Höhere Analysis

Sommersemester 2010 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 4 **Abgabe Freitag 28.05. 2010**

(1) Sei $\mathcal{A}$ die Menge aller endlichen Linearkombination von Funktionen $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Form

$$f_\lambda(x) := (x - \lambda)^{-1}$$

f?r alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Zeigen Sie,dass $\mathcal{A}$ dicht in $C_0([0, \infty))$ ist.

(2) Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und es gelte

$$\int_0^1 f(x)x^n \, dx = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$.

(3) Es sei $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$ und $\mathcal{A}$ die Algebra der komplexwertigen Funktion auf $\mathbb{T}$, die die Form

$$f(e^{i\theta}) := \sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\theta}$$

haben, wobei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Abschluß von $\mathcal{A}$ bzgl. der Supremumsnorm nicht mit $C(\mathbb{T})$ übereinstimmt.

(4) Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra reellwertiger beschränkter stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$, die die Punkte trennt und bzgl. $\| \cdot \|_\infty$ abgeschlossen ist. Sei

$$\mathcal{X}_\mathcal{A} := \prod_{f \in \mathcal{A}} \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq \|f\|_\infty\}$$

versehen mit der Produkttopologie und sei $\Phi : \mathbb{R} \to \mathcal{X}_\mathcal{A}$ die Koordinatenabbildung $x \mapsto (f(x))_{f \in \mathcal{A}}$. Zeigen Sie, dass das Bild von $\mathbb{R}$ unter Φ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, genau dann wenn $\mathcal{A}$ die Funktionen mit kompakten Träger enthält.