Probeklausur zur Vorlesung “Analysis III”

im Wintersemester 2017/2018, am 04.02.2018 um 6 Uhr

Vorlesender: Dr. Martin Tautenhahn

---

1) Bitte lösen Sie alle **5 Aufgaben** und achten Sie darauf, dass Ihr Lösungsweg nachvollziehbar ist. Die Bearbeitungszeit beträgt **180 min**.
2) Bitte benutzen Sie für **jede Aufgabe** ein **neues Blatt**. Bitte setzen Sie für jede bearbeitete Aufgabe in der Tabelle unten an der entsprechenden Stelle eine **Markierung**.
3) Bitte kennzeichnen Sie alle abgegebenen Zettel mit Ihrer Matrikelnummer sowie Ihrem Vor- und Nachnamen.

Name: . . . . Vorname: . . . .

Matrikel-Nummer: . . . . Studiengang: . . . .

Ich erkläre meine Prüfungsfähigkeit (ja / nein):

Jena, den . . . . Unterschrift: . . . .

Aufgabe	1	2	3	4	5
Aufgabe bearbeitet	☐	☐	☐	☐	☐
Erreichbare Punktzahl	42	42	42	42	42
Erzielte Punktzahl					

Gesamtpunktzahl . . . . / 210 Mindestpunktzahl Bestehen: 105

Prüfer: Dr. Martin Tautenhahn Zweiter Prüfer: . . . .

Jena, den . . . . Jena, den . . . .

Unterschrift: . . . . Unterschrift: . . . .

Aufgabe 1. Sei $N \in \mathbb{N}$ und γ eine Kurve in $\mathbb{R}^N$, das heißt γ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

(a) Wann nennt man die Kurve γ rektifizierbar? Wie ist in diesem Fall die Länge $L(\gamma)$ der Kurve γ definiert?

(b) Sei γ Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante $C \geq 0$. Das heißt $|\gamma(y) - \gamma(x)| \leq C|y - x|$ für alle $x, y \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass γ rektifizierbar ist und $L(\gamma) \leq C(b - a)$ gilt.

Seien nun $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} \exp(xy) + xy \exp(xy) \\ x^2 \exp(xy) - 2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - t^2 \end{pmatrix}.$$

(c) Formulieren Sie das Lemma von Poincaré und zeigen Sie mit Hilfe dessen, dass F ein Potential besitzt.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \mathrm{d}\gamma$. Hinweis: Berechnen Sie zunächst das Potential ϕ.

Aufgabe 2. Es seien P, Q Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Variablen. Weiterhin habe Q keine rellen Nullstellen.

(a) Wann gehört die Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{P(\mathrm{e}^{x^2})}{Q(\mathrm{e}^{x^2})}$$

genau dann zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gehört, wenn $\operatorname{grad} P \leq \operatorname{grad} Q - 1$.

Hinweise:

1. Ist $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ ein Polynom mit reellen Koeffizienten, so ist dessen Grad definiert durch
$$\operatorname{grad} P := \max\{i \mid a_i \neq 0\}.$$

2. Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ gehört.

3. Angenommen $\operatorname{grad} P \leq \operatorname{grad} Q - 1$. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Polynome $P_0, \ldots, P_N$ und ein Polynom ohne relle Nullstellen R existieren, mit $N \leq \operatorname{grad} R - 1$ und
$$f^{(n)}(x) = \frac{\sum_{k=0}^N P_k(x) e^{kx^2}}{R(e^{x^2})}.$$

Aufgabe 3.

(a) Definieren Sie die Begriffe σ-Algebra und Maß.

(b) Es sei $X \neq \emptyset$ eine überabzählbare Menge. Ist die Menge

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ oder } X \setminus A \text{ ist abzählbar}\}$$

eine σ-Algebra über X?

(c) Formulieren Sie den Satz von Fubini.

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ stetig mit $f(x) = 0$, falls $|x| \geq 1$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ definiert durch $f_n(x) = n^{-1}f(x/n)$. Beweisen Sie, dass die Folge (f_n) gleichmäßig gegen 0 konvergiert. Ist der Satz von Lebesgue auf die Folge anwendbar und gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 0?$$

Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 4. Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und zusammenhängend mit glattem Rand M, der eine reguläre injektive Parametrisierung durch eine geschlossene stetig diffenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ besitzt, so dass U "links" von γ liegt.

Sei weiterhin $F : U \cup M \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vekrtorfeld.

(a) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes in der Ebene.

Sei nun $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ der offene Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$ und $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ sein Rand. Wir betrachten das Vektorfeld $F : U \cup M \to \mathbb{R}^2$,

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(b) Geben Sie eine reguläre injektive Parametrisierung von M durch eine geschlossene stetig diffenzierbare Kurve $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ an.

(c) Zeigen Sie, dass $\operatorname{rot} F = 2$.

(d) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\gamma F \mathrm{d}\gamma$ einmal über die Definition des Kurvenintegrals und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes in der Ebene.

Aufgabe 5.

(a) Wie sind die Fourierkoeffizienten und die Fourierreihe einer 2π-periodischen, quadratintegrierbaren Funktion definiert?

(b) Formulieren und beweisen Sie die Besselsche Ungleichung.

(c) Berechnen Sie die Koeffizienten der (2π-periodisch fortgesetzten) Funktion

$$f : [-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Was können Sie über die Konvergenz der zugehörigen Fourierreihe sagen?