Probeklausur Analysis II

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Hilfsmittel. Keine.

Hinweise:

- Jedes Lösungsblatt ist mit Namen, Vornamen, Fachrichtung und Matrikelnummer zu versehen.
- Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen.
- Schreiben sie **nicht** mit Bleistift.
- Eine Lösung wird nur gewertet, wenn der Lösungsweg nachvollziehbar ist.
- Bei (versuchtem) Betrug gilt die Klausur als nicht bestanden.

---

(1) (a) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^k$ gegeben. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit und der partiellen Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in U$.

(b) Geben Sie ein hinreichendes Kriterium für die Differenzierbarkeit einer Funktion f in einem Punkt $x_0 \in U$ an.

(c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie die Funktion auf Differenzierbarkeit außerhalb des Ursprungs und bilden Sie die partiellen Ableitungen bei $(0,0)$. Untersuchen Sie anschließend die Funktion auf Differenzierbarkeit bei $(0,0)$.

(d) Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{2}\langle Bx, x\rangle + \langle a, x\rangle + c$, wobei $B \in \mathbb{R}^{d\times d}$ symmetrisch, $a \in \mathbb{R}^d$ und $c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Ableitung von f anhand der Definition von Differenzierbarkeit. **14 Punkte**

(2) (a) Definieren Sie das Konzept des metrischen Raumes.

(b) Was bedeutet Konvergenz einer Folge in einem metrischen Raum?

(c) Geben Sie die Definition der Vollständigkeit eines metrischen Raumes und jeweils drei Beispiele vollständiger und unvollständiger metrischer Räume an.

(d) Sei $(x_n)_n$ eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum und $(x_{n_k})_k$ eine gegen ein Element x konvergente Teilfolge. Zeigen Sie, dass dann die Folge $(x_n)_n$ gegen x konvergiert. **12 Punkte**

(3) (a) Sei (M, d) ein metrischer Raum. Wann heißt ein metrischer Raum kompakt?

(b) Sei $(x_n) \subset M$ eine konvergente Folge. Wann ist die Menge $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ kompakt? **7 Punkte**

(4) (a) Formulieren Sie den Satz über implizite Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass man für hinreichend kleine $x, y \in \mathbb{R}$ und genügend nahe bei -1 liegende z die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz) = 0$$

nach z auflösen kann. **10 Punkte**

(5) Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$$F(x, y, z) := (x - 1)^2 + y^2 + z^2$$

unter der Nebenbedingung $x + y = z$. **7 Punkte**

(6) (a) Was ist ein Mengenring?

(b) Sei $\mathcal{R}$ der Mengenring der Figuren auf $\mathbb{R}$ und μ das Lebesgue-Maß auf $\mathcal{R}$. Geben Sie ein Beispiel einer Folge integrierbarer Funktionen (f_n) an, die punktweise gegen f konvergiert, ohne das

$$\int f_n \, dx \to \int f \, dx$$

gilt.

(c) Formulieren Sie den Satz von Lebesgue. **10 Punkte**

Viel Erfolg!