Analysis I

Wintersemester 2010/2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 7 **Abgabe 9.12.2010**

(1) Sei $a > 0$ beliebig. Definiere induktiv die Folge (x_n) durch $x_0 := c > 0$ beliebig und

$$x_{n+1} := \frac{1}{k}\left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}}\right) = x_n + \frac{x_n}{k}\left(\frac{a}{x_n^k} - 1\right).$$

Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) gegen $\sqrt[k]{a}$ konvergiert.
(Hinweise: siehe Vorlesung.)

(2) Zeigen Sie: Für $a > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n = \frac{1}{e(a)},$$

wobei $e(a) = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{a}{n})^n$.
(Idee: $(1 + a/n)^n(1 - a/n)^n$ konvergiert gegen 1.)

(3) Seien $(x_n), (y_n)$ Folgen in $\mathbb{R}$ mit $x_n \to 0$, $y_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Finden Sie Beispiele für

(a) $x_n y_n \to \infty$,
(b) $x_n y_n \to -\infty$,
(c) $(x_n y_n)$ konvergent,
(d) $(x_n y_n)$ beschränkt, aber divergent.

(4) Sei M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß $\sup M = \infty$ genau dann gilt, wenn es eine Folge (x_n) in M gibt mit $x_n \to \infty$.

Zusatzaufgabe: Beweisen Sie den Satz von Bolzano-Weierstrass auf $\mathbb{R}$ mit Hilfe des Intervallschachtelungsprinzips. Das heißt, zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen (mindestens) einen Häufungspunkt hat.