Analysis III

Wintersemester 2014/2015 **Prof. Dr. D. Lenz**

Blatt 3 **Abgabe Dienstag 11.11.2011**

(1) (a) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) := (y, y-x)$ kein Potential besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass das Vektorfeld $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(x,y) := (y, x-y)$ ein Potential besitzt und geben Sie ein solches Potential an.

(2) Berechnen Sie das Kurvenintegral des Feldes $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $G(x,y) = (x^2, xy)$ längs der Kurve γ in den folgenden Fällen:

(a) $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t,t)$.

(b) $\gamma : [0,2] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{cases} (t,0), & t \leq 1, \\ (1,t-1), & t > 1. \end{cases}$

Handelt es sich um ein Gradientenfeld?

(3) Für $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert man die totale Variation $V_a^b(f) \in [0,\infty]$ durch

$$V_a^b(f) := \sup_Z \left\{ \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \right\},$$

wobei das Supremum über alle Zerlegungen

$$Z := \{(x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b) : n \in \mathbb{N}, x_j < x_{j+1}, j = 0, \ldots, n-1\}$$

von $[a,b]$ gebildet wird. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(a) Für jede nichtfallende Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist die totale Variation endlich, und es gilt $V_a^b(f) = f(b) - f(a)$.

Bitte wenden.

(b) Für f mit endlicher totaler Variation sind die Funktionen

$$f_{\pm}(x) = \frac{1}{2}(V_a^x(f) \pm f(x))$$

nicht fallend und f kann als Differenz zweier nichtfallender Funktionen dargestellt werden.

(c) Eine Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_N(t))$ ist genau dann rektifizierbar wenn für jede Komponenten γ_j, $j = 1, \dots, N$, die totale Variation endlich ist.

Hinweis zu (b): Zeigen Sie, dass $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$ für alle $c \in [a,b]$ gilt.

(4) Beweisen Sie folgende Aussagen.

(a) Die Menge $BV[a,b]$ aller Funktionen auf $[a,b]$ von endlicher totaler Variation (vgl. Aufgabe 3) bildet mit den üblichen Operationen der punktweisen Skalarmultiplikation und Addition einen Vektorraum.

(b) Jede Funktion $f \in BV[a,b]$ ist beschränkt, und es gilt für $f, g \in BV[a,b]$

$$V_a^b(fg) \leq V_a^b(f)\|g\|_\infty + V_a^b(g)\|f\|_\infty,$$

insbesondere ist $BV[a,b]$ mit der punktweisen Multiplikation eine Algebra.

(c) Die Abbildung $\|f\|_{BV} := |f(a)| + V_a^b(f)$ ist eine Norm auf $BV[a,b]$.

Zusatzaufgaben.

(Z1) Der Raum $BV[a,b]$ mit der Norm $\|\cdot\|_{BV}$ ist vollständig.

(Z2) Eine Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ ist genau dann sternförmig, wenn eine Indexmenge A und konvexe Mengen $C_\alpha \subset \mathbb{R}^d$, $\alpha \in A$ existieren, so dass $\bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \neq \emptyset$ und $U = \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$ ist.
Hinweis: Die Menge A muss im Allgemeinen überabzählbar gewählt werden.