta e^{-ixy}) (y^\alpha f(y)) dy \\
 (\text{part.Int}) &= (2\pi)^{-N/2} (-1)^{|\alpha|} \int e^{-ixy} D^\beta (y^\alpha f(y)) dy \\
 (D^\beta (y^\alpha f(y)) \in \mathcal{S}) &= (-1)^{|\alpha|} (FD^\beta M_\alpha f)(x).
 \end{aligned}$$

Damit folgen sofort die beiden im Lemma genannten Gleichungen (indem man die Faelle $\alpha = 0$ bzw. $\beta = 0$ betrachtet).

Es bleibt $F\mathcal{S} \subset \mathcal{S}$ zu zeigen: Sei $f \in \mathcal{S}$ gegeben. Da $D^\beta M_\alpha f$ zu \mathcal{S} gehoert, ist die Fouriertransformation $F(D^\beta M_\alpha f)$ beschaenkt nach der vorigen Proposition fuer alle Multiindices α und β . Damit ist dann also nach der kleinen Rechnung $(M_\beta D^\alpha Ff)$ beschaenkt fuer alle Multiindices α und β . Damit gehoert Ff zu \mathcal{S} . \square

Wir berechnen nun eine spezielle Fouriertransformation. Damit koenen wir dann die Bijektivitaet der Fouriertransformation auf \mathcal{S} anschliessend leicht beweisen.

PROPOSITION. Sei $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$. Dann gehoert φ zu \mathcal{S} , und es gilt $F\varphi = \varphi$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst $\varphi \in \mathcal{S}$: Offenbar (vgl. Analysis I) ist φ beliebig oft differenzierbar, und es ist $\partial^\alpha \varphi = P_\alpha(x)\varphi(x)$ mit einem Polynom P_α . Da die Exponentialfunktion schneller waechst als jedes Polynom, folgt die gewuenschte Beschaenkttheit.

Wir kommen nun zu der Aussage ueber die Fouriertransformation von φ .

Die Aussage gilt fuer $N = 1$. Die Funktion $\varphi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi_1(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$ loest offenbar das Anfangswertproblem

$$\varphi_1'(x) + x\varphi_1(x) = 0, \varphi_1(0) = 1.$$

Fuer $\psi := F\varphi_1$ gilt nach dem vorigen Satz aber ebenfalls:

$$\begin{aligned}
 \psi' + M_x \psi &= iDF\varphi_1 + MF\varphi \\
 (\text{voriger Satz}) &= -iFM\varphi_1 + FD\varphi_1 \\
 &= -iF(M\varphi + iD\varphi) \\
 (\varphi \text{ loest DGL}) &= -iF(\text{Nullfunktion}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und (wegen $1 = e^{-i0y}$)

$$\psi(0) = F\varphi_1(0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

(Die letzte Gleichheit wurde im letzten Semester gezeigt: Quadrieren, Fubini, Polarkoordinaten...) Damit loesen φ_1 und ψ das gleiche Anfangswertproblem. Nach dem Eindeutigkeitssatz (Details muendlich...) gilt also

$$F\varphi_1 = \psi = \varphi_1.$$

Die Aussage gilt fuer beliebiges N . Offenbar gilt

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^N \varphi_1(x_j).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} F\varphi(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} \prod_{j=1}^N \varphi_1(y_j) dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} \prod_{j=1}^N e^{-ix_j y_j} \varphi_1(y_j) dy \\ (\text{Produkt}) &= \prod_{j=1}^N (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix_j y_j} \varphi_1(y_j) dy_j \\ &= \prod_{j=1}^N F\varphi_1(x_j) \\ (N=1) &= \prod_{j=1}^N \varphi_1(x_j) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

THEOREM. Die Fouriertransformation $F: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ ist bijektiv. Es gilt

$$F^{-1}f(x) = Ff(-x) = \int e^{ixy} f(y) dy.$$

Inbesondere folgt also $F^2 f(x) = f(-x)$ und $F^4 f = f$.

Beweis. Wir zeigen zunaechst einige Hilfsformeln:

Formel (A) ('Umschaeffeln' der Fouriertransformation und Nutzen, dass die Fouriertransformation Multiplikation mit $e^{i\cdot}$ in Translation ueberfuehrt):

$$\begin{aligned} \int e^{ixy} g(y) (Ff)(y) dy &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} g(y) \left(\int e^{-iyz} f(z) dz \right) dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int f(z) \left(\int e^{-i(z-x)y} g(y) dy \right) dz \\ &= \int f(z) (Fg)(z-x) dx \\ &= \int (Fg)(z) f(z+x) dz. \end{aligned}$$

Formel (B) (Verhalten der Fouriertransformation unter Skalierung): Mit $g_\varepsilon(x) := g(\varepsilon x)$ fuer $\varepsilon > 0$ gilt

$$\begin{aligned} (Fg_\varepsilon)(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixy} g(\varepsilon y) dy \\ (\text{Trafo } z = \varepsilon y, y = \frac{1}{\varepsilon} z) &= (2\pi)^{-N/2} \varepsilon^{-N} \int e^{-ixy/\varepsilon} g(y) dy \\ &= \varepsilon^{-N} (Fg)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

Formel (C) (Kombination von (A) und (B)):

$$\begin{aligned} \int e^{ixy} g(\varepsilon y) (Ff)(y) dy &= \int e^{ixy} g_\varepsilon(y) (Ff)(y) dy \\ (A) &= \int (Fg_\varepsilon)(z) f(z+x) dz \\ (B) &= \varepsilon^{-N} \int (Fg)\left(\frac{z}{\varepsilon}\right) f(z+x) dz \\ (\text{Traf}o y = \frac{1}{\varepsilon} z, z = \varepsilon y) &= \int (Fg)(y) f(\varepsilon y + x) dy \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\int e^{ixy} g(\varepsilon y) (Ff)(y) dy = \int (Fg)(y) f(\varepsilon y + x) dy.$$

Wir setzen nun in (C) die Funktion $g = \varphi$ aus der vorangehenden Proposition und nutzen $F\varphi = \varphi$ und $\varphi(0) = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} (Ff)(y) dy &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} \varphi(0) (Ff)(y) dy \\ (!) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-N/2} \int e^{ixy} \varphi(\varepsilon y) (Ff)(y) dy \\ (C) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-N/2} \int (F\varphi)(z) f(\varepsilon z + x) dz \\ (F\varphi = \varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2\pi)^{-N/2} \int \varphi(z) f(\varepsilon z + x) dz \\ (!!) &= (2\pi)^{-N/2} f(x) \int \varphi(z) dz \\ &= f(x). \end{aligned}$$

(Zu (!) und (!!): Die Integrale auf $\mathbb{R}^N \setminus B_R$ sind klein fuer grosse R . Auf B_R liegt gleichmaessige Konvergenz vor (s.o. fuer einen aehnlichen Schluss).)

Die vorangehende Rechnung zeigt

$$f(x) = F(Ff)(-x)$$

also

$$(*) \quad f(-x) = (F^2 f)(x).$$

Damit folgt sofort $F^4 = I$. Damit ist F bijektiv mit Inverser F^3 . Weiterhin folgt aus der Formel (*) (mit $g = F^{-1}f$ statt f und $-x$ statt x) noch

$$(F^{-1}f)(x) = (Ff)(-x) = \int e^{ixy} f(y) dy$$

fuer alle $f \in \mathcal{S}$. Damit sind alle Behauptungen bewiesen. \square

Die bisher bewiesenen Saetze lassen sich zur Untersuchung des Laplaceoperator verwenden:

Beispiel/Anwendung. Es gilt

$$-\Delta = F^{-1} M_{|x|^2} F \text{ auf } \mathcal{S}$$

(d.h. $-\Delta f = F^{-1}(|x|^2 Ff)$ fuer alle $f \in \mathcal{S}$.)

Bew. Bijektivitaet von F und vorige Formeln.

Fuer die Berechnung von $-\Delta$ ist das nicht unbedingt nuetzlich, aber zur Berechnung von Inversen kann man es gut verwenden:

Beh. Fuer gegebenes $g \in \mathcal{S}$ hat die Gleichung $(-\Delta + 1)f = g$ in \mathcal{S} genau eine Loesung. Diese ist gegeben durch $F^{-1} \frac{1}{1+|\cdot|^2} Fg$.

Bew. Da F den Raum \mathcal{S} in sich selber abbildet ist $(-\Delta + 1)f = g$ nach Anwenden von F und der obigen Aussage also aequivalent zu

$$(M_{|\cdot|^2} + 1)Ff = Fg$$

und damit

$$Ff = \frac{1}{1+|\cdot|^2} Fg.$$

Mit g gehoert auch Fg und (!) $\frac{1}{1+|\cdot|^2} Fg$ zu \mathcal{S} . Damit ist letztere Gleichung aequivalent zu

$$f = F^{-1} \left(\frac{1}{1+|\cdot|^2} \right) Fg.$$

Das zeigt die gewuenschte Behauptung.

Bemerkung. Entsprechendes gilt wenn man die 1 durch ein $\alpha > 0$ ersetzt.

Zur Berechnung des Inversen von $-\Delta$ reicht das nocht nicht. Das liegt tatsaechlich daran, dass $-\Delta$ in einem spaeter noch zu praezisierenden Sinne nicht invertierbar ist. Immerhin erhalten wir aus unseren Betrachtungen eine notwendige Bedingung.

Beispiel/Anwendung. Hat die Gleichung $-\Delta f = g$ fuer ein $g \in \mathcal{S}$ eine Loesung $f \in \mathcal{S}$, so ist diese gegeben durch $F^{-1} \frac{1}{|\cdot|^2} Fg$. (Dabei bezeichnet $\frac{1}{|\cdot|^2} Fg$ die dann existierende eindeutige Funktion in \mathcal{S} , die fuer $x \neq 0$ mit $\frac{1}{|x|^2} Fg(x)$ uebereinstimmt.)

Bew. Wie eben. (Wichtig: Es gehoert zu den Voraussetzungen der Aussage, dass f also auch $Ff = \frac{1}{|\cdot|^2} Fg$ zu \mathcal{S} gehoert.)

Bemerkung. Es kann mehrere Loesungen geben, die aber nicht alle in \mathcal{S} liegen. Etwa

$$\Delta 1 \equiv 0 = \Delta 0.$$

Fuer weitergehende Betrachtungen erweist sich noch das Konzept der Faltung als nuetzlich. Wir fuehren es als naechstes ein.

PROPOSITION. *Fuer $f \in \mathcal{S}$ und $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ beschraenkt und meßbar existiert fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$ das Integral*

$$g * f(x) := \int f(y)g(x-y)dy = \int g(y)f(x-y)dy (= g * f(x)).$$

Bemerkung. Der Beweis zeigt, dass es reicht g als (hoechstens) polynomiell wachsend vorauszusetzen.

Beweis. Gleichheit der beiden Integrale folgt aus der Substitutionsregel ($S : y \mapsto x-y$, $|\det DS| = |(-1)^N| = 1$). Existenz des Integrals folgt, da f schnell faellt. \square

Notation. Man nennt $g * f$ die Faltung von g und f .

Die Faltung zweier Funktionen vereinigt 'das Beste' der beiden Funktionen auf sich.

PROPOSITION (Glaetten durch Falten). Sei $f \in \mathcal{S}$ und $g : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt und meßbar. Dann gilt:

- (a) Es ist $f * g$ beliebig oft diffbar und es gilt $D^\alpha(f * g) = (D^\alpha f * g)$.
 (b) Fallt g schneller als jedes Polynom, so faellt auch $f * g$ schneller als jedes Polynom.
 (c) Haben f und g kompakten Traeger, so hat auch $f * g$ kompakten Traeger.

Beweis. (a) Es reicht die Formel fuer die Ableitung zu zeigen. Wir zeigen das induktiv, nach $|\alpha|$. Hier diskutieren wir nur den Fall $|\alpha| = 1$. Zu zeigen ist also :

$$\frac{1}{h}(f * g(x + he_j) - f * g(x)) \rightarrow (\partial_j f) * g(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(x + he_j) - (f * g)(x) &= \int (f(x + he_j - y) - f(x - y))g(y)dy \\ &= \int g(y) \left(\int_0^h \partial_j f(x + se_j - y) ds \right) dy \\ &= \int_0^h \left(\int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy \right) ds. \end{aligned}$$

Es ist nun die Funktion $s \mapsto \int \partial_j f(x + se_j - y)g(y)dy$ stetig in s (!). Daher folgt aus dem HDI die Behauptung (a).

Noch zu zeigen (!): Ueblicher Schluss: Ausserhalb einer (grossen) Kugel ist das Integral sowieso klein. Auf dieser Kugel hat man gleichmaessige Konvergenz.

(b) Offenbar gilt

$$(1 + |x + y|^2) \leq 2(1 + |x|^2)(1 + |y|^2).$$

Damit kann man abschuetzen

$$\begin{aligned} |(1 + |x|^2)^m f * g(x)| &= \left| \int (1 + |x|^2)^m f(x - y)g(y)dy \right| \\ &\leq \int (1 + |x - y + y|^2)^m |f(x - y)||g(y)|dy \\ &\leq 2^m \int (1 + |x - y|^2)^m |f(x - y)|(1 + |y|^2)^N |g(y)|dy. \end{aligned}$$

Der Faktor $(1 + |x - y|^2)^m |f(x - y)|$ ist beschränkt, da $f \in \mathcal{S}$. Da g schneller faellt als jedes Polynom ist

$$(1 + |y|^2)^m |g(y)| \leq (1 + |y|)^{-N-1}$$

integrierbar. Das liefert die Behauptung.

(c) Ist f in K getragen und g in L so ist $f * g$ im kompakten $K + L$ getragen: Damit

$$f * g(x) = \dots \int f(y)g(x - y)dy$$

nicht verschwindet muss auf jeden Fall ein $y \in K$ mit $x - y \in L$ existieren und damit

$$x \in y + L \in K + L$$

gelten.

□

FOLGERUNG. Sind $f, g \in \mathcal{S}$, so gehoert auch $f * g$ zu \mathcal{S} .

Beweis. Das folgt sofort aus (a) und (b) der vorangehenden Proposition. \square

Bemerkung. Gehoeren f und g zu $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, so folgt aus der Proposition auch $f * g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Beispiel/Anwendung. Ist $f \in \mathcal{S}$ gegeben und $u \in \mathcal{S}$ eine Loesung von $(-\Delta + \alpha)u = f$, so erfuehlt $w = u * \varrho$ fuer jedes beschraenkte meßbare ϱ die Gleichung

$$(-\Delta + \alpha)w = f * \varrho.$$

Bew. Nach dem schon Bewiesenen gilt

$$(-\Delta + \alpha)w = (-\Delta + \alpha)(u * \varrho) = (-\Delta + \alpha)u * \varrho = f * \varrho.$$

Damit kommen wir nun zu Faltungen und Fouriertransformation.

LEMMA. Seien $f, g \in \mathcal{S}$ gegeben. Dann gilt:

(a) Es gehoert $g * f$ zu \mathcal{S} und es gilt $F(g * f) = (2\pi)^{N/2} FgFf$ sowie $F^{-1}(g * f) = (2\pi)^{N/2} F^{-1}fF^{-1}g$.

(b) Es gehoert fg zu \mathcal{S} und es gilt $(2\pi)^{N/2} F(gf) = Fg * Ff$ sowie $(2\pi)^{N/2} F^{-1}fg = F^{-1}g * F^{-1}f$.

Beweis. Es reicht (a) zu zeigen. (Dann folgt (b), da F bijektiv ist). Wir haben in der vorigen Proposition schon gezeigt, dass $f * g$ zu \mathcal{S} gehoert. Es bleibt die Aussage ueber die (inverse) Fouriertransformation zu beweisen. Das folgt durch eine direkte Rechnung. Wir behandeln nur die Aussage ueber die Fouriertransformation:

$$\begin{aligned} F(g * f)(x) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixy} (g * f)(y) dy \\ (Def) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixy} \int g(y-z) f(z) dz dy \\ &= (2\pi)^{-N/2} \int \int e^{-ix(y-z)} g(y-z) e^{-ixz} f(z) dz dy \\ (Sortieren) &= (2\pi)^{-N/2} \int e^{-ixz} f(z) \left(\int e^{-ix(y-z)} g(y-z) dy \right) dz \\ (Substitution y - z \rightarrow y) &= \int e^{-ixz} f(z) Fg(x) dz \\ &= (2\pi)^{N/2} Ff(x) Fg(x). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung. Die Fouriertransformation 'vertauscht' Translationen mit Multiplikationen mit $e^{i\cdot}$ (vgl. Uebung). Das ist eine fundamentale Eigenschaft der Fouriertransformation. Eine differentielle Form dieser Eigenschaft liefert, dass die Fouriertransformation Ableitungen mit Multiplikation mit Polynomen 'vertauscht'. Eine integrale Form dieser Eigenschaft liefert, dass die Fouriertransformation Faltungen mit Multiplikationen 'vertauscht'.

Fuer f auf \mathbb{R}^N wird \tilde{f} definiert durch $\tilde{f}(x) = \overline{f(-x)}$.

LEMMA. Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt $F(\tilde{f}) = \overline{Ff}$.

Beweis. Das folgt durch direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} F\tilde{f}(x) &= \dots \int e^{-ixy} \tilde{f}(y) dy \\ &= \dots \int e^{-ixy} \bar{f}(-y) dy \\ (y < \dots > -y) &= \dots \int e^{ixy} \bar{f}(y) dy \\ &= \overline{\dots \int e^{-ixy} f(y) dy}. \end{aligned}$$

□

FOLGERUNG. (*Parsevalsche Gleichung fuer \mathcal{S}*) Fuer $f \in \mathcal{S}$ gilt die Gleichung

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |Ff(x)|^2 dx.$$

Bemerkung. Die Folgerung liefert die Isometrie der Fouriertransformation auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ (Details muendlich...).

Beweis. Sei $g = f * \tilde{f}$. Wir berechnen nun $g(0)$ auf zwei Arten.

Zunaechst gilt nach direkter Rechnung

$$g(0) = \int_{\mathbb{R}^N} |f(x)|^2 dx.$$

Andererseits gilt aber unter Nutzen von $Fg = (2\pi)^{N/2} |F(f)|^2$ aufgrund der vorangehenden Proposition auch

$$g(0) = F^{-1}(Fg)(0) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int 1 Fg(x) dx = \int |Ff|^2 dx.$$

Gleichsetzen der beiden Ausdruecke fuer $g(0)$ beendet den Beweis. □

2. Etwas Distributionentheorie

Die bisherigen Betrachtungen koennen sehr stark verallgemeinert werden. Das deuten wir in diesem Abschnitt an. Eine detailliertere Diskussion wird in Vorlesungen zu Distributionentheorie gegeben.

Sei \mathcal{S}^* der algebraische Dualraum von \mathcal{S} , d.h. der Vektorraum der linearen Abbildungen von \mathcal{S} nach \mathbb{C} . (Algebraischer Dualraum von \mathbb{R}^N ist \mathbb{R}^N , evtl. Details...).

Wir geben zunaechst einige Beispiele von Elementen von \mathcal{S}^* :

Die Auswertung in einem festen Punkt gehoert zu \mathcal{S}^* . Genauer ist fuer $x \in \mathbb{R}^N$

$$\delta_x : \mathcal{S}^* \longrightarrow \mathbb{C}, f \mapsto f(x),$$

ein Element von \mathcal{S}^* .

Jede stetige polynomiell beschaenkte Funktion kann als Element von \mathcal{S}^* aufgefasst werden mittels der kannonischen Abbildung

$$j : \{\text{Beschaenkte stetige Funktionen}\} \longrightarrow \mathcal{S}^*, h \mapsto j_h$$

mit

$$j_h(f) := \int h(x) f(x) dx.$$

Diese Abbildung ist injektiv (Uebung). Insbesondere kann man alle Elemente aus \mathcal{S} auffassen als Element von \mathcal{S}^* .

!Auf der konzeptuellen Ebene ist es ein wesentlicher Schritt eine Funktion nicht mehr als Abbildung auf \mathbb{R}^N sondern als Abbildung auf \mathcal{S} aufzufassen!

Notation: Fuer $u \in \mathcal{S}^*$ und $f \in \mathcal{S}$ setzen wir

$$(u|f) := u(f).$$

(Diese Notation gibt wieder, dass u und f recht 'gleichberechtigt' sind.)

Wir werden nun auf \mathcal{S}^* Ableitungen, Multiplikation mit Polynomen und Fouriertransformation einfuehren. Sei dazu $u \in \mathcal{S}^*$ gegeben.

(∂^α) Fuer $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ definiert man $\partial^\alpha u \in \mathcal{S}^*$ via

$$(\partial^\alpha u|f) := (-1)^{|\alpha|} (u|\partial^\alpha f).$$

(M_α) Fuer $\alpha \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$ definiert man $M_\alpha u \in \mathcal{S}^*$ via

$$(M_\alpha u|f) := (u|M_\alpha f).$$

Entsprechend definiert man fuer ein strikt positives Polynom P noch $\frac{1}{P}u \in \mathcal{S}^*$ via $(\frac{1}{P}u|f) := (u|\frac{1}{P}f)$.

(F) Man definiert $Fu \in \mathcal{S}^*$ via

$$(Fu|f) := (u|Ff)$$

und $F^{-1}u$ via

$$(F^{-1}u|f) := (u|F^{-1}f).$$

Damit haben wir fuer \mathcal{S} die entsprechenden Operationen doppelt definiert. Die jeweiligen Definitionen sind miteinander vertraeglich. Genauer gilt fuer $h \in \mathcal{S}$:

- $\partial^\alpha j_h = j_{\partial^\alpha h}$.
- $M_\alpha j_h = j_{M_\alpha h}$.
- $F j_h = j_{Fh}$.

Es vertausche also die Operationen ∂^α , M_α und F mit j , wie man sich auch schoen an einem entsprechenden kommutativen Diagramm klarmachen kann.

Diese Formeln lassen sich einfach durch eine direkte Rechnung zeigen. Wir machen das am Beispiel der ersten Formel deutlich und ueberlassen das Nachrechnen der andern Formeln dem Leser. Es gilt fuer alle $f \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} (\partial^\alpha j_h|f) &= (-1)^{|\alpha|} (j_h|\partial^\alpha f) \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int h \partial^\alpha f dx \\ \text{partielle Integration} &= \int \partial^\alpha h f dx \\ &= (j_{\partial^\alpha h}|f). \end{aligned}$$

Da $f \in \mathcal{S}$ beliebig war, folgt die gewuenschte erste Formel.

Notation. Mit diesen Formeln zur Hand und da j auf den stetigen beschaenkten Funktionen injektiv ist, werden wir im folgenden (meist) j weglassen und eine stetige beschaenkte Funktion g mit j_g identifizieren.

Wir berechnen nun einige Fouriertransformationen: Es gilt

$$F(\delta_x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-ix}.$$

$$F(e^{-ix\cdot}) = (2\pi)^{N/2} \delta_{-x}.$$

Bew: Das folgt durch direkte Rechnung. Erste Formel:

$$(F(\delta_x)|f) = (\delta_x|F(f)) = F(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{-ixy} f(y) dy = (j_h, f)$$

mit

$$h = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} e^{-ix\cdot}.$$

Zweite Formel:

$$(F(e^{-ix\cdot})|f) = (e^{-ix\cdot}|Ff) = (2\pi)^{N/2} F^{-1}Ff(x) = (2\pi)^{N/2} f(x).$$

Das beendet den Beweis.

Die Betrachtungen zur Fouriertransformation auf \mathcal{S} liefern nun durch direkte Rechnung folgendes:

$$D^\alpha F u = (-1)^{|\alpha|} F M_\alpha u \text{ und } M_\alpha F u = F D^\alpha u$$

fuer alle $u \in \mathcal{S}^*$.

Damit folgt (wie oben): Ist $w \in \mathcal{S}^*$ (z.B. $w = \delta_0$), so hat die Gleichung

$$(-\Delta + \alpha)u = w$$

genau eine Loesung $u \in \mathcal{S}^*$ und diese ist gegeben durch

$$u = F^{-1} \left(\frac{1}{1 + |\cdot|^2} F w \right).$$

Weiterhin definiert man Translationen und Reflexion auf \mathcal{S}^* wie folgt: Zu $u \in \mathcal{S}^*$ und $x \in \mathbb{R}^N$ ist das Element $T_x u \in \mathcal{S}^*$ via

$$(T_x u|f) := (u|f(\cdot + x))$$

definiert. Fuer $u \in \mathcal{S}^*$ wird $\tilde{u} \in \mathcal{S}^*$ durch

$$(\tilde{u}|f) := \overline{(u|\tilde{f})}$$

definiert. (Es ist dann \tilde{u} in der Tat ein lineares Funktional auf \mathcal{S} .) Diese Definition ist mit der entsprechenden Definition auf \mathcal{S} vertraeglich. Genauer gilt

$$j_{\tilde{f}} = \tilde{j}_f.$$

(Bew. Direkte Rechnung.)

Wir werden nun die Faltung auf den Raum \mathcal{S}^* uebertragen. Dazu definiert man zu $u \in \mathcal{S}$ und $f \in \mathcal{S}$ die Funktion $u * f$ auf \mathbb{R}^N durch

$$(u * f)(x) := (u|f(x - \cdot)).$$

Diese Definition ist wieder mit der entsprechenden Definition auf \mathcal{S} vertaeglich d.h. es gilt

$$(j_f * g)(x) = f * g(x).$$

An dieser Stelle entsteht aber ein *Problem*: Es ist nicht klar, ob

- $u * f$ stetig ist,
- $u * f$ zu \mathcal{S}^* gehoert, also genuegend beschaenkt ist (falls es stetig ist),
- $\partial^\alpha(u * f) = (\partial^\alpha u) * f = u * \partial^\alpha f$ gilt, (falls $u * f$ zu \mathcal{S}^* gehoert).

Es zeigt sich nach harter Arbeit (vgl. Vorlesung Distributionentheorie!), dass es einen Unterraum \mathcal{S}' von \mathcal{S}^* gibt, der \mathcal{S} und alle δ_x , $x \in \mathbb{R}^N$, und viele weitere Elemente enthaelt, invariant unter Bilden von Ableitungen, Multiplikation mit (inversen) Polynomen und (inverser) Fouriertransformation ist und fuer dessen Elemente u die Faltung $u * f$ sogar zu C^∞ gehoert und

$$\partial^\alpha(u * f) = (\partial^\alpha u) * f = u * \partial^\alpha f$$

erfuellt. Die Elemente von \mathcal{S}' heissen *temperierte Distributionen*.

Damit erhaelt man eine sehr wichtigen Methode zum Loesen von partiellen Differentialgleichungen, die wir im Falle von $(-\Delta + \alpha)u = w$ illustrieren. Dazu berechnet man zunaechst $u \in \mathcal{S}^*$ mit

$$(-\Delta + \alpha)u = \delta_0.$$

Es gilt (s.o.)

$$u = F^{-1} \left(\frac{1}{1 + |\cdot|^2} F \delta_0 \right).$$

Dieses u heisst *Fundamentalloesung*. Dieses u gehoert dann zu \mathcal{S}' (da \mathcal{S}' entsprechende Invariantzeigenschaften hat und δ_0 zu \mathcal{S}' gehoert.) Fuer geeignete (!) $\varrho \in \mathcal{S}'$ laesst sich weiterhin zeigen, dass $u * \varrho$ existiert und

$$(-\Delta + \alpha)(u * \varrho) = ((-\Delta + \alpha)u) * \varrho = \delta_0 * \varrho = \varrho$$

gilt. In dieser Weise kann man (wie auf \mathcal{S} s.o.) aus der Fundamentalloesung, die Loesungen zu anderen rechten Seiten gewinnen (und daher stammt auch die Bezeichnung Fundamentalloesung).

Bemerkung. Ist $P(x_1, \dots, x_N) = \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha x^\alpha$ ein beliebiges Polynom vom Grad hoechstens K in N - Variablen, so definiert man den Operator $P(D)$ auf \mathcal{S} durch

$$P(D)f := \sum_{|\alpha| \leq K} c_\alpha D^\alpha f$$

und entsprechend auf \mathcal{S}^* . Dann gilt nach dem bisher gezeigten

$$FP(D)u = PFu$$

fuer alle $u \in \mathcal{S}^*$. Entsprechend laesst sich ein Grossteil der obigen Erwaegungen verallgemeinern. Dabei spielt es dann eine grosse Rolle, ob der Kehrwert des Polynoms gebildet werden kann. Das fuehrt auf die Theorie *elliptischer Operatoren*.

3. Die Fouriertransformation auf \mathbb{T}^N

In diesem Abschnitt studieren wir Entwicklung von periodische Funktionen auf \mathbb{R}^N in der Form

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{ikx}.$$

Eine solche Entwicklung ist formal ganz aehnlich zu der von uns im letzten Abschnitt bewiesenen Entwicklung

$$f(x) = F^{-1}(Ff)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ixy} Ff(y) dy$$

fuer $f \in \mathcal{S}$.

Wir beginnen mit Untersuchung von periodischen Funktionen auf \mathbb{R} . In diesem Fall ist neben der oben angegebenen Darstellung auch eine Darstellung

$$f(x) = \sum_{k \geq 0} a_k \cos(kx) + \sum_{k \geq 1} b_k \sin(kx) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikx}$$

von Interesse.

DEFINITION. Eine Funktion auf f auf \mathbb{R} heisst (2π) -periodisch, wenn gilt

$$f(x + 2\pi) = f(x)$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}$.

Bemerkung.

- Natuerlich sind auch andere Perioden als 2π moeglich. Durch Skalieren laesst sich aber der allgemeine Fall auf diesen Fall zurueckfuehren.
- Offenbar ist eine Funktion genau dann (2π) -periodisch, wenn gilt

$$f(x + 2\pi l) = f(x)$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $l \in \mathbb{Z}$.

- Man definiert

$$\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} := \{x + 2\pi\mathbb{Z} : x \in \mathbb{R}\}$$

mit der kanonischen Projektion

$$p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{T}, x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z} =: [x].$$

Dann ist eine Funktion auf \mathbb{R} also genau dann 2π periodisch, wenn es ein g auf \mathbb{T} gibt mit

$$f = g \circ p.$$

Offenbar ist $[0, 2\pi)$ ein Repraesentantensystem von \mathbb{T} in \mathbb{R} , d.h. jedes $z \in \mathbb{T}$ kann eindeutig als $p(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)$ geschrieben werden. Zeichnung $\mathbb{T} = \text{Kreislinie}$)

(Erinnerung: $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$, $\cos \phi = \frac{1}{2}(e^{i\phi} + e^{-i\phi})$, $\sin \phi = \frac{1}{2i}(e^{i\phi} - e^{-i\phi})$.)

Als naechstes untersuchen wir das (zweit)einfachste Beispiel periodischer Funktionen.

Beispiele. Typische Beispiele sind \sin , \cos , $e^{i\cdot}$, $e^{-i\cdot}$ sowie $\sin(k\cdot)$, $\cos(k\cdot)$, $e^{ik\cdot}$, $e^{-ik\cdot}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel - Trigonometrische Polynome:

$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \frac{1}{2} (e^{ikx} + e^{-ikx}) + b_k \frac{1}{2i} (e^{ikx} - e^{-ikx}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a_0 + \sum_{k=1}^n ((a_k - ib_k) e^{ikx} + (a_k + ib_k) e^{-ikx}) \right) \\ &= \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} \end{aligned}$$

mit

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

sowie

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k), \quad k > 0$$

und

$$a_k = c_k + c_{-k}, \quad b_k = ic_k - ic_{-k}$$

Beh: Die Koeffizienten sind durch das trigonometrische Polynom eindeutig bestimmt, durch

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} p(x) dx,$$

bzw.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, \dots, n.$$

Bew. Erste Darstellung: Es gilt offenbar

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ilx} e^{-ikx} dx = \delta_{k,l}.$$

Damit folgt die zweite Darstellung einfach durch Einsetzen von

$$p(x) = \sum_{l=-n}^n c_l e^{ilx}.$$

Zweite Darstellung: Das kann man durch direkte Rechnung zeigen (Uebung) oder auch direkt aus der ersten Darstellung und den oben hergeleiteten Formeln fuer a_k und b_k (als Funktion der c_l) ablesen.

Bemerkung. Voellig analoge Aussagen gelten fuer

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

falls die Reihen gleichmaessig konvergieren.

Im folgenden geht es nun darum, 'jede' periodische Funktion als 'Grenzwert' von trigonometrischen Funktionen zu schreiben. Dabei beschraenken wir uns

auf Darstellungen mittels der e^{ik} . (Diese koennen dann leicht umgerechnet werden).

Notation. Fuer $k \in \mathbb{Z}$ definiert man die Funktion e_k durch

$$e_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{ikx}.$$

Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^2(\mathbb{T})$ oder $\mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ die Menge der Funktionen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

- f ist 2π periodisch,
- f ist meßbar,
- $\int 1_{[0, 2\pi]}(s)|f(s)|^2 ds < \infty$.

Fuer $f, g \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$ definieren wir

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int 1_{[0, 2\pi]}(x) \overline{f(x)} g(x) dx, \quad \|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}.$$

Dann ist offenbar $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Semiskalarprodukt. Insbesondere gilt die Cauchy-Schwarz Ungleichung. (Evtl. Erinnerung Semiskalarprodukte...) Gilt $\|f_n - f\| \rightarrow 0$, so sagt man, dass die f_n gegen f im *Quadratmittel konvergieren*.

Bemerkung. Offenbar impliziert gleichmaessige Konvergenz die Konvergenz im Quadratmittel. Die Umkehrung gilt nicht, wie einfache Beispiele zeigen. (Zeichnung $f = 0$ auf $[0, 2\pi - 1/n]$ und dann linear bis 1..)

PROPOSITION. Die e_k , $k \in \mathbb{Z}$, bilden eine *Orthonormalsystem* in \mathcal{R} d.h. es gilt

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} e^{ilx} dx = \delta_{k,l}.$$

Beweis. Das ist einfach. □

Fuer $f \in \mathcal{R}$ definiert man die *Fourierkoeffizienten* von f durch

$$c_k := c_k(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \langle e_k, f \rangle$$

fuer $k \in \mathbb{Z}$. Man definiert weiterhin

$$s_n := s_n(f) := \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx} = \sum_{|k| \leq n} c_k e_k.$$

Der Ausdruck

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

heisst dann die *Fourierreihe* von f . Wie bei Potenzreihen hat dieser Ausdruck erst einmal KEINEN Sinn. Insbesondere ist erstmal NICHT klar, in welchem Sinne dieser Ausdruck eine Funktion darstellt. Allerdings haben wir am Anfang des Abschnittes schon gesehen, dass der Ausdruck bei trigonometrischen Polynomen genau das Polynom darstellt.

LEMMA. (*Besselsche Ungleichung*) Sei $f \in \mathcal{R}$ und $c_k = c_k(f)$ und s_n wie eben definiert. Dann gilt

$$\|f - s_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{|k| \leq n} |c_k|^2.$$

Insbesondere gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \|f\|^2 \quad (\text{Besselsche Ungleichung}),$$

also auch $c_k \rightarrow 0$, $|k| \rightarrow \infty$.

Beweis. Die erste Aussage ergibt sich auf folgender Rechnung (s.u. fuer eine allgemeinere Diskussion):

$$\begin{aligned}
 \|f - s_n\|^2 &= \left\| f - \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\|^2 \\
 &= \left\langle f - \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k, f - \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\rangle \\
 &= \|f\|^2 - \left\langle f, \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\rangle - \left\langle \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k, f \right\rangle + \left\langle \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k, \sum_{k=-n}^n \langle e_k, f \rangle e_k \right\rangle \\
 (\text{Orth.}) &= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n c_k \overline{c_k} + \sum_{k=-n}^n \overline{c_k} c_k - |c_k|^2 \\
 &= \|f\|^2 - \sum_{k=-n}^n \|c_k\|^2.
 \end{aligned}$$

Zum Insbesondere: Das folgt sofort aus dem ersten Teil, da $\|\cdot\| \geq 0$ gilt. \square

FOLGERUNG. Sei die Situation wie in der vorangegangenen Behauptung. Dann gilt

$$\|f\|^2 \geq \frac{|a_0|^2}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Beweis. Es gilt $c_0 = a_0/2$ sowie $c_{\pm k} = \frac{1}{2}(a_k \mp ib_k)$ also $|c_k|^2 + |c_{-k}|^2 = \frac{1}{2}(|a_k|^2 + |b_k|^2)$ fuer alle $k \in \mathbb{N}$. \square

Der entscheidende Satz zur Darstellung von Funktionen aus \mathcal{R} mittels Fourierreihe ist nun folgendes Theorem.

THEOREM (Konvergenz im Quadratmittel und Parsevalsche Gleichung). Sei $f \in \mathcal{L}^2([0, 2\pi])$. Dann gelten die folgenden beiden Aussagen:

- $\|f - s_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. ('Konvergenz im Quadratmittel')
- $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{[0, 2\pi]} |f(x)|^2 dx$. ('Parsevalsche Gleichung')

Beweis. Offenbar sind beide Aussagen äquivalent. Eine Skizze zum Beweis der zweiten Aussage kann wie folgt gegeben werden: Fuer Treppenfunktionen kann die Aussage (mit gewisser Muehe) direkt gezeigt werden. Fuer allgemeine Funktionen folgt sie dann durch Approximation. \square

Bemerkung. Es gilt also

$$f = \sum c_k e_k$$

in dem Sinne, dass $\|f - \sum_{k=-n}^n c_k e_k\| \rightarrow 0$ gilt (d.h, dass die s_n im Quadratmittel gegen f konvergieren).

Bemerkung. Definiert man $L^2([0, 2\pi]) := \mathcal{L}^2([0, 2\pi]) / \sim$ mit $f \sim g$ falls $f = g$ fast ueberall, so ist $L^2([0, 2\pi])$ ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle [f], [g] \rangle = \langle f, g \rangle$ (wie man leicht sieht). Nach dem vorangehenden Satz ist die Abbildung

$$L^2([0, 2\pi]) \longrightarrow \ell^2, [f] \mapsto (k \mapsto c_k(f))$$

ist isometrisch. Weiterhin kann man zeigen, dass sie bijektiv ist. Damit erhaelt sie komplett die Struktur.

Glattheit der Funktion verbessert die Summierbarkeitseigenschaften der Fourierkoeffizienten.

LEMMA (Fourierkoeffizienten der Ableitung). Sei $f \in \mathcal{R}$ $(n-1)$ -mal stetig differenzierbar und f^{n-1} sei stetig und stueckweise stetig differenzierbar (d.h. es gibt $0 < t_1 < \dots < t_N = 2\pi$ mit $f^{(n-1)}|_{[t_j, t_{j+1}]}$ stetig diffbar) mit Fourierkoeffizienten c_k , $k \in \mathbb{Z}$. Dann sind fuer $l = 1, \dots, n$ die Fourierkoeffizienten von $f^{(l)}$ gegeben durch $(ik)^l c_k$. Insbesondere gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |k|^{2n} |c_k|^2 < \infty.$$

Beweis. Ohne Einschraenkung sei f n -mal stetig diffbar (sonst auf einzelnen Intervallen argumentieren). Dann ist fuer $l = 1, \dots, n$ also $f^{(l)}$ stetig und gehoert also ebenfalls zu \mathcal{R} . Fuer die Fourierkoeffizienten $c_k^{(l)}$ von $f^{(l)}$ erhaelt man durch partielle Integration (wobei die Randterme aufgrund der Periodizitaet wegfallen):

$$\begin{aligned} c_k^{(l)} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f^{(l)}(x) dx \\ \text{(partielle Integration)} &= (ik)^l \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= (ik)^l c_k. \end{aligned}$$

Aus der Parsevalschen Gleichung folgt dann fuer $l = n$ die zweite Aussage. \square

Bemerkung. (a) Die Fouriertransformation auf \mathcal{S} hat die Eigenschaft $F(D^\alpha f) = M_\alpha Ff$. Das Lemma besagt nun eine ganz analoge Eigenschaft der Fouriertransformation auf \mathcal{L}^2 , naemlich in naehliegender Notation $F(D^k f) = M_k f$. (b) Es ist ein allgemeines Phaenomen, dass die Fouriertransformation 'Glattheit' in 'Fallen' und umgekehrt ueberfuehrt. Das ist auch der Grund, dass \mathcal{S} in \mathcal{S} ueberfuehrt wird (dabei bewirkt, dass Fallen der Funktionen aus \mathcal{S} die Glattheit ihrer Fouriertransformation und die Glattheit der Funktionen, dass Fallen ihrer Fouriertransformation).

Fuer 'glatte' Funktionen koennen wir damit nun gleichmaessige Konvergenz der Fourierreihe erhalten.

THEOREM. Ist $f \in \mathcal{R}$ stetig und stueckweise stetig diffbar, so konvergieren die s_n gleichmaessig (und insbesondere punktweise) gegen f .

Beweis. Aufgrund des vorigen Lemma (mit $n = 1$) gilt fuer die Fourierkoeffizienten c_k von f

$$\sum |k|^2 |c_k|^2 < \infty.$$

Damit folgt wegen

$$|c_k| = |c_k k| \frac{1}{|k|} \leq \frac{1}{2} (|k c_k|^2 + \frac{1}{|k|^2})$$

(fuer $k \neq 0$) also

$$\sum |c_k| = \sum |c_k k| \frac{1}{|k|} \leq \sum |k c_k|^2 + \sum \frac{1}{|k|^2} + |c_0| < \infty.$$

Damit konvergiert also

$$s_n = \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}$$

gleichmaessig gegen eine stetige Funktion g . Damit konvergiert also s_n auch im Quadratmittel gegen g . Damit folgt

$$\|g - f\| \leq \|g - s_n\| + \|s_n - f\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

also

$$0 = \|g - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Da f und g stetig sind, folgt $f = g$. □

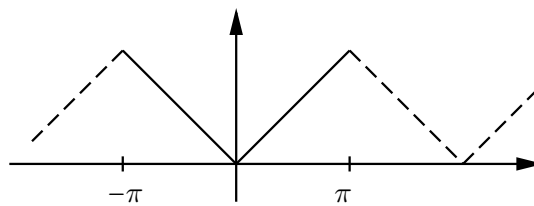
Bemerkung. Ist f 'nur' stetig, so konvergiert die Fourierreihe im allgemeinen nicht fuer alle Punkte, aber in den meisten. Tatsaechlich ist die Frage nach der punktweisen / nicht punktweisen Konvergenz von Fourierreihen eine ausgesprochen prominente Forschungsthema.

Beispiel. Sei f periodisch mit $f(x) = |x|$ fuer $|x| \leq \pi$. (Zeichnung) Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmaessig und ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Insbesondere gilt

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$



Bew. Gleichmaessige Konvergenz folgt aus vorigem Satz.

Da f gerade ist, kann man f durch eine reine Cosinusreihe darstellen. Es gilt also

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

mit

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| dx = \pi$$

und

$$\begin{aligned}
 a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |x| \cos(kx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \\
 &= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \sin(kx) dx \right) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ gerade} \\ -\frac{4}{k^2\pi} & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit folgt die Aussage ueber die Fourierkoeffizienten.

Das 'Inbesondere' folgt durch Einsetzen von $x = 0$, da $f(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

Die obigen Betrachtungen lassen sich direkt auf den hoeherdimensionalen Fall verallgemeinern. Das diskutieren wir nun kurz und lassen die Details als Uebung.

Eine Funktion f auf \mathbb{R}^N heisst periodisch, wenn gilt

$$f(x) = f(x + 2\pi l)$$

fuer alle $x \in \mathbb{R}^N$ und $l \in \mathbb{Z}^N$. Man definiert

$$\mathbb{T}^N := \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N := \{x + 2\pi\mathbb{Z}^N : x \in \mathbb{R}^N\}$$

mit der kanonischen Projektion

$$p: \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{T}^N, x \mapsto x + 2\pi\mathbb{Z}^N =: [x].$$

Dann ist eine Funktion auf \mathbb{R}^n also genau dann periodisch, wenn es ein g auf \mathbb{T}^N gibt mit

$$f = g \circ p.$$

Offenbar ist $I = I_N := [0, 2\pi)^N$ ein Representantensystem von \mathbb{T}^N in \mathbb{R}^N , d.h. jedes $z \in \mathbb{T}^N$ kann eindeutig als $p(x)$ mit $x \in [0, 2\pi)^N$ geschrieben werden.

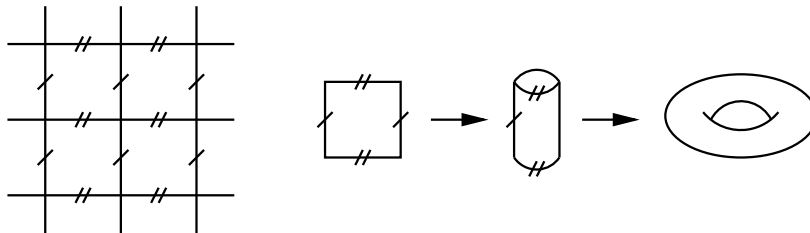


ABBILDUNG 1. \mathbb{T}^2 : durch Verbinden der / und der // erhält man einen Torus

Sei $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^N)$ die Menge der Funktionen f auf \mathbb{R}^N mit folgenden Eigenschaften:

- f ist periodisch.
- f ist meßbar.
- $\int 1_{[0, 2\pi)^N} f(x) dx < \infty$.

Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_I \overline{f(x)} g(x) dx, \quad \|f\| := \langle f, f \rangle^{1/2}$$

ein Semiskalarprodukt mit zugehoeriger Halbnorm auf $\mathcal{L}^2(\mathbb{T}^N)$ definiert. Die $e_k := e^{ik \cdot}$, $k \in \mathbb{Z}^N$, bilden wieder ein Orthonormalsystem und man definiert die *Fourierkoeffizienten* von f durch

$$c_k := c_k(f) := \langle e_k, f \rangle$$

fuer $k \in \mathbb{Z}^N$ und die approximierenden Polynome durch

$$s_n := s_n(f) := \sum_{|k| \leq n} c_k e^{ikx}.$$

Damit koennen dann die analogen Aussagen zu den oben bewiesenen. Insbesondere gilt wieder die Besselsche Ungleichung, die Parsevalsche Gleichung und Konvergenz der Fourierreihe im Quadratmittel.

Lediglich das Konzept der stueckweisen Differenzierbarkeit hat keinen guten Sinn mehr und wird durch Differenzierbarkeit ersetzt.

4. Die allgemeine Fouriertransformation

Wir untersuchen kurz, was die beiden von uns untersuchten Fouriertransformationen gemeinsam haben.

Sei $G = \mathbb{R}^N$ bzw. $G = \mathbb{T}^N$. Dann ist G eine abelsche Gruppe, jeder Punkt aus G hat eine kompakte Umgebung und Multiplikation und Inversenbildung sind stetig (klar, fuer \mathbb{R}^N . Fuer \mathbb{T}^N ...) Die duale Gruppe zu G ist definiert als

$$\widehat{G} := \{\gamma : G \longrightarrow \mathbb{T} \text{ stetig} : \gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s), \gamma(e) = 1\}.$$

Beispiel. $G = \mathbb{R}^N$: Jedes $k \in \mathbb{R}^N$ definiert durch e_k mit $e_k(x) = e^{ikx}$ ein Element aus \widehat{G} . Man kann zeigen, dass dies alle Elemente von \widehat{G} sind. (Uebung) In diesem Sinne gilt $\widehat{G} = \mathbb{R}^N$.

Beispiel. $G = \mathbb{T}^N$: Jedes $k \in (2\pi\mathbb{Z})^N$ definiert durch e_k mit $e_k(x) = e^{ikx}$ ein Element aus \widehat{G} . Man kann zeigen, dass dies alle Elemente von \widehat{G} sind. (Uebung) In diesem Sinne gilt $\widehat{G} = (2\pi\mathbb{Z})^N$.

Die Fouriertransformation fuer (geeignete) Funktionen f auf G ist dann definiert als die Funktion $F(f)$ auf \widehat{G} , die gegeben ist durch

$$F(f)(\gamma) := \int_G \overline{\gamma(t)} f(t) dt.$$

Die Parsevalsche Gleichung lautet dann

$$\int_G |f(t)|^2 dt = \int_{\widehat{G}} |F(f)(\gamma)|^2 d\gamma.$$

(Man mache sich klar, dass dies in der Tat fuer $G = \mathbb{R}^N$ und $G = \mathbb{T}^N$ zutrifft!). Diese Aussage gelten tatsaechlich fuer alle lokalkompakten abelschen Gruppen.

Bemerkung. Die entsprechende Theorie laesst sich noch einmal drastisch erweitern. Das fuehrt auf Gelfand's Theorie der kommutativen Banachalgebren.

Die Waermeleitungsgleichung

Die Waermeleitungsgleichung lautet

$$\partial_t \psi = \Delta \psi \text{ auf } \Omega.$$

Dabei geht es um folgendes Situation:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen.
- $\psi : \Omega \times \mathbb{R}, (x, t) \mapsto \psi(t, x) = \psi_t(x)$.
- $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t, \psi_t(x) \rightarrow \psi_0(x)$ fuer $t \rightarrow 0+$.

Diese Gleichung beschreibt die Ausbreitung / Diffusion eines Stoffes (Tinte, Ozon, Waerme...) in einem homogenen Medium (Wasser, Luft, Welt...).

1. Herleitung der Waermeleitungsgleichung und formale Loesung

In diesem Abschnitt leiten wir die Gleichung her. Wir betrachten dabei $\psi = \psi(x, t)$ als Verteilung eines Stoffes, den wir kurz mit 'Waerme' bezeichnen. Es gilt

$$\text{Waermemenge in Volumen } V \text{ zur Zeit } t = \int_V \psi(x, t) dx.$$

Damit folgt

$$\text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \psi(x, t) dx = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) dx.$$

Diese Aenderung ist negativ, wenn die Stoffmenge in V geringer wird. Andererseits kann man die Aenderung der Waermemenge in V auch ueber den Zufluss nach V ausdruecken:

$$\begin{aligned} \text{Aenderung der Waermemenge in } V \text{ zur Zeit } t &= \text{Zufluss zu } V \\ (\mu \text{ aussere Normale}) &= - \int_{\partial V} \text{Fluss} \cdot \mu \, d\sigma \\ (\text{Fluss linear und entgegen dem Waermegefaelle}) &= \int_{\partial V} (b(x) \nabla \psi(x, t)) \cdot \mu \, d\sigma \\ (\text{Stokes}) &= \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))) dx. \end{aligned}$$

(Zu den Vorzeichen: Da wir die aussere Normale betrachten und es sich aber um den Zufluss handelt, steht in der zweiten Gleichung ein Minus. Der Fluss haengt linear vom Waermegefaelle ab, verlaeuft aber diesem Gefaelle entgegen - 'von warm nach kalt'. Daher tritt in der dritten Gleichung ein weiteres Minus auf.)

Gleichsetzen der beiden Ausdruecke fuer die Aenderung der Waermemenge liefert

$$\int_V \partial_t \psi(x, t) dx = \int_V (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))) dx.$$

Da V beliebig ist, folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = (\nabla \cdot (b(x) \nabla \psi(x, t))).$$

Ist das Medium homogen so haengt b nicht von x ab. Ist es darueber hinaus noch isotrop, so ist b gerade die Identitaet. Damit wird die Gleichung zu

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \psi.$$

Das ist gerade die oben betrachtete Gleichung.

Bemerkung. In 'schwacher' Form wird dies:

$$\int \frac{\partial}{\partial t} \psi \phi dx = - \int (b(x) \nabla \psi, \nabla \phi) dx$$

fuer 'alle' ϕ .

Formale Loesung. Rein formal handelt es sich bei der Waermeleitungsgleichung um eine gewoehnliche Differentialgleichung allerdings in einem unendlichdimensionalen Raum. Entsprechend ist eine formale Loesung gegeben durch

$$\psi_t = e^{t\Delta} \psi_0 = P_t \psi_0$$

mit dem Operator $P_t := e^{t\Delta}$. Dieser erfuehlt die Halbgruppeneigenschaft $P_{t+s} = P_t P_s$.

Diese Betrachtungen werden wir nun exakt machen.

2. Die Waermeleitungsgleichung auf \mathbb{R}^N .

Die Gleichung lautet

$$\partial_t \psi = \Delta \psi \text{ auf } \mathbb{R}^N, \psi_0 = f.$$

Es geht also darum ein ψ zu finden, das folgende Eigenschaften hat:

- Es ist $\psi : (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, stetig diffbar nach t , 2 mal stetig diffbar nach x mit $\partial_t \psi = \Delta \psi$ auf \mathbb{R}^N , $\psi_0(x) := \lim_{t \rightarrow 0} \psi_t(x) = f(x)$.

Jedes solche ψ wird *Loesung des Anfangswertproblem* $\partial_t \psi = \Delta \psi$ auf \mathbb{R}^N , $\psi_0 = f$ genannt.

Sei nun $f \in \mathcal{S}$. Wir suchen zunaechst ψ mit Werten in \mathcal{S} d.h. mit $\psi_t \in \mathcal{S}$ fuer jedes $t \in [0, \infty)$. Fouriertransformieren der Gleichung fuehrt auf

$$\partial_t \widehat{\psi}_t(k) = -|k|^2 \widehat{\psi}_t(k), \quad \widehat{\psi}_0 = \widehat{f}$$

fuer alle $k \in \mathbb{R}^N$. Bei festem k ist das gerade eine gewoehnliche Differentialgleichung (in t) mit Anfangsbedingung. Die Loesung lautet (fuer festes k):

$$\widehat{\psi}_t(k) = e^{-t|k|^2} \widehat{f}(k).$$

Ruecktransformieren liefert dann

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &= F^{-1} \widehat{\psi}_t \\ (t \text{ fest}) &= F^{-1} (e^{-t|\cdot|^2} F f) \\ (\text{Fouriertransform!}) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1} (e^{-t|\cdot|^2}) * F^{-1} F f \\ &= p_t * f \end{aligned}$$

mit

$$p_t := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(e^{-t|k|^2}).$$

Wir werden nun p_t berechnen und anschliessend die obige Rechnung in ein Theorem verwandeln.

PROPOSITION. Sei $\varphi_t(k) := e^{-t|k|^2}$. Dann gilt

$$p_t(x) := \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(\varphi_t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Beweis. Sei $h(x) = e^{-|x|^2/2}$. Wie wir schon aus dem Kapitel zur Fouriertransformation wissen, gilt dann

$$Fh = h = F^{-1}h. \quad (*)$$

Ist h_a definiert durch $h_a(x) := h(ax)$, so gilt weiterhin

$$(F^{-1}h_a)(k) = a^{-N} (Fh) \left(\frac{1}{a}k \right). \quad (**)$$

(Das wurde ebenfalls schon im Kapitel zur Fouriertransformation bewiesen. Hier folgt noch einmal die Begründung:

$$\begin{aligned} F^{-1}h_a(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{ikx} h_a(x) dx \\ &= \dots \int e^{ikx} h(ax) dx \\ (ax = y) &= \dots \int e^{ik \frac{1}{a}x} h(y) \frac{1}{a^N} dy \\ &= a^{-N} Fh \left(\frac{1}{a}k \right). \end{aligned}$$

Das beendet die Begründung.)

Nimmt man das Bisherige zusammen, so erhaelt man fuer

$$\varphi_t(x) = e^{-t|x|^2} = h((2t)^{1/2}x) = h_{\sqrt{2t}}(x)$$

also

$$\begin{aligned} (F^{-1}\varphi_t)(x) &= (F^{-1}h_{\sqrt{2t}})(x) \\ (**) &= \sqrt{2t}^{-N} (F^{-1}h) \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \\ (*) &= \sqrt{2t}^{-N} h \left(\frac{x}{\sqrt{2t}} \right) \\ &= \frac{1}{(2t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Damit folgt dann

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} F^{-1}(\varphi_t) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} \exp^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Das beendet den Beweis. □

Damit koennen wir nun die Waermeleitungsgleichung loesen (indem wir die Rechnung zu Beginn des Abschnittes einfach rueckwaertslesen):

THEOREM. *Sei*

$$p : (0, \infty) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow [0, \infty), p_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{N/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}.$$

Dann loest fuer jedes $f \in \mathcal{S}$ die Funktion

$$\psi_t := p_t * f$$

die Gleichung $\partial_t \psi_t = \Delta \psi_t$ fuer $t > 0$ und es gilt

$$\psi_t(x) \rightarrow f(x), t \rightarrow 0$$

fuer jedes $x \in \mathbb{R}^N$.

Beweis. Die Aussage ueber das Loesen der Gleichung folgt im wesentlichen durch 'Rueckwaertslesen' des obigen Arguments. Wir geben das Argument aus Vollstaendigkeitsgruenden. Nach Definition von p und vorangegangener Proposition gilt, da die Fouriertransformation Produkte in Faltungen ueberfuehrt,

$$\psi_t = F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff). \quad (*)$$

Damit folgt also $\psi_t \in \mathcal{S}$ fuer alle $t > 0$ sowie $\widehat{\psi}_t = e^{-t|k|^2} Ff$. Das liefert (Rueckwaertslesen)

$$\begin{aligned} \Delta \psi_t &= F^{-1}(F \Delta F^{-1}) F \psi_t \\ (*), (FT) &= F^{-1}((- |k|^2) e^{-t|k|^2} Ff) \\ (\text{Direkte Rechnung}) &= F^{-1} \partial_t (e^{-t|k|^2} Ff) \\ &= \partial_t F^{-1}(e^{-t|k|^2} Ff) \\ (*) &= \partial_t \psi_t. \end{aligned}$$

Das beendet diesen Teil des Beweises.

Es bleibt die Aussage bei $t = 0$ zu zeigen: Die Idee ist dabei, dass $p_t \rightarrow \delta_0$ gilt in geeignetem Sinne. Hier sind die Details. Sei $x \in \mathbb{R}^N$ beliebig. Sei $\varepsilon > 0$. Zu zeigen: $|\psi_t(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ fuer $t > 0$ genuegend klein.

Es gilt:

- $\int p_t(x) dx = 1$. (Denn: $\int p_t(x) dx = (2\pi)^{N/2} (Fp_t)(0) = 1$).
- Fuer jedes $\delta > 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(0)} p_t(x) dx = 0.$$

(Denn: Kugelkoordinaten liefern fuer $0 < t \leq 1$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(0)} p_t(x) dx &\stackrel{\text{Kuko}}{=} \text{constante} \cdot \int_\delta^\infty r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{4t}} dr \\ \left(-\frac{r^2}{4t} \leq -\frac{r^2}{8t} - \frac{r^2}{8}\right) &\leq \text{constante} \cdot e^{-\frac{\delta^2}{8t}} \int_\delta^\infty r^{N-1} e^{-\frac{r^2}{8}} dr \\ &= \text{constante}^* e^{-\frac{\delta^2}{8t}} \\ &\rightarrow 0, t \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Damit ist gerade die gewuenschte Aussage.)

Damit koennen wir nun mit einem kleinen Trick wie folgt rechnen

$$\begin{aligned}\psi_t(x) - f(x) &= p_t * f(x) - f(x) \\ (\text{Trick!}) &= \int p_t(x-y)f(y)dy - \int p_t(x-y)f(x)dy \\ &= \int p_t(x-y)(f(y) - f(x))dy.\end{aligned}$$

Damit folgt fuer beliebiges $\delta > 0$

$$\begin{aligned}|\psi_t(x) - f(x)| &\leq \int_{U_\delta(x)} p_t(x-y)|f(y) - f(x)|dy + \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(x)} p_t(x-y)|f(y) - f(x)|dy \\ &\leq 1 \cdot \max\{|f(y) - f(x)| : y \in U_\delta(x)\} + 2 \cdot \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N \setminus U_\delta(x)} p_t(x-y)dy.\end{aligned}$$

Waelht man nun zunaechst $\delta > 0$ so dass der erste Term aufgrund der Stetigkeit von f in x durch $\varepsilon/2$ abgeschaezt werden kann, so folgt fuer genuegend kleine $t > 0$

$$|\psi_t(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung. Das Verfahren kann fuer wesentlich allgemeinere f durchgefuehrt werden. Es reicht zum Beispiel, wenn f zu $C_b(\mathbb{R}^N)$ gehoert. Der Grund ist, dass $p_t(x)$ selber die Gleichung

$$\partial_t p_t = \Delta p_t$$

erfuellt. (Nachrechnen! Uebung.) Tatsaechlich kann man noch allgemeinere f zulassen (die nicht einmal stetig sind) allerdings wird dann unter Umstaenden die Anfangsbedingung nicht mehr punktweise erfuehlt. Jedenfalls ist die Grundidee dabei, dass die Loesung als Ueberlagerung von Loesungen geschrieben wird. Eine solche Ueberlagerung ist moeglich, da die Gleichung linear ist.

FOLGERUNG. Sei fuer $t \in [0, \infty)$ die Abbildung $P_t : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ definiert durch $P_t f = p_t * f = F^{-1} e^{-t|k|^2} F f$ fuer $t > 0$ und $P_0 f = f$. Dann loest $t \mapsto P_t f$ die Waermeleitungsgleichung, und es gilt $P_{t+s} = P_t P_s$. In diesem Sinne gilt $P_t = e^{t\Delta}$.

Beweis. Nach dem vorigen Satz ist $P_t f$ eine Loesung der Waermeleitungsgleichung. Es bleibt die Halbgruppeneigenschaft zu zeigen: Das folgt durch direkte Rechnung. Es gilt nach Definition

$$P_t = F^{-1} e^{-t|k|^2} F.$$

Damit folgt

$$P_{t+s} f = F^{-1} (e^{-(t+s)|k|^2} F f) = (F^{-1} e^{-t|k|^2} F) (F^{-1} e^{-s|k|^2} F) f = P_t P_s f.$$

Das beendet den Beweis. \square

Bemerkung. Es gilt $-\Delta = F^{-1}|k|^2 F$ und $e^{t\Delta} = P_t = F^{-1} e^{-t|k|^2} F$. Analog kann man auf $L^2(\mathbb{R}^N)$ nun beliebige Funktionen $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ des Laplaceoperator Δ definieren durch

$$g(-\Delta) f := F^{-1} g(|k|^2) F f.$$

Das ist ein sehr wirkungsvolles Instrument der Operatortheorie.

Ein etwas alternativer Zugang zur Waermeleitungsgleichung (und ueberhaupt zu partiellen Differentialgleichungen) bilden Separationsansatze. Dabei versucht man die in Frage stehende Gleichung durch den Ansatz

$$\psi(t, x) = f(t)g(x)$$

zu loesen. Im konkreten Fall fuehrt dies auf:

$$f'(t)g(x) = f(t)\Delta g(x).$$

Division liefert (wenn die Terme nicht verschwinden)

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}.$$

Da die linke Seite nur von t abhaengt und die rechte nur von x folgt

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \text{constant} = \frac{\Delta g(x)}{g(x)}.$$

Wir loesen nun die beiden Gleichungen

$$f' = Cf, \quad \Delta g = Cg$$

separat: Gilt $C \leq 0$ so sind offenbar Loesungen gegeben durch

$$f = Ae^{Ct}, \quad g = e^{ikx}$$

mit $-|k|^2 = C$. Insgesamt ergibt sich damit fuer jedes $k \in \mathbb{R}^N$ als eine Loesung der Gleichung die Funktion

$$\psi(t, x) = e^{-t|k|^2} e^{ikx}.$$

Durch Ueberlagerung der Loesungen zu verschiedenen k mit den 'Gewichten' $g(k)$ erhaelt man eine allgemeine Loesung der Form

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{-t|k|^2} e^{ikx} g(k) dk.$$

Das entspricht der obigen Darstellung

$$P_t f(x) = F^{-1}(e^{-t|k|^2} \widehat{f})(x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int e^{ikx} e^{-t|k|^2} \widehat{f}(k) dk.$$

Die Fourierkoeffizienten $\frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \widehat{f}(k)$ von f sind gerade die 'Gewichte' g der Loesungen $e^{ikx} e^{-t|k|^2}$.

3. Waermeleitungsgleichung auf einem Wu'rfel - periodische Randbedingungen

Es geht wieder um die Gleichung

$$\Delta \psi_t = \partial_t \psi_t$$

auf \mathbb{R}^N . Allerdings interessieren wir uns nun fuer Loesungen, die $2\pi\mathbb{Z}^N$ periodisch sind. Das bedeutet, dass ψ eigentlich auf dem Torus $\mathbb{R}^N/(2\pi\mathbb{Z}^N)$ definiert ist. Alternativ kann man sich auch vorstellen, dass ψ auf dem Wu'rfel $[0, 2\pi]^N$ gegeben ist und die periodischen Randbedingungen

$$\partial^\alpha \psi(\dots, 0, \dots) = \partial^\alpha \psi(\dots, 2\pi, \dots)$$

fuer alle Multiindices α und alle Positionen der 0 erfuellt. Daher spricht man in diesem Fall auch von periodischen Randbedingungen.

3. WAERMELEITUNGSGLEICHUNG AUF EINEM WÜRFEL - PERIODISCHE RANDBEDINGUNGEN

Um diesen Fall zu behandeln, koennen wir die Fouriertransformation auf dem Torus einsetzen. Das geschieht strukturell ganz analog zu den Betrachtungen im vorigen Abschnitt. Daher skizzieren wir das Vefahren nur. Wir beginnen wieder mit einer formalen Rechnung:

Seien f und ψ glatt und $2\pi\mathbb{Z}^N$ periodisch mit

$$\Delta\psi_t = \partial_t\psi_t, \quad \psi_0 = f.$$

Anwenden der Fouriertransformation auf dem Torus liefert (bei festem t) Koeffizienten $c_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^N$ mit

$$\psi_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(t) e^{ikx}.$$

Ist ψ genuegend glatt, so fallen die c_k schnell und sind differenzierbar und man erhalt aus der Gleichung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c'_k(t) e^{ikx} = \partial_t\psi_t = \Delta\psi_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(t) (-|k|^2) e^{ikx}$$

und aus der Anfangsbedingung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k(0) e^{ikx} = \psi_0 = f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten kann man aus einem Vergleich dann

$$c'_k(t) = -|k|^2 c_k(t), \quad c_k(0) = \widehat{f}(k)$$

fuer jedes $k \in \mathbb{Z}^N$ schliessen. Bei dieser Gleichung handelt es sich (bei festem k) um eine gewoehnliche Differentialgleichung. Die Loesung ist (fuer jedes k) gegeben durch

$$c_k(t) = e^{-|k|^2 t} \widehat{f}(k).$$

Insgesamt ergibt sich damit also

$$\psi_t(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{-|k|^2 t} e^{ikx}.$$

Ist f genuegend glatt (z.B. f beliebig oft differenzierbar), so gilt

$$\widehat{f}(k) \rightarrow 0, \quad |k| \rightarrow \infty,$$

genuegend schnell (vgl. Abschnitt ueber die Fouriertransformation), um obige Betrachtung rueckwaerts lesen zu koennen und damit eine Loesung zu erhalten.

Bemerkung.

- Auch hier kann man alternativ einen Separationsansatz durchfuehren. Dieser fuehrt auf

$$\psi_k = e^{-|k|^2 t} e^{ikx}.$$

Der obige Ausdruck ist gerade eine Überlagerung dieser ψ_k .

- Durch Skalieren und Verschieben, laesst sich mit dieser Methode auch die Waermeleitungsgleichugn auf beliebigen Rechtecken im \mathbb{R}^N behandeln (wenn man periodische Randbedingungen fordert).

Die Wellengleichung

Es geht um die Gleichung

$$\partial_t^2 U_t = c^2 \Delta U_t$$

mit $c > 0$ und $U : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, (x, t) \mapsto U_t(x)$. Um die Gleichung eindeutig lösen zu können, brauchen wir noch Anfangsbedingungen

$$U_0(\cdot) = f, \quad (\partial_t U)_{t=0} = g.$$

Die Gleichung beschreibt die Ausbreitung von Wellen mit Geschwindigkeit c .

Wieder kann man versuchen, die Gleichung mittels Fouriertransformation auf \mathbb{R}^N lösen. Die Fouriertransformation (in x) führt auf die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\widehat{U}_t''(k) = -c^2 |k|^2 \widehat{U}_t(k),$$

mit \widehat{U}_t = Fouriertransformation in x von U_t . Für festes k hat die allgemeine Lösung dieser Gleichung die Form

$$A_k e^{i\omega t} + B_k e^{-i\omega t},$$

mit $\omega = \omega(k) = c(k) = c|k|$. Durch Rücktransformieren ergibt sich als Lösung

$$U(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} A_k e^{i\omega(k)t} e^{ikx} + B_k e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} dk.$$

Für genügend glatte und schnell fallende A und B ist das tatsächlich eine Lösung (wie 'Rückwärtslesen' der obigen Schritte zeigt). Die A_k, B_k werden aus den Anfangsbedingungen bestimmt.

Wir werden nun diese Lösung etwas analysieren und damit noch ein anderes Verfahren zur Lösung der Wellengleichung kennenlernen. Die oben gegebene Lösung ist also eine Überlagerung von Funktionen

$$e(kx \pm \omega t),$$

mit $e(s) = e^{is}$. Für $N = 1$ gilt

$$kx \pm \omega t = \text{konstant} \Rightarrow x \pm \frac{\omega}{k} t = \pm ct.$$

Damit handelt es sich bei $e(kx \pm \omega t)$ also um die Bewegung des 'Welleberges' e mit Geschwindigkeit $c = \omega/k$.

Diese Betrachtungen legen nahe, dass für 'jede' Funktion F auf \mathbb{R} die Funktion $U(x, t) := F(kx \pm \omega t)$ eine Lösung der Wellengleichung ist (da sie die

Bewegung des Wellenberges F mit Geschwindigkeit c beschreibt). Rein formal ist das natürlich richtig, denn Ableiten ergibt, falls F zweimal stetig differenzierbar ist,

$$\begin{aligned}\partial_t^2 U(x, t) &= \omega^2 F''(kx \pm \omega t) \\ c^2 \Delta U(t, x) &= k^2 c^2 F''(kx \pm \omega t).\end{aligned}$$

Auch fuer allgemeinere F sollte das gelten (da dann immer noch die Gleichheit der Ausdruecke gelten sollte - auch wenn sie keinen Sinn mehr haben ;-). Eine praezise Fassung liefert das Konzept der schwachen Loesung.

PROPOSITION. Ist $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die Funktion $U : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$U(x, t) = F(kx \pm \omega t),$$

mit $\omega = c|k|$ eine schwache Loesung der Wellengleichung, d.h. es gilt

$$\iint U(x, t) \partial_t^2 \varphi(x, t) \, dx \, dt = \iint U(x, t) c^2 \Delta \varphi(x, t) \, dx \, dt$$

fuer alle $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N)$.

Beweis. Sei (F_n) eine Folge beliebig oft differenzierbarer Funktionen, die lokal gleichmaessig gegen F konvergieren, d.h. dass fuer jedes kompakte $K \subset \mathbb{R}$ gilt

$$\sup_{x \in K} |F_n(x) - F(x)| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

(Eine solche Folge kann aus F durch Falten mit glatten δ_n mit $\int \delta_n = 1$ und $\delta_n \equiv 0$ ausserhalb von $(-1/n, 1/n)$ gewonnen werden (vgl. Uebung und vorhergehende Vorlesungen). Sei $U_n(x, t) := F_n(kx \pm \omega t)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\iint U(x, t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt &= \iint F(kx - \omega t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint F_n(kx - \omega t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint U_n(x, t) \partial_t^2 \varphi \, dx \, dt \\ \text{(Partielle Integration)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint \partial_t^2 U_n(x, t) \varphi \, dx \, dt \\ (\partial_t^2 U_n(\dots) = c^2 \Delta U_n(\dots)) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint c^2 \Delta U_n(x, t) \varphi \, dx \, dt \\ \text{(Partielle Integration)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \iint c^2 U_n(x, t) \Delta \varphi \, dx \, dt \\ (U_n \rightarrow U) &= \iint c^2 U(x, t) \Delta \varphi \, dx \, dt.\end{aligned}$$

Das zeigt die Behauptung. □

Bemerkungen.

- Fuer genuegend glatte F ist das zugehoerige U genau dann eine schwache Loesung, wenn es eine Loesung ist (nach dem ueblichen Schluss). In diesem Sinne verallgemeinert das Konzept der schwachen Loesung das Konzept der Loesung.
- Die Betrachtungen zu schwachen Loesungen setzen die entsprechenden Betrachtungen zu \mathcal{S}^* fort. (Distributionentheorie)

- Auch fuer die Waermeleitungsgleichung koennte man das Konzept der schwachen Loesung einfuehren. Die Gleichung ist aber 'glaetend' d.h. die Loesungen auch zur sehr irregulaeren Anfangsbedingungen werden glatt sein und daher sind dann schwache Loesungen (meist) auch Loesungen.

Die Laplacegleichung

Es geht um die Gleichungen

$$\Delta U = 0$$

auf $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Oft wird noch eine Randbedingung der Form

$$U = g \text{ auf } \partial\Omega$$

gefordert (etwa um Eindeutigkeit der Loesung zu erzielen). Gilt $g = 0$ d.h.

$$U \equiv 0 \text{ auf } \partial\Omega,$$

so nennt man die Bedingung ‘‘Dirichlet Randbedingung‘‘.

Diese Gleichung tritt in verschiedenen Zusammenhaengen auf. Unter anderem dient sie der Beschreibung von Gleichgewichtssituationen eines Diffusionsvorganges. Der Vorgang selber wird (wie schon besprochen) durch die Waermeleitungsgleichung $\Delta U_t = \partial_t U_t$ beschrieben und die Gleichgewichtsbedingung bedeutet gerade, dass U nicht von der Zeit abhaengt. Damit ergibt sich dann fuer U insgesamt die Laplacegleichung

$$\Delta U = 0 (= \partial_t U).$$

Das kann man natuerlich auch direkt herleiten analog zur Herleitung der Waermeleitungsgleichung.

DEFINITION (Harmonische Funktion). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen. Eine Funktion U auf Ω heisst harmonisch, wenn sie zweimal stetig differenzierbar ist und*

$$\Delta U = 0$$

auf Ω gilt.

Bemerkungen / Beispiele.

- Auf \mathbb{R} sind die harmonischen Funktionen gerade die linearen Funktionen.
- Auf $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ (bzw. offenen Teilmengen von \mathbb{R}^2) sind Realteil und Imaginärteil von holomorphen Funktionen harmonisch.

Eine wesentliche Charakterisierung von harmonischen Funktionen lernen wir im folgenden Theorem kennen.

THEOREM (Charakterisierung harmonischer Funktionen mittels Mittelwertigenschaften). *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $U \in C(\Omega)$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

- (i) *U ist zweimal stetig differenzierbar und harmonisch.*

(ii) U hat die Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln, d.h. es gilt

$$U(x) = \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} U(y) dy$$

für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

(iii) U hat die Mitteleigenschaft bezüglich Sphären, d.h. es gilt

$$U(x) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} U(\xi) d\sigma(\xi)$$

für alle $x \in \Omega$ und $r > 0$ mit $B_r(x) \subset \Omega$.

In diesem Fall ist U beliebig oft differenzierbar.

Als Vorarbeit zum Beweis des Theorems beweisen wir einige auch in anderen Zusammenhängen nützliche Aussagen.

LEMMA. (Beziehung zwischen Δ und Mittelwerten) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und U eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf Ω . Sei $x \in \Omega$ und $s > 0$ mit $B_s(x) \subset \Omega$. Dann ist die Funktion $\phi : (0, s) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi(r) := \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y)$$

(stetig) differenzierbar mit

$$\phi'(r) = \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \Delta U(y) d\sigma(y).$$

Bemerkung.

- (Übung) Das Lemma liefert, dass das zweimal stetig differenzierbare U genau dann harmonisch ist, wenn (für alle x) die Funktion ϕ konstant ist. Diese Charakterisierung wird (implizit) später verwendet werden.
- Das Lemma liefert eine Verbindung zwischen Mittelwerten von Funktionen und Laplace angewendet auf Funktionen. Das ist fundamental für den angestrebten Beweis des Theorems.
- Es mag erstaunen, dass die *erste* Ableitung von ϕ wird zur *zweiten* Ableitung von U in Beziehung gesetzt wird. Allerdings wird im Integrationsbereich auch vom Rand einer Menge zur Menge selber übergegangen.

Beweis. Wir definieren

$$\int_M f d\sigma := \frac{1}{|M|} \int_M f d\sigma(y).$$

Dann gilt nach Substitutionen der Verschiebung und Skalierung

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_r(0)} U(x+y) d\sigma(y) = \int_{\partial B_1(0)} U(x+r\xi) d\sigma(\xi).$$

Damit folgt (da U zweimal stetig differenzierbar ist)

$$\begin{aligned}
 \phi'(r) &= \int_{\partial B_1(0)} \xi \cdot \nabla U(x + r\xi) \, d\sigma(\xi) \\
 \text{Rücksubstitution } x + r\xi &= y, \quad \xi = \frac{1}{r}(y - x) &= \int_{\partial B_r(x)} \left(\frac{y - x}{r} \right) \cdot (\nabla U)(y) \, d\sigma(y) \\
 (\text{äußere Normale } \nu &= \frac{y - x}{r}) &= \int_{\partial B_r(x)} \nu \cdot (\nabla U)(y) \, d\sigma(y) \\
 &= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} \nu \cdot (\nabla U)(y) \, d\sigma(y) \\
 (\text{Stokes/Gauß}) &= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \nabla \cdot (\nabla U)(y) \, dy \\
 &= \frac{1}{|\partial B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \Delta U(y) \, dy.
 \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. □

PROPOSITION. (*Desintegration*) Für stetige f gilt

$$\int_{B_r(x)} f(y) \, dy = \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} f(\xi) \, d\sigma(\xi) \right) d\varrho.$$

Beweis. Das folgt leicht durch Rechnen in Kugelkoordinaten. □

LEMMA. (*Aequivalenz von MWE bzgl. Kugeln und Sphaeren*) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und U eine stetige Funktion auf Ω . Dann hat U die Mittelwerteigenschaft bzgl. Sphaeren genau dann, wenn es die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln hat.

Beweis. Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln ist eine Integralversion der Mittelwerteigenschaft bezüglich Sphären und Mittelwerteigenschaft bezüglich Sphaeren eine 'Ableitung' der Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln. Damit folgt die behauptete Aequivalenz aus der vorangehenden Desintegrationsproposition:

Es habe U die Mittelwerteigenschaft bzgl. Sphaeren. Dann gilt aufgrund der Desintegration (DI) und der Mittelwerteigenschaft bzgl. Sphaeren (MWE-S)

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x)} U(y) dy &\stackrel{(DI)}{=} \int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(\xi) d\sigma(\xi) \right) d\varrho \\
\text{(MWE-S)} &= \int_0^r U(x) |\partial B_\varrho(x)| d\varrho \\
&= U(x) \int_0^r |\partial B_\varrho(x)| d\varrho \\
&\stackrel{(DI)}{=} U(x) |B_r(x)|
\end{aligned}$$

und es folgt die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln.

Es habe U die Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln. Dann gilt nach Desintegration (DI) und der Mittelwerteigenschaft bzgl. Kugeln (MWE-K) also fuer jedes $r > 0$

$$\int_0^r \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(\xi) d\sigma(\xi) \right) d\varrho \stackrel{(DI)}{=} \int_{B_r(x)} U(y) dy \stackrel{(MWE-K)}{=} |B_r(x)| U(x) \stackrel{(DI)}{=} U(x) \int_0^r |\partial B_\varrho(x)| d\varrho.$$

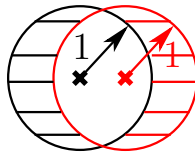
Ableiten nach r und Anwenden des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung liefert dann

$$\int_{\partial B_r(x)} U(\xi) d\sigma(\xi) = U(x) \cdot |\partial B_r(x)|.$$

Das ist der gewuenschte Mittelwertsatz bezueglich Sphaeren. \square

Bemerkung. Ist U lokal Riemannintegrierbar (also Riemannintegral über alle Kugeln), und hat es die Mittelwerteigenschaft bezüglich Kugeln, so ist U stetig.

Beweis.

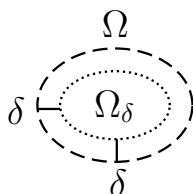


\square

LEMMA. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und U eine stetige Funktion auf Ω . Es habe U die Mittelwerteigenschaft (bzgl. Sphaeren oder Kugeln). Dann ist U beliebig oft differenzierbar.

Bemerkung / Deutung: Mittelwerte ueber Funktionen sind im allgemeinen 'glatter' als die Funktionen selber. Eine Funktion, die ihr eigener Mittelwert ist, wird so beliebig glatt durch 'infiniten Regress'.

Beweis. Zu $\delta > 0$ sei $\Omega_\delta := \{x \in \Omega : d(x, \partial\Omega) > \delta\}$



Es reicht zu zeigen, dass $U|_{\Omega_\delta}$ zu $C^\infty(\Omega_\delta)$ gehört. Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ mit

- $\int \varphi dy = 1$ (φ normiert)
- $\{x \in \mathbb{R}^N : \varphi(x) \neq 0\} \subset B_\delta(0)$ (φ in $B_\delta(0)$ getragen).
- $\varphi(y) = \varphi(\tilde{y})$ falls $\|y\| = \|\tilde{y}\|$ (φ rotationssymmetrisch)

(Zum Beispiel kann φ als

$$\varphi(x) = c_{\text{normierung}} \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\delta^2 - |x|^2}\right) & : |x| < \delta \\ 0 & : |x| \geq \delta \end{cases}$$

gewählt werden.)

Dann folgt $U * \varphi|_{\Omega_\delta} \in C^\infty(\Omega_\delta)$ wegen $\varphi \in C^\infty$. Es reicht also $U * \varphi = U$ (auf Ω_δ) zu zeigen. Das ergibt sich aber wie folgt:

$$\begin{aligned} U * \varphi(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) U(x-y) dy \\ (\varphi \text{ in } B_\delta \text{ getragen}) &= \int_{B_\delta(0)} \varphi(y) U(x-y) dy \\ (\text{Desintegration}) &= \int_0^\delta \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} \varphi(y) U(x-y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\ (\varphi \text{ rotationssymmetrisch}) &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} U(x-y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\ (\text{Verschieben}) &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) \left(\int_{\partial B_\varrho(x)} U(y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\ (\text{Mittelwerteigenschaft}) &= \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) U(x) |\partial B_\varrho(x)| d\varrho \\ &= U(x) \int_0^\delta \varphi(\varrho e_1) |\partial B_\varrho(0)| d\varrho \\ (\varphi \text{ rotationssymmetrisch}) &= U(x) \int_0^\delta \left(\int_{\partial B_\varrho(0)} \varphi(y) d\sigma(y) \right) d\varrho \\ (\text{Desintegration}) &= U(x) \int_{B_\delta(0)} \varphi(y) dy \\ (\varphi \text{ normiert}) &= U(x). \end{aligned}$$

Das beendet den Beweis. \square

Nach diesen Vorbereitungen koennen wir nun das Theorem vom Anfang des Abschnittes leicht beweisen: *Beweis.*

Die Aequivalenz von (ii) und (iii) ist gerade eines der vorangehenden Lemma.

(i) \implies (iii): Sei U harmonisch. Dann gilt also $\Delta U = 0$. Damit folgt fuer die Funktion ϕ mit

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y)$$

also nach dem ersten Lemma des Abschnittes zur Beziehung zwischen Δ und Mittelwerten also $\phi' \equiv 0$ und damit $\phi \equiv C$. Der Wert der Konstanten C laesst sich durch Grenzüebergang berechnen zu

$$C = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \phi(\varrho) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_\varrho(x)|} \int_{\partial B_\varrho(x)} U(y) d\sigma(y) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \frac{1}{|\partial B_\varrho(x)|} U(x) |\partial B_\varrho(x)| = U(x).$$

Hierbei wird die Stetigkeit von U in der vorletzten Gleichheit genutzt.

(iii) \implies (i): Aus (iii) folgt nach einem vorigen Lemma, dass U beliebig oft differenzuierbar ist. Damit existiert also ΔU . Angenommen es gilt $\Delta U(x) \neq 0$ für ein $x \in \Omega$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gilt dann $\Delta U > 0$ auf $B_s(x)$ für ein $s > 0$. Fuer die Funktion

$$\phi(r) = \int_{\partial B_r(x)} U(y) d\sigma(y)$$

folgt also nach dem ersten Lemma des Abschnittes zur Beziehung zwischen Δ und Mittelwerten dann $\phi' > 0$ auf $(0, s)$. Andererseits gilt aber $\phi \equiv \text{constant}$ aufgrund der Mittelwerteigenschaft (iii). Das ist ein Widerspruch. \square