

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Blatt 2**Abgabe: Montag 21.05.2012**

(1) Geben Sie die lokale Lösung für folgende Anfangswertprobleme an.

a.) $y' = e^y \cdot \sin(x)$ mit $y(\frac{\pi}{2}) = -2$.

b.) $y' = \frac{e^{-y^2}}{y \cdot (2x+x^2)}$ mit $y(2) = 1$.

(2) Skizzieren Sie das Richtungsfeld der folgenden Differentialgleichungen.

a.) $y' = 1 - e^{-y^2}$.

b.) $y' = (y^2 + 1) \cdot x$.

(3) Zu $\alpha > 1$ sei das Anfangswertproblem $y' = |y|^\alpha$ mit $y(x_0) = y_0$ gegeben. Geben Sie die Lösungen auf dem größtmöglichen Intervall an. Vergleichen Sie mit dem Fall $\alpha = 1$.

(4) Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichung an:

$$y' = x \cdot y + 2 \cdot x.$$

Zusatzaufgaben:

Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Zeigen Sie, dass die Bernoulli Differentialgleichung

$$y' = a(x)y + b(x)y^p$$

zu jedem Anfangspunkt (x_0, y_0) mit $x_0 \in I$ und $y_0 > 0$ eine auf einer Umgebung von x_0 definierte Lösung besitzt.

Hinweis: Durch die Substitution $z := y^{1-p}$ wird die Bernoulli Differentialgleichung auf eine inhomogene lineare Differentialgleichung zurückgeführt.