

---

## Analysis III

Wintersemester 2014/2015

Prof. Dr. D. Lenz

---

Blatt 2

Abgabe Dienstag 04.11.2011

(1) Untersuchen Sie die folgenden Kurven auf Rektifizierbarkeit:

$$(a) \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0, \end{cases}$$

$$(b) \varrho : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} t^2 \sin\left(\frac{\pi}{t}\right) & : t > 0, \\ 0 & : t = 0. \end{cases}$$

Tipp: Skizzieren Sie die Kurve und geben Sie eine obere bzw. untere Abschätzung für die Kurvenlänge an.

(2) Skizzieren Sie folgende Kurven und berechnen Sie ihre Länge:

$$(a) \gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto (e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t, e^{-t}),$$

$$(b) \varrho : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (a \cos^3 t, a \sin^3 t) \text{ für } a > 0.$$

(3) Sei

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie das Vektorfeld  $F$ .

(b) Zeigen Sie  $\partial_1 F_2 = \partial_2 F_1$ .

(c) Ist  $F$  ein Gradientenfeld? (Tipp: Berechnen Sie  $\int_\gamma F d\gamma$  für  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto (\sin t, \cos t)$ .)

(4) Sei  $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto h(|x|)$

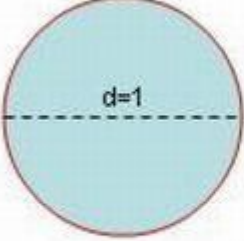
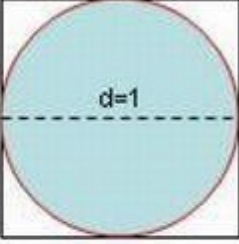
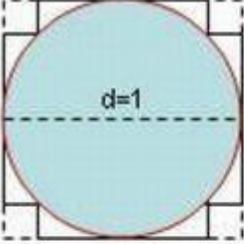
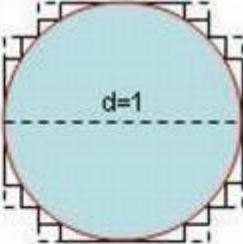
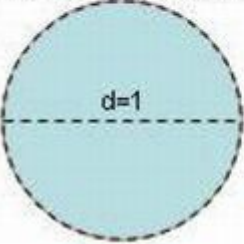

(a) Berechnen Sie  $\nabla \varphi$ .

(b) Ist  $G : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto \frac{1}{|x|^3} x$  ein Gradientenfeld? Finden Sie gegebenenfalls ein Potenzial, d.h. eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass  $G = \nabla \varphi$ .

Bitte wenden.

Zusatz

(Z1) Was ist hier faul?

|  |   |
|--|---|
| <p><b>Draw a circle</b></p>                                       | <p><b>Draw a square around it.</b><br/><b>Perimeter = 4</b></p>          |
| <p><b>Remove corners.</b><br/><b>Perimeter is still 4!</b></p>  | <p><b>Remove more corners.</b><br/><b>Perimeter is still 4!</b></p>    |
| <p><b>Repeat to infinity</b></p>                                | <p><b><math>\pi = 4!</math></b></p>  <p><b>Problem Archimedes?</b></p> |