Analysis II

Wintersemester 2015/16 **Marcel Schmidt**

Blatt 1 **Abgabe Mittwoch 28.10.2015**

(1) Zeigen Sie, dass die Funktion $s : [0, \pi) \times [0, \pi) \to [0, \infty)$ definiert durch

$$s(x, y) := |\sin(x - y)|$$

eine Metrik auf $[0, \pi)$ ist.

Tipp: Sie dürfen alles verwenden, was Sie über Sinus und Cosinus wissen. Machen Sie aber an den entsprechenden Stellen deutlich, was verwendet wird.

(2) Sei M eine endliche Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. Zeigen Sie, dass es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$cd_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Cd_1(x, y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

(3) Man zeige für die Abbildungen $d_p : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$, $p \in [1, \infty)$,

$$d_p(x, y) := \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N,$$

die Konvergenz

$$\lim_{p \to \infty} d_p(x, y) = d_\infty(x, y) := \max_{j=1,\ldots,N} |x_j - y_j|, \qquad x, y \in \mathbb{R}^N.$$

(4) (a) Für eine nichtleere Menge M sei

$$B(M) := \{f : M \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist beschränkt}\}$$

der Raum der beschränkten Funktionen. Dabei heißt $f : M \to \mathbb{C}$ beschränkt, falls die Menge $f(M) := \{f(m) \mid m \in M\}$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass $B(M)$ versehen mit der in der Vorlesung besprochenen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist. Zeigen Sie ferner, dass die Abbildung

$$\|\cdot\|_\infty : B(M) \to [0, \infty), \quad \|f\|_\infty := \sup_{m \in M} |f(m)|,$$

eine Norm auf $B(M)$ ist.

(b) Es sei $\ell^2 := \{x : \mathbb{N} \to \mathbb{C} \mid \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$ der Raum der quadratsummierbaren Folgen. Zeigen Sie, dass ℓ^2 versehen mit der in der Vorlesung besprochenen Addition und skalaren Multiplikation ein Vektorraum ist. Zeigen Sie ferner, dass die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}, \quad \langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j},$$

ein Skalarprodukt auf ℓ^2 ist.

Zusatzaufgaben

(1) Es sei $s : [0, \pi) \times [0, \pi) \to [0, \infty)$ die Metrik aus Aufgabe 1. Weiterhin sei $d : [0, \pi) \times [0, \pi) \to [0, \infty)$ mit $d(x, y) = |x - y|$ die Betragsmetrik.

(a) Sei $x \in (0, \pi)$. Zeigen Sie:

$$x_n \to x \text{ bezüglich s} \Leftrightarrow x_n \to x \text{ bezüglich d.}$$

(b) Geben Sie eine Folge (x_n) in $[0, \pi)$ an mit $x_n \to 0$ bezüglich s aber $x_n \not\to 0$ bezüglich d. (Es erzeugen also s und d im "Inneren" die selbe Topologie, aber nicht auf der gesamten Menge)

(2) Sei M eine nichtleere Menge und d_1, d_2 zwei Metriken auf M. Dann heißen d_1 und d_2 äquivalent, falls es Konstanten $c, C > 0$ gibt, so dass

$$c d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C d_1(x, y) \text{ für alle } x, y \in M.$$

(a) Seien s und d wie in Zusatzaufgabe 1. Sind diese Metriken äquivalent auf $(0, \pi)$?

(b) Sind sie es auf $(\varepsilon, \pi - \varepsilon)$ für ein beliebiges $\varepsilon \in (0, \frac{\pi}{2})$?

Wir wünschen allen einen guten Start in das neue Semester!