Diskrete Schrödingeroperatoren

Sommersemester 2011 **Prof. Dr. D. Lenz**

Einige Aufgaben **Diskussion Donnerstag 28. 4. 2011**

Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben, $X := \{1, \ldots, N\}$ und $\mathcal{H} := \{f : X \longrightarrow \mathbb{R}\}$ mit dem Skalarprodukt $\langle f, g \rangle = \sum_{x \in X} f(x)g(x)$ und der zugehörigen Norm $\|f\| := \langle f, g \rangle^{1/2}$.

(1) Zeigen Sie: Auf dem Raum der linearen Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ definiert

$$\|A\| := \max\{\|Af\| : \|f\| \leq 1\}$$

eine Norm mit $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

(2) Zeigen Sie:

- Eine Folge (f_n) in $\mathcal{H}$ konvergiert gegen $f \in \mathcal{H}$ genau dann, wenn gilt $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in X$.
- Eine Folge (A_n) von linearen Abbildungen von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{H}$ konvergiert genau dann gegen die lineare Abbildung A bzgl. der in Aufgabe 1 gegebenen Norm, wenn für alle $x, y \in X$ die zugehörigen Matrixelemente $A_n(x, y)$ gegen $A(x, y)$ konvergieren.

(3) Sei $(b, 0)$ ein symmetrischer Graph über X und L der zugehörige selbsadjungierte Operator, d.h. $Lf(x) = \sum_{y \in X} b(x, y)(f(x) - f(y))$. Zeigen Sie, daß die Vielfachheit des Eigenwertes 0 von L gerade die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von $(b, 0)$ ist.

(4) Sei Q eine symmetrische Form auf $\mathcal{H}$. Zeigen Sie: Es ist Q genau dann eine Dirichletform, wenn für alle $f \in \mathcal{H}$ gilt

$$Q(C_I f) \leq Q(f),$$

wobei $C_I : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ die (aus der Vorlesung) bekannte Abbildung ist, die x auf den x am nächsten liegenden Punkt aus $I = [0, 1]$ abbildet.

(5) Sei $P_t = e^{-tL}$, $t \geq 0$, eine symmetrische Halbgruppe auf $\mathcal{H}$. Ein Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{H}$ heißt invariant unter der Halbgruppe, wenn $P_t f \in \mathcal{U}$ gilt für alle $f \in \mathcal{U}$ und $t \geq 0$. Ein Unterraum $\mathcal{U}$ heißt invariant unter Multiplikation mit Funktionen auf X, wenn

für jedes $f \in \mathcal{U}$ und jede reellwertige Funktion $\phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ auch ϕf zu $\mathcal{U}$ gehört. Zeigen Sie: Es ist (P_t) genau dann positivitätsverbessernd, wenn nur die trivialen Unterräume von $\mathcal{H}$ (d.h. $\{0\}$ und $\mathcal{H}$) unter der Halbgruppe und unter Multiplikation mit Funktionen auf X invariant sind.

Viel Spass!