# Hausaufgabenblatt 12

Abgabe am 23.01.2018

---

**Aufgabe 1.**

(a) Sei $p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ ein Polynom. Zeigen Sie, dass $pf \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$.

(b) Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ ein Multiindex. Zeigen Sie, dass $D^\alpha f \in \mathcal{S}$ für $f \in \mathcal{S}$.

**Aufgabe 2.** Sei $\mathcal{S}$ der Schwartzraum des $\mathbb{R}^N$ und $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ die Fouriertransformation. Für $a \in \mathbb{R}^N$ definiere $(T_a f)(x) := f(a + x)$ und $(M_a f)(x) := \mathrm{e}^{\mathrm{i}xa} f(x)$ für $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ und $x \in \mathbb{R}^N$. Zeigen Sie für $f \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} FT_a f &= M_a F f, \\ FM_{-a} f &= T_a F f. \end{aligned}$$

**Aufgabe 3.** Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto e^{-|x|}$.

(a) Untersuchen Sie, ob $f$ in $\mathcal{S}$ enthalten ist.

(b) Berechnen Sie $g(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk} f(x)\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{R}$.

(c) Untersuchen Sie ob $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\mathrm{d}k$ gilt.

**Aufgabe 4.** Sei $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $x \mapsto \operatorname{sgn}(x)\mathrm{e}^{-|x|}$, wobei $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$ für $x \neq 0$ und 0 falls $x = 0$.

(a) Berechnen Sie $g(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk} f(x)\mathrm{d}x$, $k \in \mathbb{R}$.

(b) Untersuchen Sie ob $f(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\mathrm{d}k$ gilt.

**Zusatzaufgabe 5.** Sei $\delta_n : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ stetig mit $\int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x)\mathrm{d}x = 1$ und $\operatorname{supp} \delta_n \subset (-1/n, 1/n)^N$, $n \in \mathbb{N}$. Für $u \in C_\mathrm{c}(\mathbb{R}^N)$ sei $u * \delta_n : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$(u * \delta_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \delta_n(x - y)u(y)\mathrm{d}y.$$

(a) Zeigen Sie $u * \delta_n \in C_\mathrm{c}(\mathbb{R}^N)$, $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass die Folge von Funktionen $u * \delta_n$, $n \geq 1$, gleichmäßig gegen $u$ konvergiert.